

Cieężkie

argumenty

Punkt materialny, (pm), to para: (punkt, liczba rzeczywista),

Środek ciężkości, S , dwóch pm (P_1, m_1) , (P_2, m_2)

to ich średnia ważona: $S = \frac{P_1 \cdot m_1 + P_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$,

jak widać ma to sens tylko, gdy $m_1 + m_2 \neq 0$

– już Archimedes wiedział, że

obok ciężarów grawitacja funduje nam również wypory.

Jest to zgodne z fizyką – w myśl jej reguł “ramię razy siła” jest

$\overrightarrow{SP_1} \cdot m_1 + \overrightarrow{SP_2} \cdot m_2 = \vec{0}$, czyli $(P_1 - S) \cdot m_1 + (P_2 - S) \cdot m_2 = 0$,

zatem $S \cdot (m_1 + m_2) = P_1 \cdot m_1 + P_2 \cdot m_2$.

Przyjrzyjmy się obrazkom:

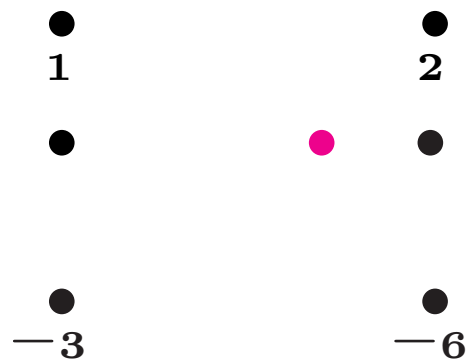
●
1

●
2

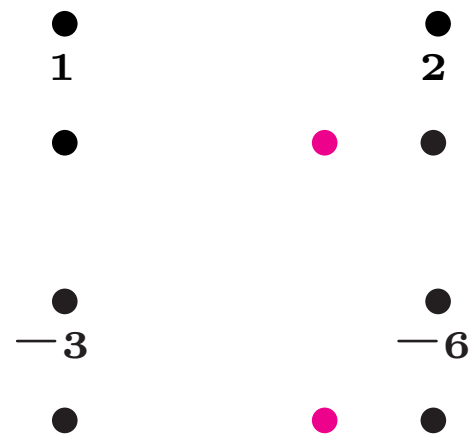
Przyjrzyjmy się obrazkom:



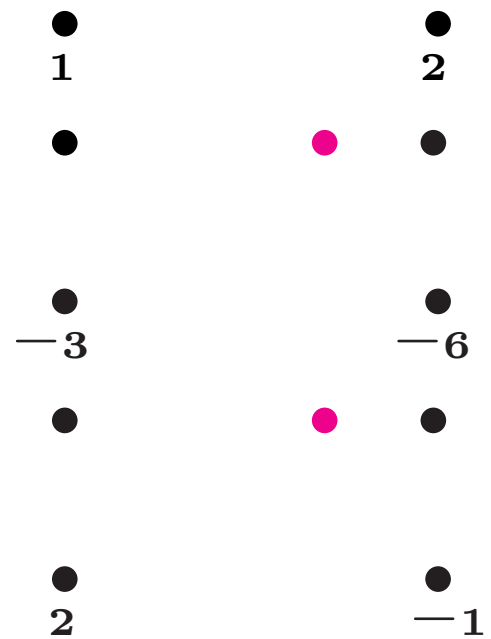
Przyjrzyjmy się obrazkom:



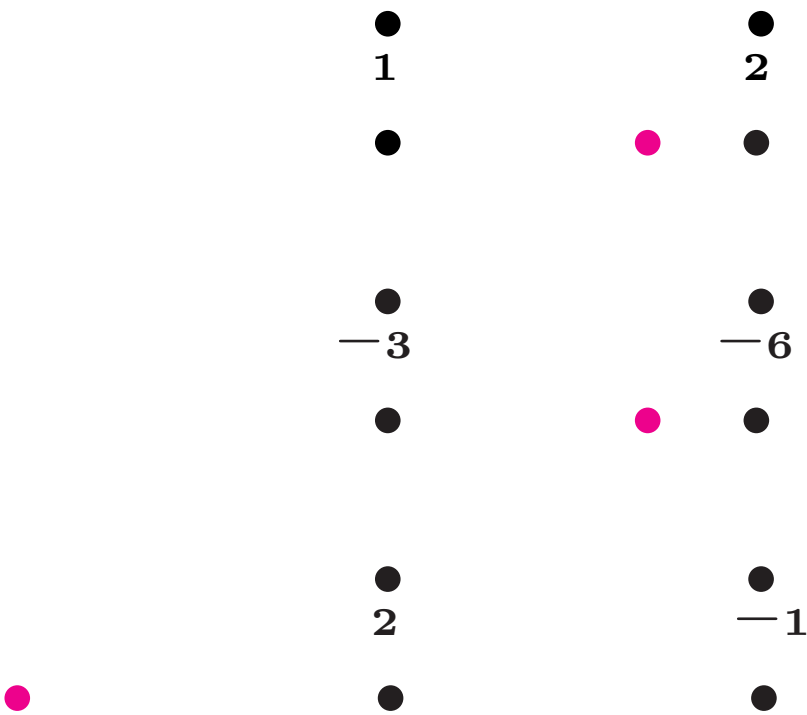
Przyjrzyjmy się obrazkom:



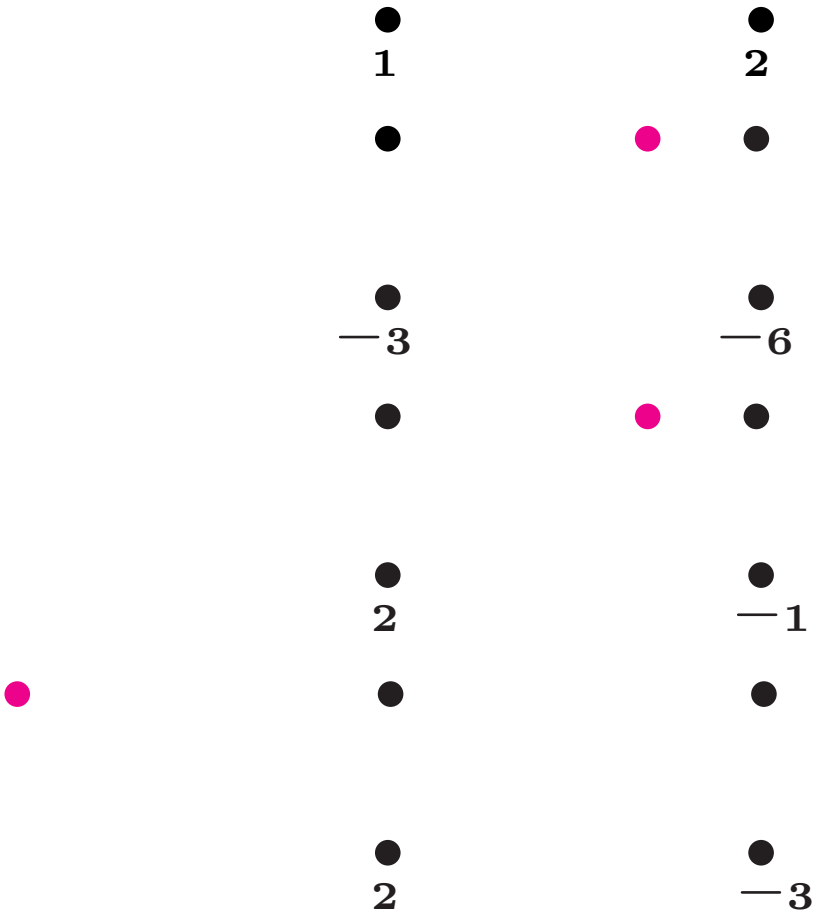
Przyjrzyjmy się obrazkom:



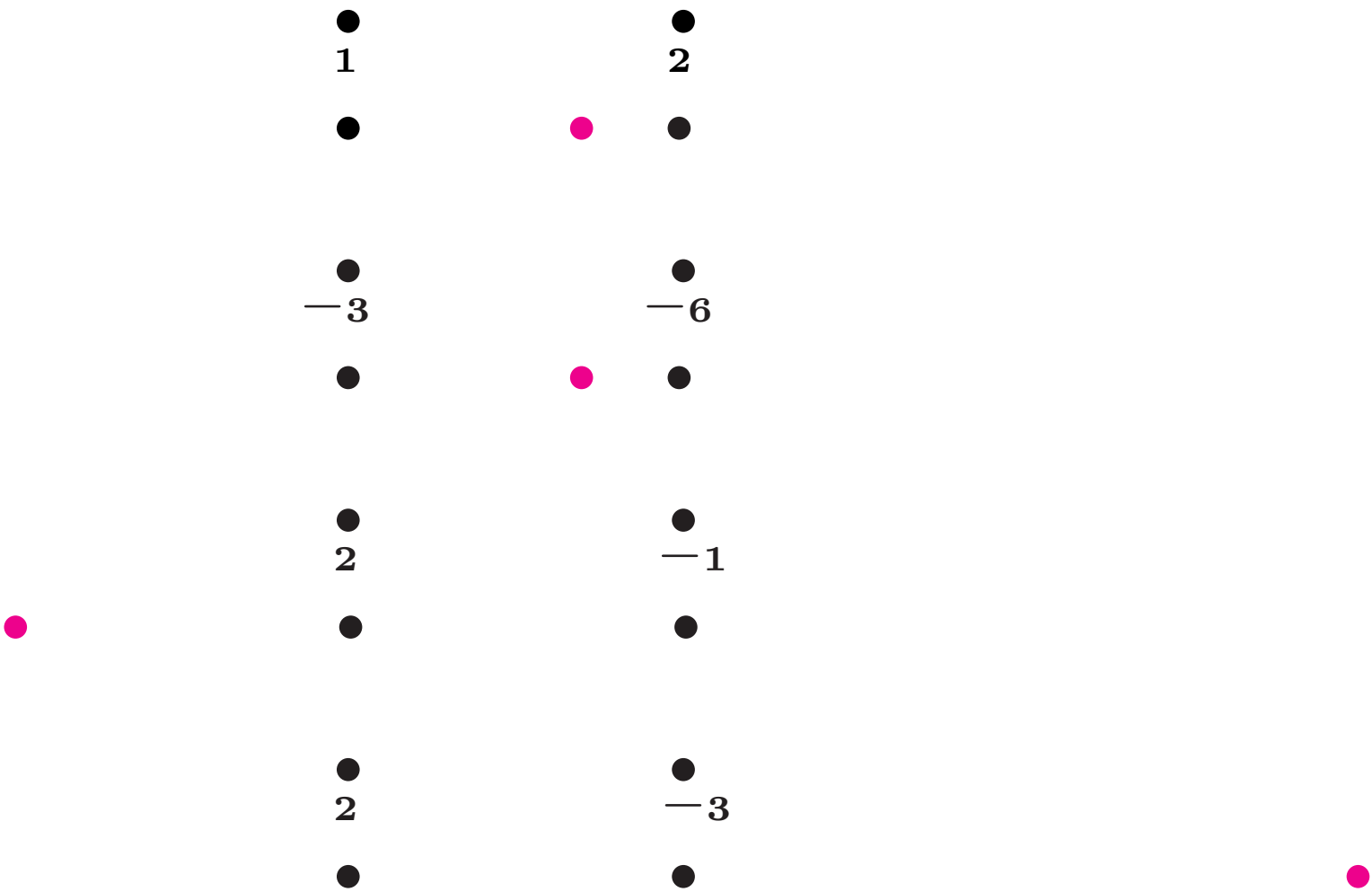
Przyjrzyjmy się obrazkom:



Przyjrzyjmy się obrazkom:



Przyjrzyjmy się obrazkom:



Przyjrzenie się tym wzorom i obrazkom
niechybnie prowadzi do wniosku, że

- zmiana mas na proporcjonalne nie zmienia środka ciężkości,
- z jednego punktu można utworzyć wiele pm,
- środek ciężkości dwóch pm leży na prostej przechodzącej przez te punkty (bo $\overrightarrow{SP_1}$ i $\overrightarrow{SP_2}$ są równoległe),
- mając ustalone dwa punkty można tak dobrać im masy, by środek ciężkości powstałych pm znalazł się w dowolnie wskazanym punkcie prostej przechodzącej przez te punkty.

