

Rozszerzenie dziedziny i klasy funkcji w równaniach różniczkowo – całkowych.

Aneta Sikorska - Nowak

Załącznik 2

Autoreferat

wraz z informacjami o osiągnięciach dydaktycznych,
popularyzatorskich oraz współpracy międzynarodowej
w języku polskim

Spis treści

1. Przebieg nauki i zatrudnienie.	3
2. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule naukowym w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65 poz. 595 ze zm.).	4
2.1 Równania różniczkowe typu $x^{(m)} = f(t, x)$ oraz funkcyjne równania różniczkowe z opóźnieniem.	8
2.2 Równania różniczkowo-całkowe.	13
2.3 Równania dynamiczne na skali czasowej.	14
3. Omówienie wyników niewchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej.	26
3.1 Zastosowanie całek nieabsolutnych do równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo-całkowych.	27
3.2 Równania dynamiczne na skali czasowej.	32
3.3 Teoria aproksymacji.	33
4. Wskaźniki dodatkowe.	34
5. Spis publikacji.	36
6. Prace cytowane w autoreferacie.	38

1. PRZEBIEG NAUKI I ZATRUDNIENIE

Studia wyższe	Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Kierunek	Wydział Matematyki i Informatyki matematyka
Tytuł pracy magisterskiej	„Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu”
Promotor	prof. dr hab. Ireneusz Kubiaczyk
Data otrzymania stopnia magistra	26.05.1996 r.
Studia doktoranckie	Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Tytuł rozprawy doktorskiej	Wydział Matematyki i Informatyki „Całka Henstocka - Kurzweila, jej uogólnienia oraz zastosowania do równań różniczkowych i całkowych”
Promotor	prof. dr hab. Ireneusz Kubiaczyk
Data otrzymania stopnia naukowego doktora	30.06.2000 r

Przebieg kariery zawodowej

Miejsce pracy	Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu Wydział Matematyki i Informatyki (od 1.07.2000 do chwili obecnej)
---------------	--

OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE, O KTÓRYM MOWA W ART. 16 UST. 2 USTAWY O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (DZ. U. NR 65, POZ. 595 ZE ZM.)

Rozszerzenie dziedziny i klasy funkcji w równaniach różniczkowo – całkowych.

Przedstawiony autoreferat składa się z dwóch zasadniczych części. W części pierwszej omawiam wyniki wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej, w tym dotyczące równań wyższych rzędów oraz równań różniczkowych z opóźnionym argumentem, nieliniowych równań różniczkowo-całkowych oraz równań dynamicznych na skali czasowej.

W części drugiej zawarte jest krótkie omówienie wyników, które nie wchodzi w skład rozprawy habilitacyjnej: zastosowanie całek nieabsolutnych do równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo-całkowych, równania dynamiczne na skali czasowej oraz wyniki z zakresu teorii aproksymacji.

W skład rozprawy habilitacyjnej wchodzi następujące prace (z zachowaniem numeracji z całej listy moich publikacji): (4), (7), (8), (15), (16), (21), (25), (29), (30).

W autoreferacie, prace pochodzące z listy moich publikacji oznaczać będę w nawiasach okrągłych np. (1), natomiast prace cytowane, w nawiasach kwadratowych np. [1].

Celem moich badań są równania różniczkowe, całkowe i różniczkowo – całkowe w przestrzeniach Banacha