Analogicznie – jako średnią ważoną definiujemy środek ciężkości dla większej liczby pm.

Gdy n pm o środku ciężkości $S_{1,n}$ podzielimy na dwie części i dla każdej z nich obliczymy środek ciężkości, to środkiem ciężkości tych środków ciężkości będzie dalej S .

Przekonuje o tym prosty (choć wyglądający wręcz niemądrze), oczywisty rachunek:

$$\begin{aligned} S_{1,n} &= \frac{P_1 \cdot m_1 + \dots + P_n \cdot m_n}{m_1 + \dots + m_n} = \\ &= \frac{(P_1 \cdot m_1 + \dots + P_i \cdot m_i) + (P_{i+1} \cdot m_{i+1} + \dots + P_n \cdot m_n)}{m_1 + \dots + m_n} = \\ &= \frac{S_{1,i} \cdot (m_1 + \dots + m_i) + S_{(i+1),n} \cdot (m_{i+1} + \dots + m_n)}{(m_1 + \dots + m_i) + (m_{i+1} + \dots + m_n)}. \end{aligned}$$

Podobnie otrzymujemy spostrzeżenie, że
środek ciężkości pm leżących na pewnej płaszczyźnie,
też na niej leży (kombinacja wektorów równoległych
do płaszczyzny jest do tejże płaszczyzny równoległa).

Podobnie otrzymujemy spostrzeżenie, że środek ciężkości pm leżących na pewnej płaszczyźnie, też na niej leży (kombinacja wektorów równoległych do płaszczyzny jest do tejże płaszczyzny równoległa).

Rozwiążmy teraz zadanie:

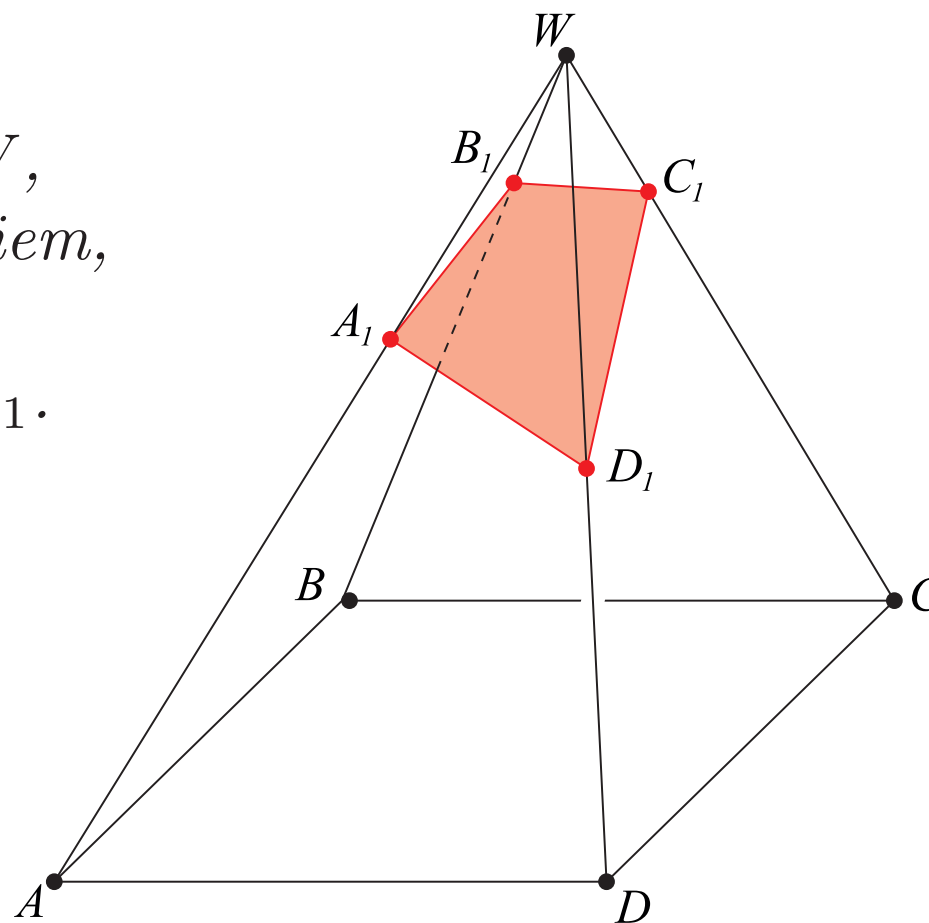
*Ostrosłup czworokątny $ABCDW$,
gdzie $ABCD$ jest równoległobokiem,
przecięto płaszczyzną
otrzymując czworokąt $A_1B_1C_1D_1$.*

Wiemy, że $A_1W : A_1A = 1 : 2$,

$B_1W : B_1B = 1 : 4$,

$C_1W : C_1C = 1 : 3$.

*W jakim stosunku jest
podzielona krawędź DW ?*



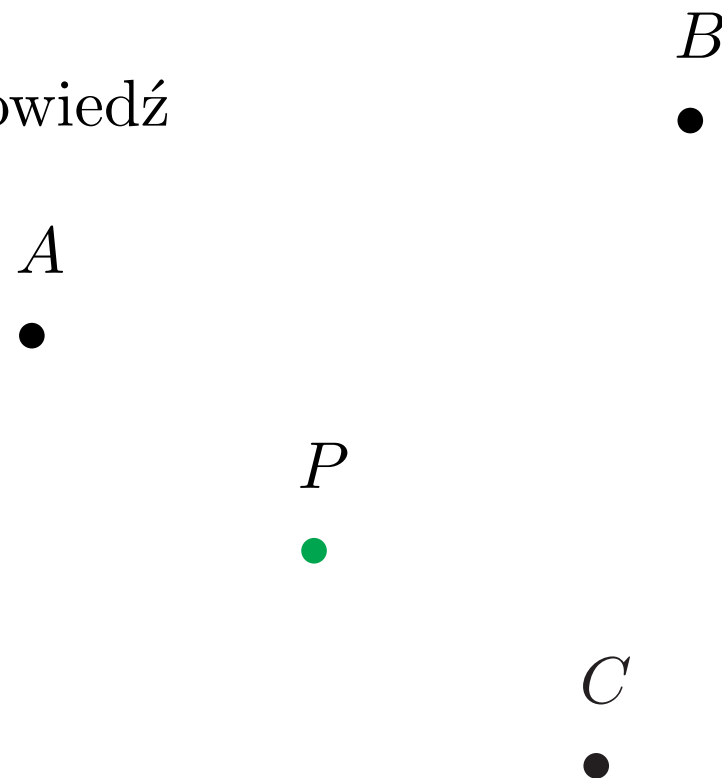
Do rozwiązania potrzebna będzie odpowiedź
na pytanie pomocnicze:

*Jak obciążyć punkty A , B , C ,
by środek ciężkości wypadł
w czwartym wierzchołku
równoległoboku?*

Do rozwiązania potrzebna będzie odpowiedź
na pytanie pomocnicze:

*Jak obciążyć punkty A , B , C ,
by środek ciężkości wypadł
w czwartym wierzchołku
równoległoboku?*

Obciążenie $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$
jest dobre, bo
środek ciężkości pm A i C
to P – środek odcinka AC –
obciążony przez 2,



Do rozwiązania potrzebna będzie odpowiedź
na pytanie pomocnicze:

*Jak obciążyć punkty A , B , C ,
by środek ciężkości wypadł
w czwartym wierzchołku
równoległoboku?*

Obciążenie $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$
jest dobre, bo
środek ciężkości pm A i C
to P – środek odcinka AC –
obciążony przez 2,

wobec tego środek ciężkości

wszystkich punktów to środek ciężkości S pm B i P , a ten leży
na prostej BP na zewnątrz odcinka BP , dwa razy bliżej do P niż
do B , czyli P jest środkiem odcinka BS – skoro AC i BS mają
wspólny środek, więc $ABCS$ jest równoległobokiem.

B
•

A
•

P
•

C
•

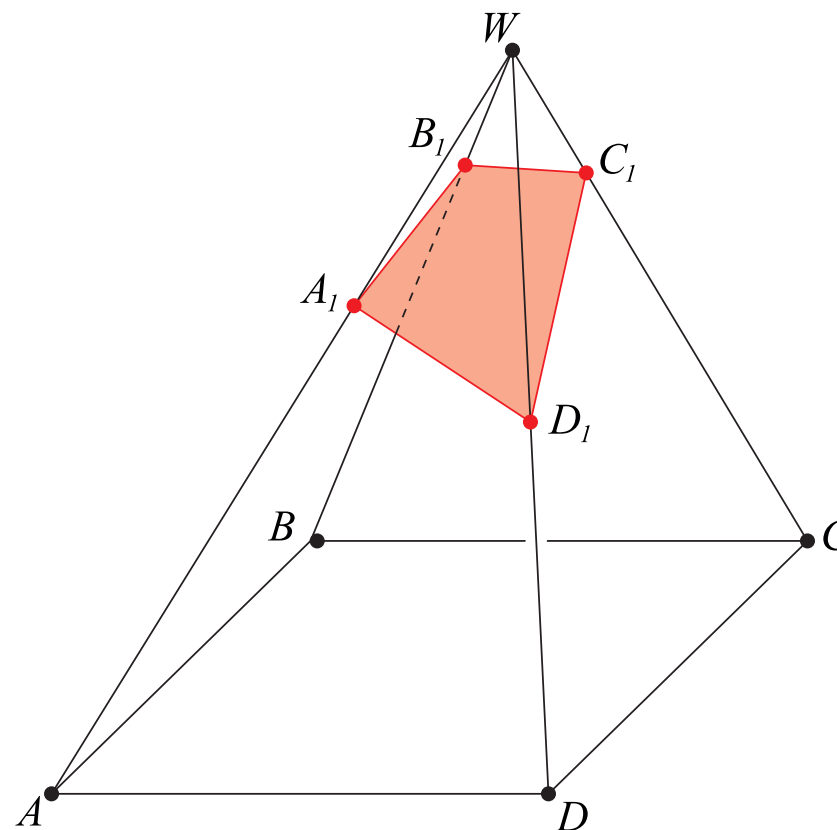
S
•

Wróćmy do naszego zadania.

Rozpatrzmy sześć pm:

$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$,
 $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$.

Dlaczego takie?



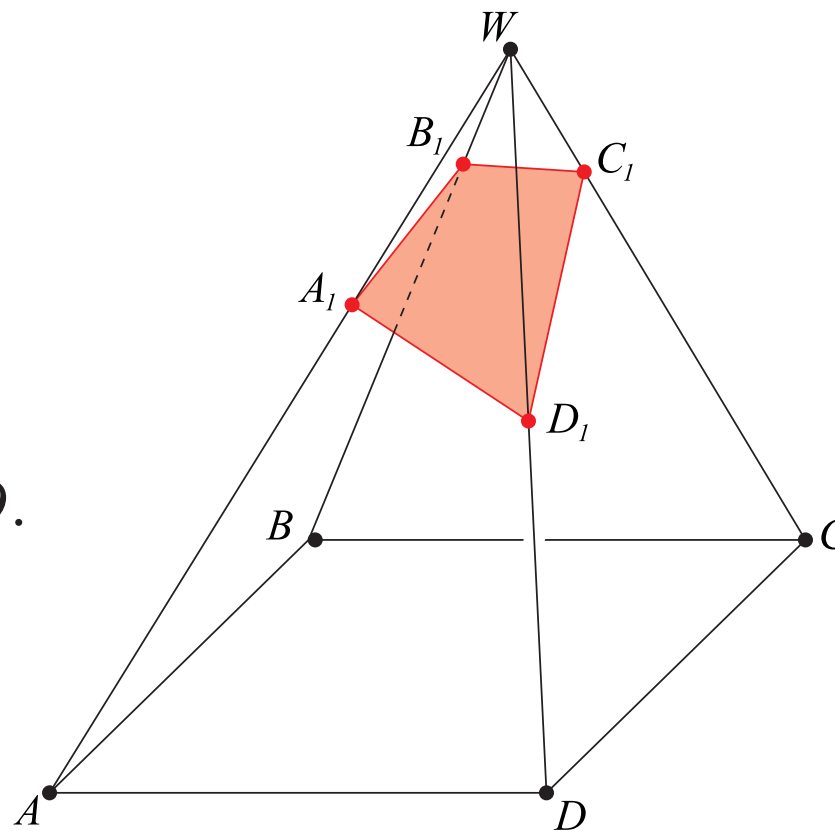
Wróćmy do naszego zadania.

Rozpatrzmy sześć pm:

$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$,
 $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$.

Dlaczego takie?

Masy w A , B i C są takie, by
ich środek ciężkości wypadł w D .



Wróćmy do naszego zadania.

Rozpatrzmy sześć pm:

$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$,
 $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$.

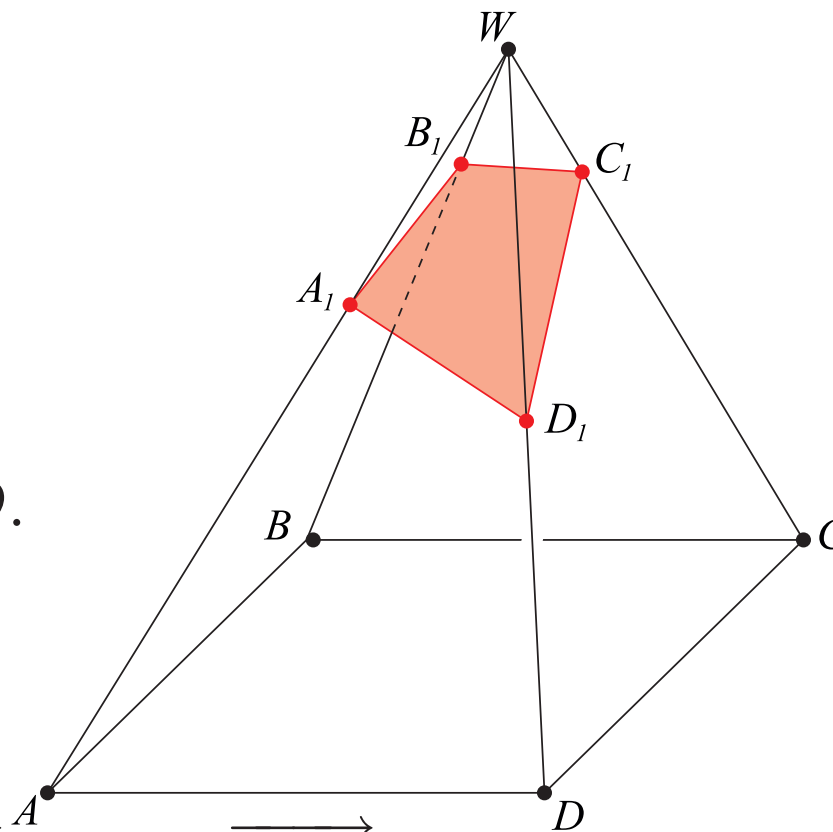
Dlaczego takie?

Masy w A , B i C są takie, by ich środek ciężkości wypadł w D .

Pm $(W, 2)$ jest po to, by środek ciężkości końców krawędzi AW wypadł w A_1 . Mamy bowiem

$1 \cdot \overrightarrow{A_1 A} + m \cdot \overrightarrow{A_1 W} = 0$ i $1 \cdot \overrightarrow{A_1 A} = -2 \cdot \overrightarrow{A_1 W}$, skąd $m = 2$.

Punkt A_1 ma jako środek ciężkości masę 3.



Wróćmy do naszego zadania.

Rozpatrzmy sześć pm:

$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$,
 $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$.

Dlaczego takie?

Masy w A , B i C są takie, by
ich środek ciężkości wypadł w D .

Pm $(W, 2)$ jest po to, by środek
ciężkości końców krawędzi AW
wypadł w A_1 . Mamy bowiem

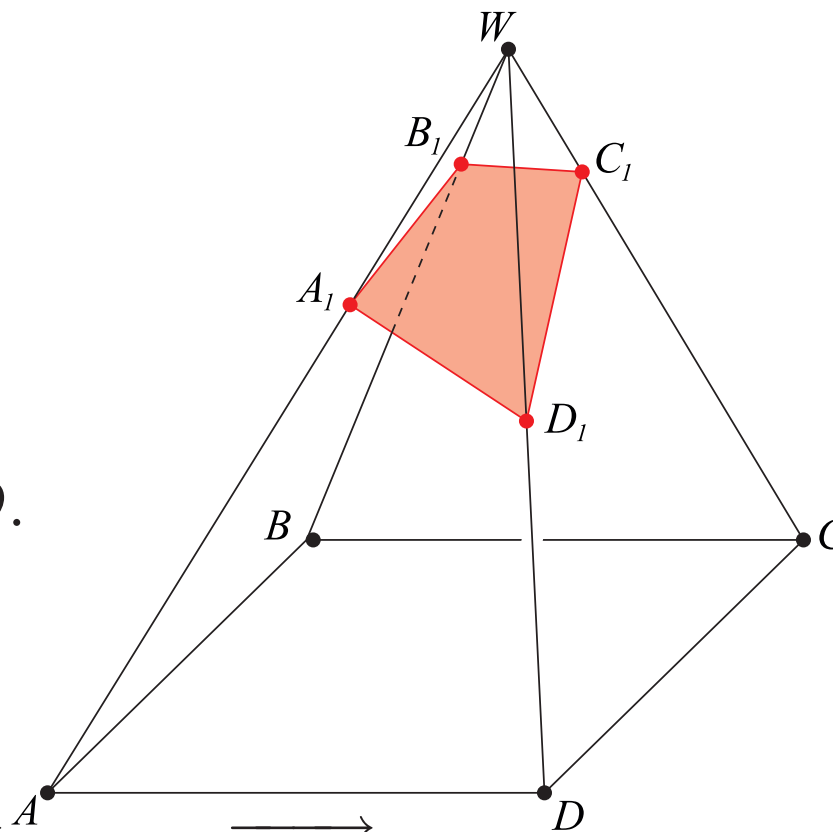
$1 \cdot \overrightarrow{A_1 A} + m \cdot \overrightarrow{A_1 W} = 0$ i $1 \cdot \overrightarrow{A_1 A} = -2 \cdot \overrightarrow{A_1 W}$, skąd $m = 2$.

Punkt A_1 ma jako środek ciężkości masę 3.

Podobnie środek ciężkości

dla pm $(B, -1)$ i $(W, -4)$ to B_1 z masą -5 ,

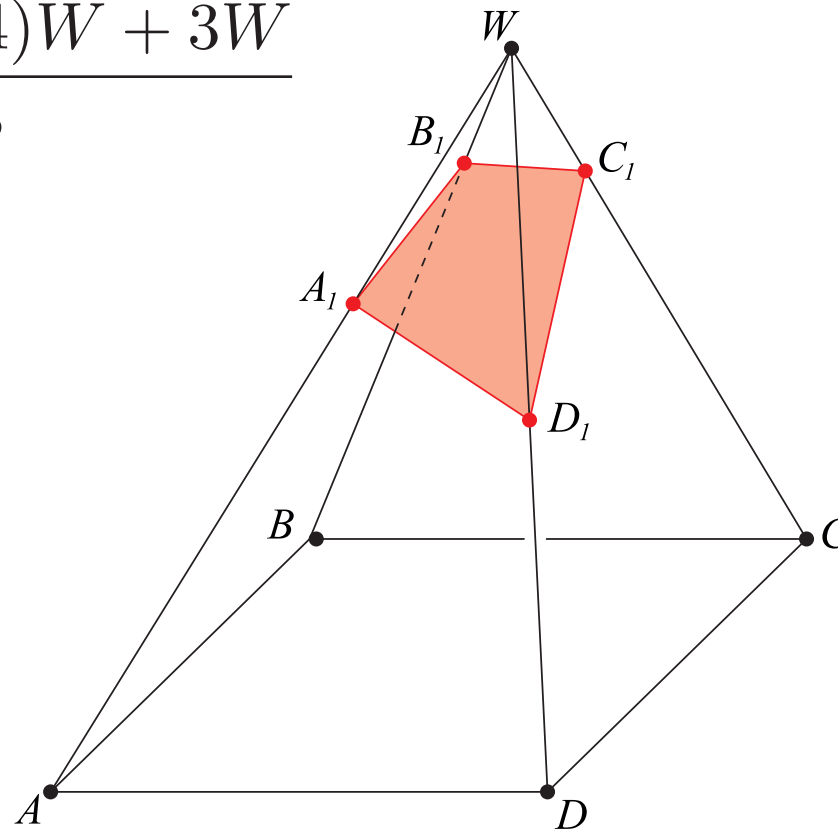
a dla $(C, 1)$ i $(W, 3)$ to C_1 z masą 4.



Obliczmy środek ciężkości punktów

$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$, $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$, czyli

$$S = \frac{1A + (-1)B + 1C + 2W + (-4)W + 3W}{1 - 1 + 1 + 2 - 4 + 3}$$



Obliczmy środek ciężkości punktów

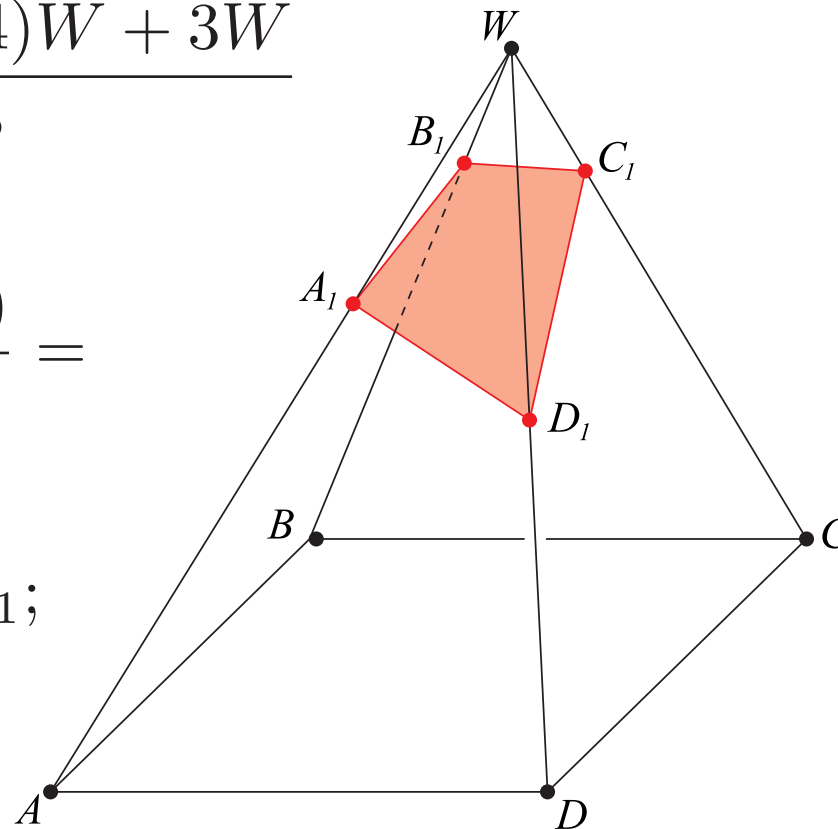
$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$, $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$, czyli

$$S = \frac{1A + (-1)B + 1C + 2W + (-4)W + 3W}{1 - 1 + 1 + 2 - 4 + 3}$$

sposób I:

$$\begin{aligned} & \frac{(A + 2W) - (B + 4W) + (C + 3W)}{2} = \\ & = \frac{3A_1 + (-5)B_1 + 4C_1}{2}, \end{aligned}$$

stąd S leży na płaszczyźnie $A_1B_1C_1$;



Obliczmy środek ciężkości punktów

$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$, $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$, czyli

$$S = \frac{1A + (-1)B + 1C + 2W + (-4)W + 3W}{1 - 1 + 1 + 2 - 4 + 3}$$

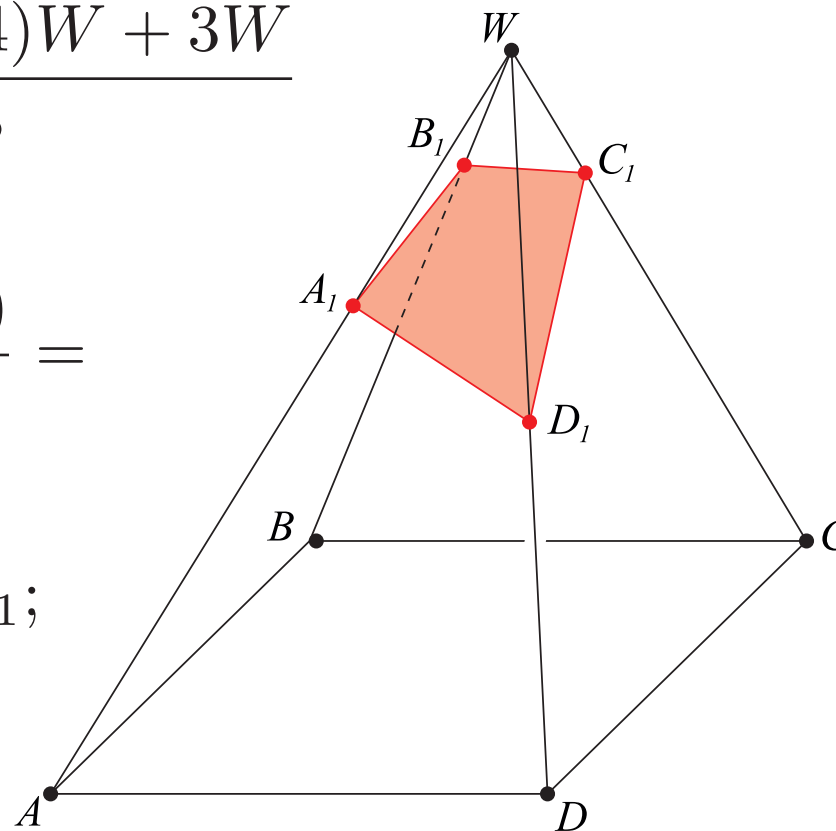
sposób I:

$$\begin{aligned} & \frac{(A + 2W) - (B + 4W) + (C + 3W)}{2} = \\ & = \frac{3A_1 + (-5)B_1 + 4C_1}{2}, \end{aligned}$$

stąd S leży na płaszczyźnie $A_1B_1C_1$;

sposób II:

$$\begin{aligned} & \frac{(A - B + C) + (2W - 4W + 3W)}{2} = \\ & = \frac{D + W}{2}, \text{ stąd } S \text{ jest środkiem } DW. \end{aligned}$$



Obliczmy środek ciężkości punktów

$(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$, $(W, 2)$, $(W, -4)$, $(W, 3)$, czyli

$$S = \frac{1A + (-1)B + 1C + 2W + (-4)W + 3W}{1 - 1 + 1 + 2 - 4 + 3}$$

sposób I:

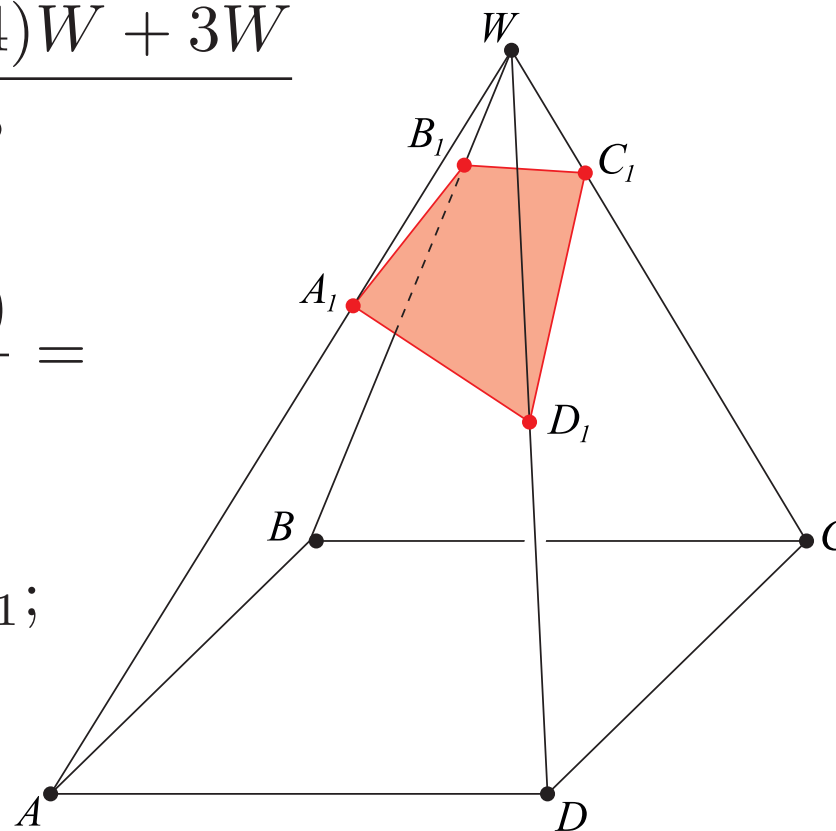
$$\begin{aligned} & \frac{(A + 2W) - (B + 4W) + (C + 3W)}{2} = \\ & = \frac{3A_1 + (-5)B_1 + 4C_1}{2}, \end{aligned}$$

stąd S leży na płaszczyźnie $A_1B_1C_1$;

sposób II:

$$\begin{aligned} & \frac{(A - B + C) + (2W - 4W + 3W)}{2} = \\ & = \frac{D + W}{2}, \end{aligned}$$

A zatem płaszczyzna $A_1B_1C_1$ przecina krawędź DW w jej środku.

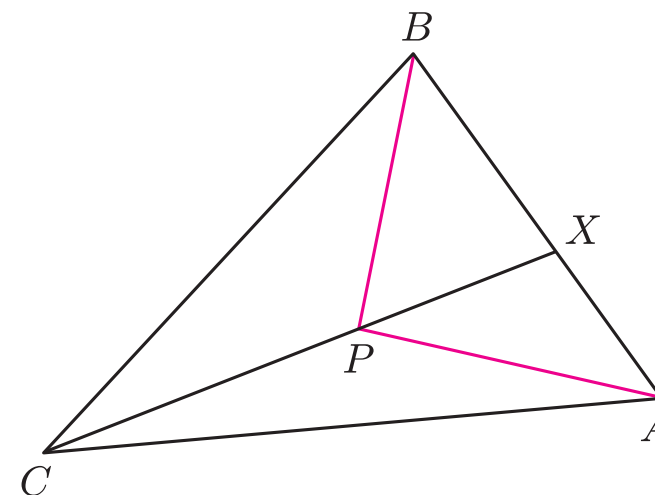


Odpowiednikiem zasady “ramię razy siła” na płaszczyźnie jest następujące spostrzeżenie

Jeśli środkiem ciężkości pm (A, m_A) , (B, m_B) , (C, m_C) jest punkt P , to $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$, gdzie Δ_{XYZ} to pole trójkąta XYZ .

Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\begin{aligned} \frac{m_A}{m_B} &= \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}} = \frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}} = \\ &= \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}. \end{aligned}$$



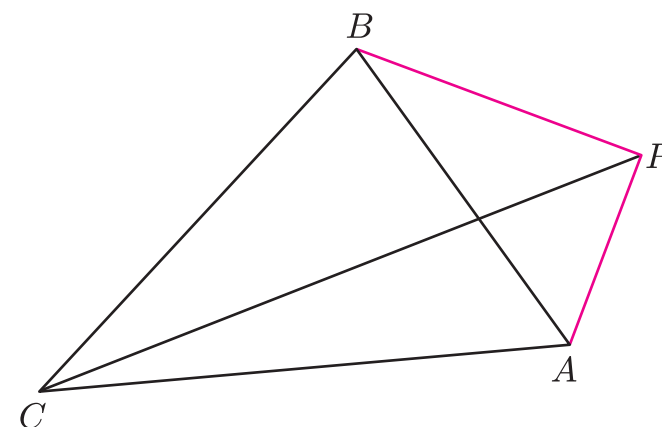
Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.

Odpowiednikiem zasady “ramię razy siła” na płaszczyźnie jest następujące spostrzeżenie

*Jeśli środkiem ciężkości pm (A, m_A) , (B, m_B) , (C, m_C) jest punkt P , to $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$, gdzie Δ_{XYZ} to **zorientowane** pole trójkąta XYZ .*

Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\begin{aligned} \frac{m_A}{m_B} &= \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}} = \frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}} = \\ &= \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}. \end{aligned}$$



Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.

Gdy chcemy, aby dotyczyło to całej płaszczyzny, powinniśmy posługiwać się pojęciem pola **zorientowanego**.

Gdy ustalimy trójkąt ABC , możemy liczby $(\Delta_{BCP}, \Delta_{CAP}, \Delta_{ABP})$ uznać za współrzędne punktu P .

Takie współrzędne to **współrzędne barycentryczne**

Gdy ustalimy trójkąt ABC , możemy liczby $(\Delta_{BCP}, \Delta_{CAP}, \Delta_{ABP})$ uznać za współrzędne punktu P .

Takie współrzędne to **współrzędne barycentryczne** – jest ich więcej, ale są jednorodne, co powoduje, że również jednorodne stają się wszelkie funkcje opisujące geometryczne zależności.

Funkcja f zmiennych $x_1, \dots, x_n$ jest jednorodna w stopniu k , gdy spełnia warunek $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$, na przykład wielomian $x^5 + 3xyz^3 - 7x^2y^2z + xy^2z^2$ jest jednorodny w stopniu 5.

Gdy ustalimy trójkąt ABC , możemy liczby $(\Delta_{BCP}, \Delta_{CAP}, \Delta_{ABP})$ uznać za współrzędne punktu P .

Takie współrzędne to **współrzędne barycentryczne** – jest ich więcej, ale są jednorodne, co powoduje, że również jednorodne stają się wszelkie funkcje opisujące geometryczne zależności.

Funkcja f zmiennych $x_1, \dots, x_n$ jest jednorodna w stopniu k , gdy spełnia warunek $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$, na przykład wielomian $x^5 + 3xyz^3 - 7x^2y^2z + xy^2z^2$ jest jednorodny w stopniu 5.

I ma miejsce bardzo ważne twierdzenie, stanowiące podstawę geometrii algebraicznej:

Funkcja jednorodna w stopniu k i gładka w stopniu k (czyli mająca k ciągłych pochodnych) jest wielomianem.

Drugą zaletą współrzędnych barycentrycznych jest ich związek ze zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi.

Drugą zaletą współrzędnych barycentrycznych jest ich związek ze zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi.

Współrzędne barycentryczne dowolnego punktu można obrać tak, by było $\overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 = 1$ – taką trójkę nazywa się współrzędnymi **arealnymi**.

Dla nich mamy bowiem zależność

$$\Delta_{BCP} = \overline{m}_1 \Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{CAP} = \overline{m}_2 \Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{ABP} = \overline{m}_3 \Delta_{ABC}.$$

Drugą zaletą współrzędnych barycentrycznych jest ich związek ze zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi.

Współrzędne barycentryczne dowolnego punktu można obrać tak, by było $\overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 = 1$ – taką trójkę nazywa się współrzędnymi **arealnymi**.

Dla nich mamy bowiem zależność

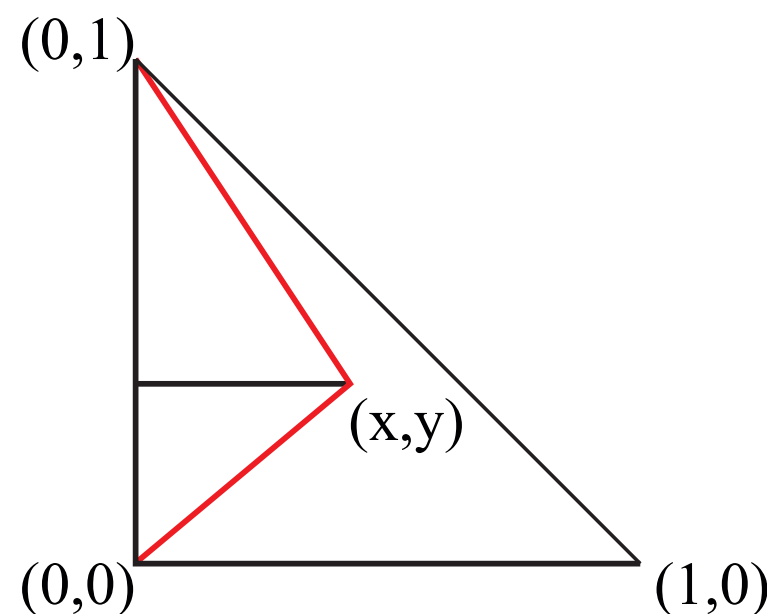
$$\Delta_{BCP} = \overline{m}_1 \Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{CAP} = \overline{m}_2 \Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{ABP} = \overline{m}_3 \Delta_{ABC}.$$

Jeśli trójkątem ABC będzie trójkąt o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$

to dla punktu o współrzędnych kartezjańskich (x, y) będziemy mieli $x = \overline{m}_1$ i podobnie $y = \overline{m}_2$.



Drugą zaletą współrzędnych barycentrycznych jest ich związek ze zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi.

Współrzędne barycentryczne dowolnego punktu można obrać tak, by było $\overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 = 1$ – taką trójkę nazywa się współrzędnymi **arealnymi**.

Dla nich mamy bowiem zależność

$$\Delta_{BCP} = \overline{m}_1 \Delta_{ABC},$$

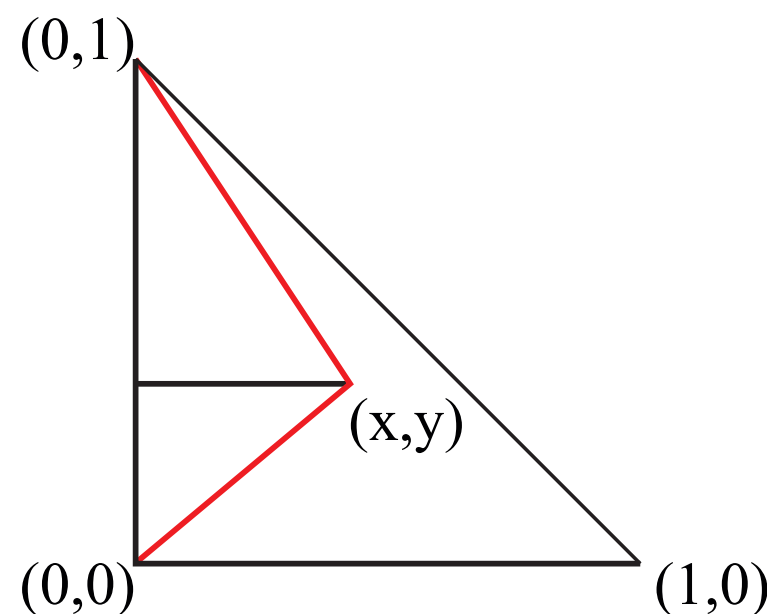
$$\Delta_{CAP} = \overline{m}_2 \Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{ABP} = \overline{m}_3 \Delta_{ABC}.$$

Jeśli trójkątem ABC będzie trójkąt o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$

to dla punktu o współrzędnych kartezjańskich (x, y) będziemy mieli $x = \overline{m}_1$ i podobnie $y = \overline{m}_2$.

Tak samo jest dla ukośnokątnego układu współrzędnych.



Zatem współrzędne arealne punktu (x, y) to $(x, y, 1 - x - y)$.

Pole (zorientowane) trójkąta o wierzchołkach $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ to wedle standardowych wzorów

$$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

gdy ktoś nie lubi wyznaczników, może obliczyć to samo ze wzoru

$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} |RP| |RQ| \sin \angle PRQ$ i wyjdzie mu to samo, czyli

$$\frac{1}{2} ((p_2 q_3 - p_3 q_2) r_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) r_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) r_3)$$

Zatem współrzędne arealne punktu (x, y) to $(x, y, 1 - x - y)$.

Pole (zorientowane) trójkąta o wierzchołkach $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ to wedle standardowych wzorów

$$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

gdy ktoś nie lubi wyznaczników, może obliczyć to samo ze wzoru

$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} |RP| |RQ| \sin \angle PRQ$ i wyjdzie mu to samo, czyli

$$\frac{1}{2} ((p_2 q_3 - p_3 q_2) r_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) r_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) r_3)$$

Gdy punkt $X = (x_1, x_2, x_3)$ leży na prostej PQ ,

pole trójkąta PQX jest równe zeru. Stąd równanie prostej to

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2) x_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) x_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) x_3 = 0,$$

a użyte **współrzędne** barycentryczne **nie muszą być arealne!**

Zatem współrzędne arealne punktu (x, y) to $(x, y, 1 - x - y)$.

Pole (zorientowane) trójkąta o wierzchołkach $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ to wedle standardowych wzorów

$$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

gdy ktoś nie lubi wyznaczników, może obliczyć to samo ze wzoru

$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} |RP| |RQ| \sin \angle PRQ$ i wyjdzie mu to samo, czyli

$$\frac{1}{2} ((p_2 q_3 - p_3 q_2) r_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) r_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) r_3)$$

Gdy punkt $X = (x_1, x_2, x_3)$ leży na prostej PQ ,

pole trójkąta PQX jest równe zeru. Stąd równanie prostej to

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2) x_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) x_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) x_3 = 0,$$

a użyte **współrzędne** barycentryczne **nie muszą być arealne!**

Jest to równanie stopnia pierwszego, więc przy przejściu do współrzędnych barycentrycznych **stopnie równań się nie zmieniają!**

Twierdzenie Routha.

Punkty K, L, M leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB , tak, że

$$\overrightarrow{BK} = \lambda \overrightarrow{KC},$$

$$\overrightarrow{CL} = \mu \overrightarrow{LA},$$

$$\overrightarrow{AM} = \nu \overrightarrow{MB};$$

punkty P, Q, R leżą

odpowiednio na prostych

AK i BL ,

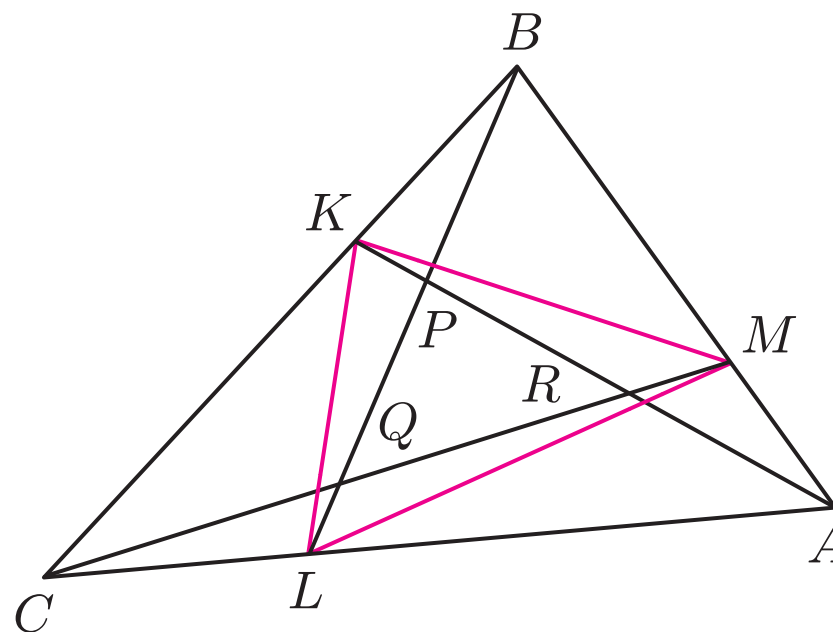
BL i CM ,

CM i AK .

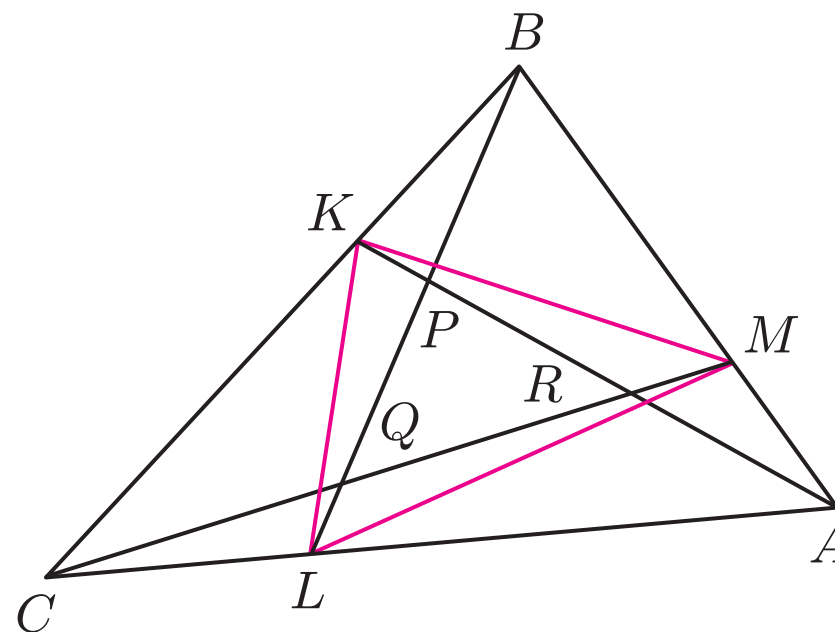
Wówczas

$$\Delta_{KLM} = \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)} \cdot \Delta_{ABC}$$

$$\Delta_{PQR} = \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)} \cdot \Delta_{ABC}$$



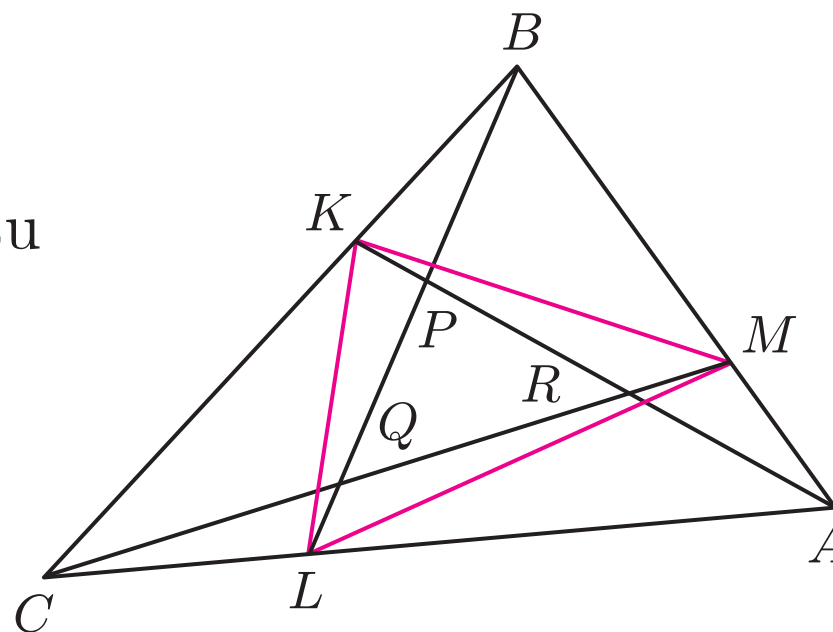
Dowód to czyste rachunki: połóżmy ciężary 1 w punktach A, B, C ,
czyli nadajmy im współrzędne barycentryczne
 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Zatem $\Delta_{ABC} = \frac{1}{2}$.



Dowód to czyste rachunki: połóżmy ciężary 1 w punktach A, B, C , czyli nadajmy im współrzędne barycentryczne $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Zatem $\Delta_{ABC} = \frac{1}{2}$.

Ponieważ $\overrightarrow{BK} = \lambda \overrightarrow{KC}$,
więc $K = (0, 1, \lambda)$.

Współrzędne arealne tego punktu
to $(0, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1})$.

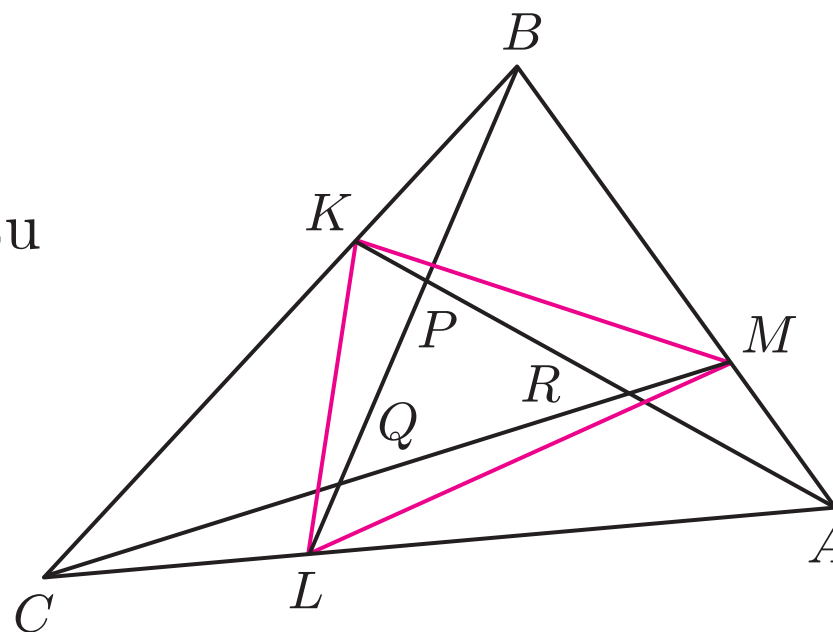


Dowód to czyste rachunki: połóżmy ciężary 1 w punktach A, B, C , czyli nadajmy im współrzędne barycentryczne $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Zatem $\Delta_{ABC} = \frac{1}{2}$.

Ponieważ $\overrightarrow{BK} = \lambda \overrightarrow{KC}$,
więc $K = (0, 1, \lambda)$.

Współrzędne arealne tego punktu
to $(0, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1})$.

Analogicznie dla L i M mamy
 $(\frac{\mu}{\mu+1}, 0, \frac{1}{\mu+1})$ i $(\frac{1}{\nu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}, 0)$.



Dowód to czyste rachunki: połóżmy ciężary 1 w punktach A, B, C , czyli nadajmy im współrzędne barycentryczne $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Zatem $\Delta_{ABC} = \frac{1}{2}$.

Ponieważ $\overrightarrow{BK} = \lambda \overrightarrow{KC}$,
więc $K = (0, 1, \lambda)$.

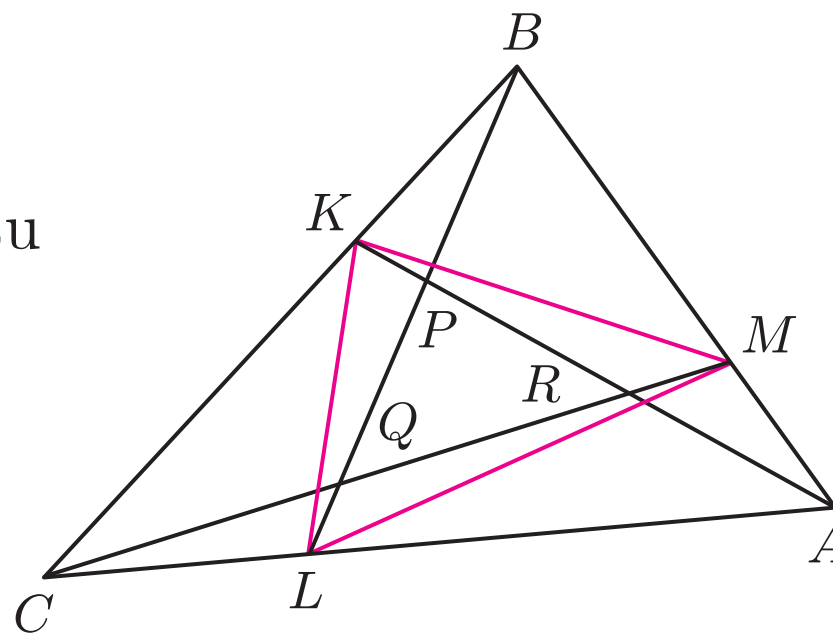
Współrzędne arealne tego punktu to $(0, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1})$.

Analogicznie dla L i M mamy $(\frac{\mu}{\mu+1}, 0, \frac{1}{\mu+1})$ i $(\frac{1}{\nu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}, 0)$.

Podstawiając do wzoru

$$\frac{1}{2} ((k_2 l_3 - k_3 l_2) m_1 + (k_3 l_1 - k_1 l_3) m_2 + (k_1 l_2 - k_2 l_1) m_3),$$

otrzymujemy $\Delta_{KLM} = \frac{1}{2} \frac{\lambda \mu \nu + 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)}$, jak miało być.



Z kolei ze wzoru

$$(a_2k_3 - a_3k_2)x_1 + (a_3k_1 - a_1k_3)x_2 + (a_1k_2 - a_2k_1)x_3 = 0$$

dla $A = (1, 0, 0)$ i $K = (0, 1, \lambda)$

otrzymujemy dla prostej AK

równanie $x_3 = \lambda x_2$.

Podobnie dla prostej BL

mamy $x_1 = \mu x_3$

i dla CM $x_2 = \nu x_1$.

Stąd otrzymujemy

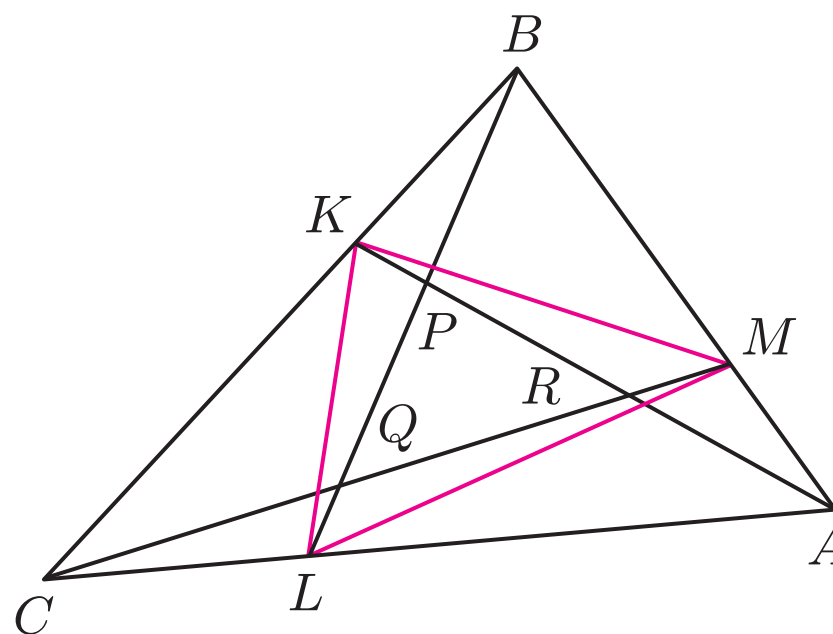
współrzędne barycentryczne:

dla $P = (\lambda\mu, 1, \lambda)$,

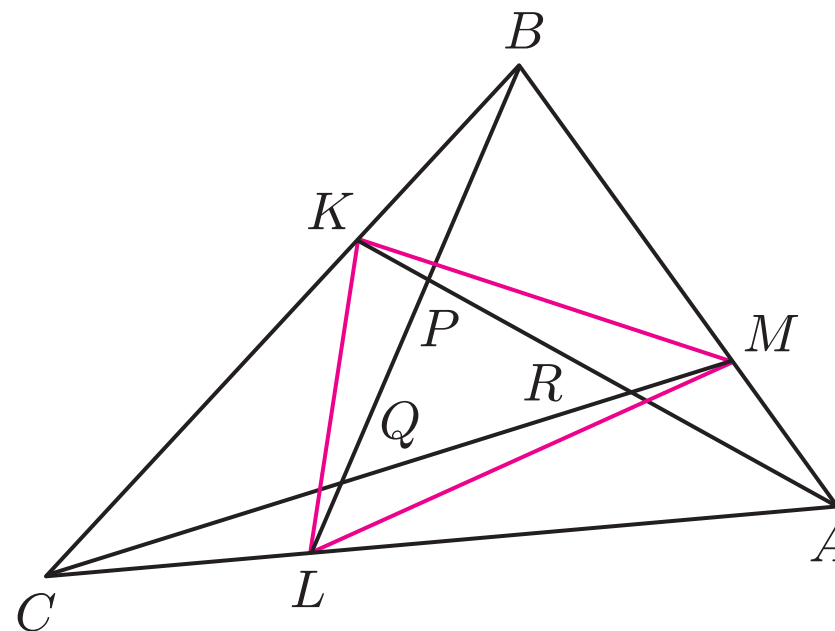
dla $Q = (\mu, \mu\nu, 1)$

i dla $R = (1, \nu, \nu\lambda)$.

Po zamianie na współrzędne arealne i podstawieniu do wzoru na pole otrzymujemy drugą część tezy.



Np. dla $\lambda = \mu = \nu = 2$
daje $\Delta_{KLM} = \frac{1}{3}\Delta_{ABC}$
i $\Delta_{PQR} = \frac{1}{7}\Delta_{ABC}$.



Np. dla $\lambda = \mu = \nu = 2$

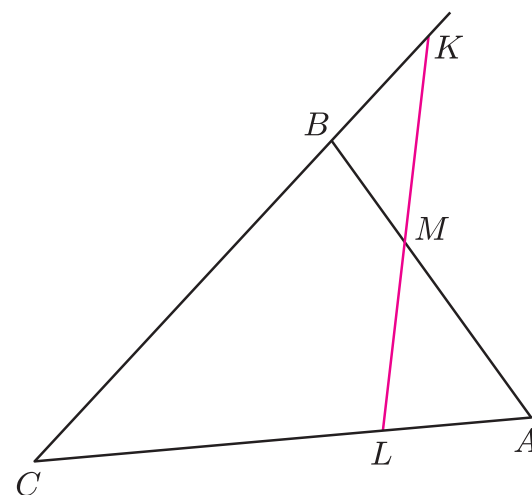
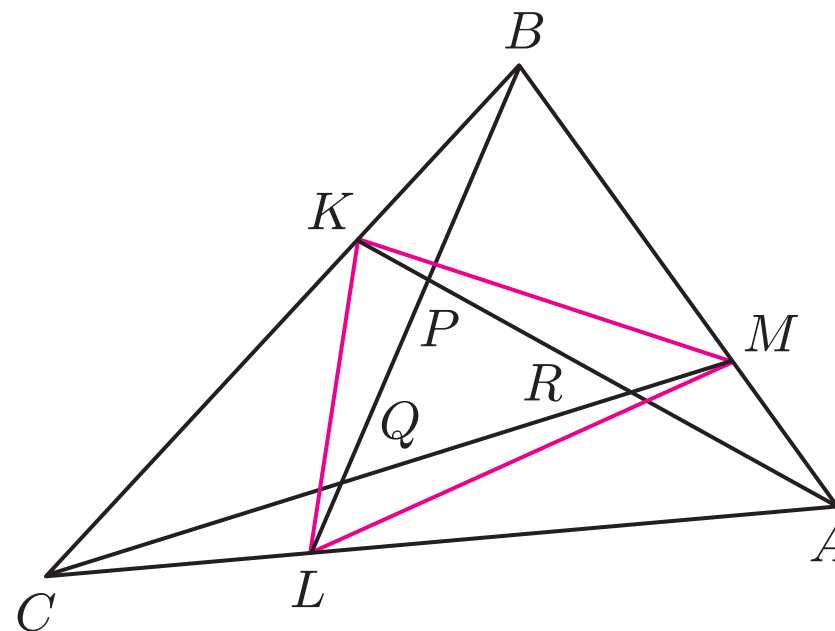
daje $\Delta_{KLM} = \frac{1}{3}\Delta_{ABC}$

i $\Delta_{PQR} = \frac{1}{7}\Delta_{ABC}$.

Z kolei:

gdy $\lambda\mu\nu = -1$, punkty KLM
leżą na jednej prostej

(**twierdzenie Menelaosa**),



Np. dla $\lambda = \mu = \nu = 2$

daje $\Delta_{KLM} = \frac{1}{3}\Delta_{ABC}$

i $\Delta_{PQR} = \frac{1}{7}\Delta_{ABC}$.

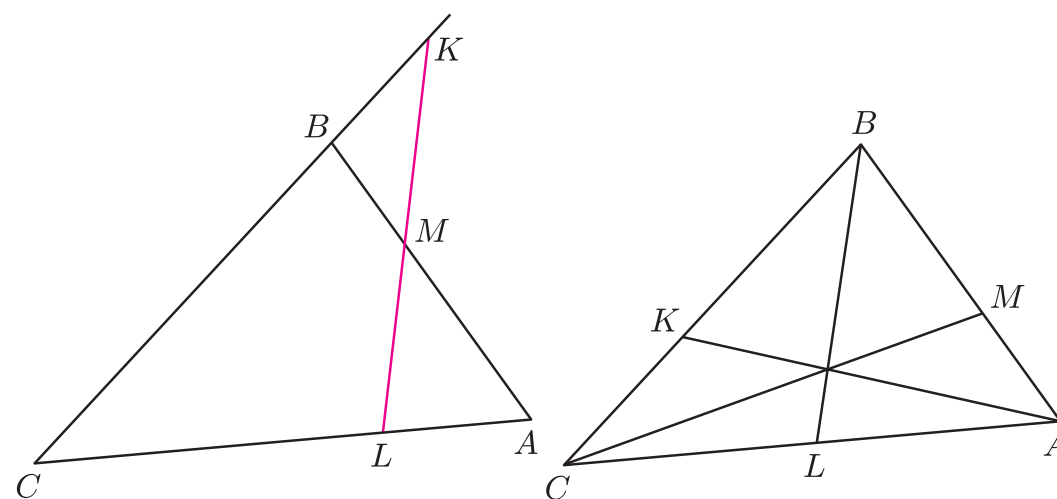
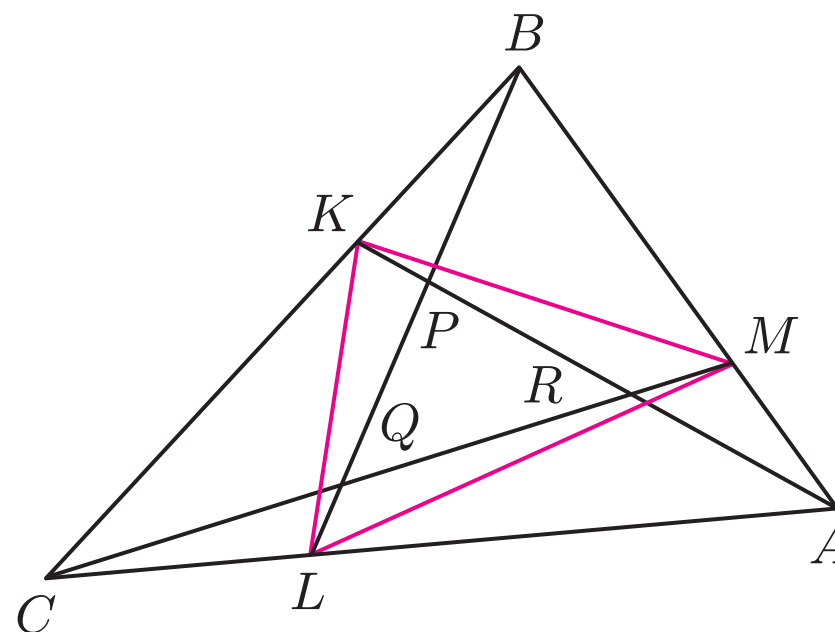
Z kolei:

*gdy $\lambda\mu\nu = -1$, punkty KLM
leżą na jednej prostej*

(**twierdzenie Menelaosa**),

*a gdy $\lambda\mu\nu = 1$ odcinki AK ,
 BL , CM przecinają się
w jednym punkcie*

(**twierdzenie Cevy**).



Gdy suma obciążeń jest równa zeru, układ nie ma środka ciężkości,
np.

●
1

●
-1

Gdy suma obciążeń jest równa zeru, układ nie ma środka ciężkości, np.



By temu zapobiec dodano każdej takiej parze środek ciężkości – dodatkowy punkt każdej prostej, zamykający ją jak okrąg, i umówiono się, że te wszystkie nowe punkty tworzą nową prostą.

Otrzymana geometria to **geometria rzutowa**, mająca wiele zaskakujących własności, ale naistotniejsza z nich to **dualność**:

*gdy w dowolnym twierdzeniu
zamienimy symbole prostych na symbole punktów i odwrotnie,
to uzyskane zdanie też będzie twierdzeniem.*

Jednorodność współrzędnych i funkcji,
dualność przestrzeni

i fakt, iż

przejście do zapewniających to współrzędnych barycentrycznych
nie zmienia stopnia równań

powoduje, że są one najważniejszym z narzędzi używanych
w geometrii algebraicznej.

Jednorodność współrzędnych i funkcji,
dualność przestrzeni

i fakt, iż

przejście do zapewniających to współrzędnych barycentrycznych
nie zmienia stopnia równań

powoduje, że są one najważniejszym z narzędzi używanych
w geometrii algebraicznej.

JESZCZE KILKA SŁÓW O ŚRODKACH CIĘŻKOŚCI FIGUR

Wielokąt ma trzy środki ciężkości:
jednakowo obciążonych wierzchołków,
równomiernie obciążonego brzegu,
równomiernie obciążonej powierzchni.

O ostatnich dwóch można mówić również dla dowolnych figur.

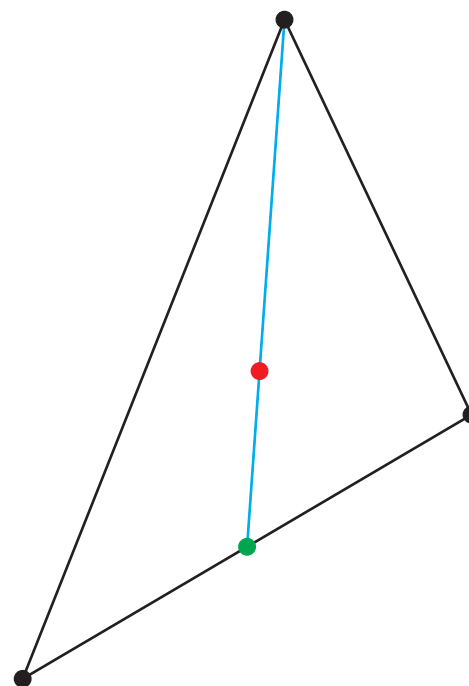
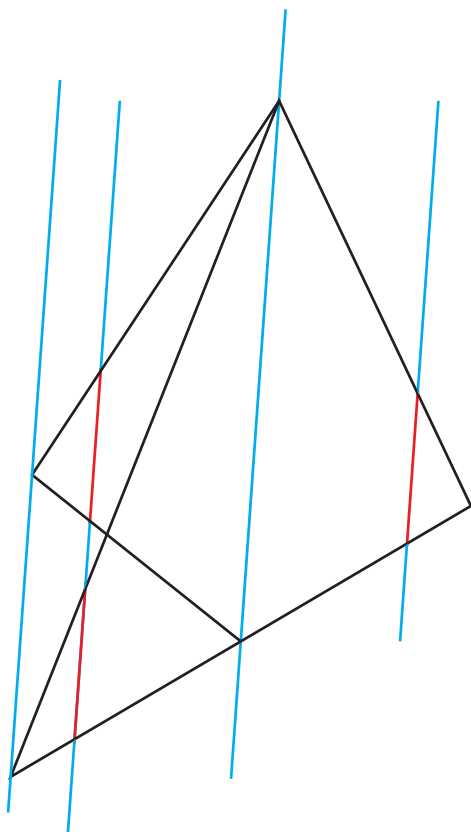
Wielokąt ma trzy środki ciężkości:
jednakowo obciążonych wierzchołków,
równomiernie obciążonego brzegu,
równomiernie obciążonej powierzchni.

O ostatnich dwóch można mówić również dla dowolnych figur.

W trójkącie pierwszy i trzeci środek ciężkości pokrywają się,
a drugi – dla trójkąta nierównobocznego – leży gdzie indziej.

Te pokrywające się to przecięcie środkowych
(udowodnił to już Archimedes),
a ten inny to środek okręgu wpisanego w trójkąt
utworzony przez środki boków wyjściowego trójkąta.

To, że środek ciężkości
wierzchołków
jest punktem
przecięcia środkowych,
jest oczywiste.

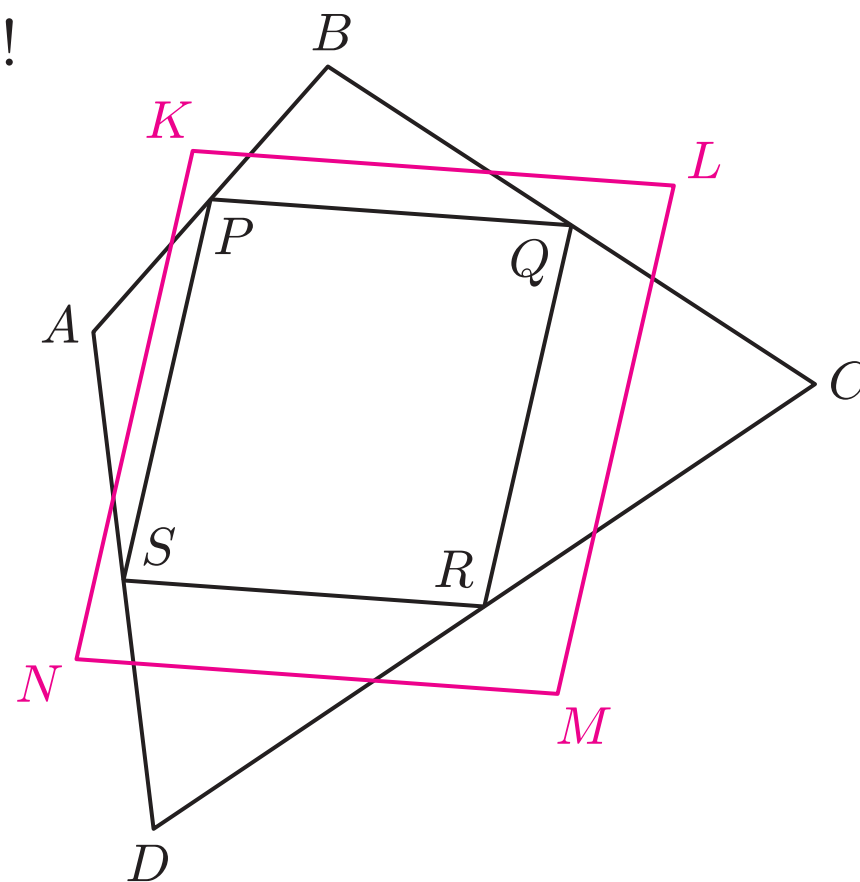


Dla wykazania, że
środek ciężkości
powierzchni trójkąta
leży w tym samym miejscu,
dogodnie jest użyć
nowego pojęcia:
prosta równowagi.

Gdy wielokąt ma własny obrót,
jego środki ciężkości pokrywają się.
Tak jest też dla dowolnych figur.

Jeśli nie ma – środki ciężkości wierzchołków i powierzchni
pokrywają się tylko dla trójkąta!

Przykład:
czworokąt $ABCD$
i jego czworokąty
Varignona $PQRS$
i Wittenbauera $KLMN$.



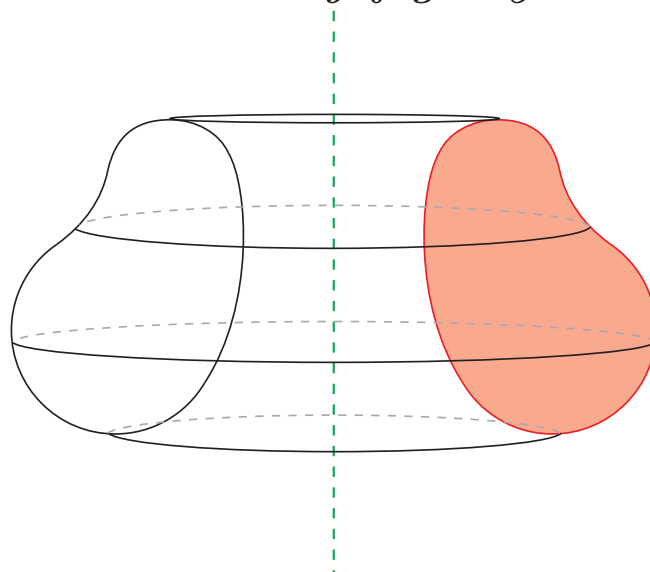
Pięknym twierdzeniem o środkach ciężkości w przestrzeni są

reguły Guldina:

Przy obracaniu figury płaskiej o obwodzie d i polu powierzchni P wokół osi leżącej w jej płaszczyźnie i nie przecinającej tej figury pole powierzchni S i objętość V powstałej bryły obrotowej to

$$S = 2\pi r_o \cdot d, \quad V = 2\pi r_p \cdot P,$$

gdzie r_o i r_p to odległość środka ciężkości, odpowiednio, obwodu i powierzchni obracanej figury od osi obrotu.



Pięknym twierdzeniem o środkach ciężkości w przestrzeni są

reguły Guldina:

Przy obracaniu figury płaskiej o obwodzie d i polu powierzchni P wokół osi leżącej w jej płaszczyźnie i nie przecinającej tej figury pole powierzchni S i objętość V powstałej bryły obrotowej to

$$S = 2\pi r_o \cdot d, \quad V = 2\pi r_p \cdot P,$$

gdzie r_o i r_p to odległość środka ciężkości, odpowiednio, obwodu i powierzchni obracanej figury od osi obrotu.

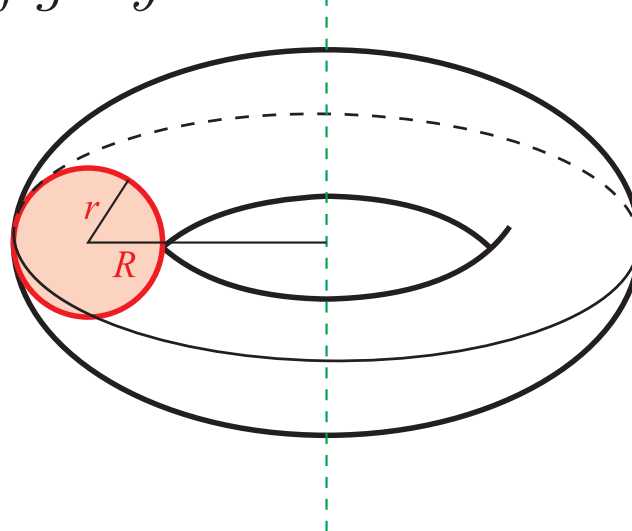
Przykład: torus ma

pole powierzchni

$$2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr$$

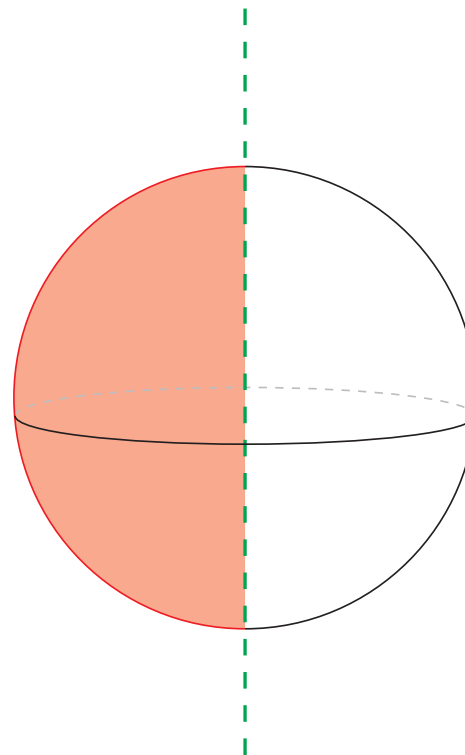
i objętość

$$2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$



Na zakończenie zagadka:

Czy środek ciężkości półokręgu leży bliżej odcinającej go średnicy, czy też środek ciężkości powstałego półkola?



Na zakończenie zagadka:

Czy środek ciężkości półokręgu leży bliżej odcinającej go średnicy, czy też środek ciężkości powstałego półkola?

Liczymy:

$$2\pi r_o \cdot \pi r = 4\pi r^2$$

$$\text{skąd } r_o = \frac{2r}{\pi};$$

$$2\pi r_p \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{skąd } r_p = \frac{4r}{3\pi} < \frac{2r}{\pi} = r_o.$$

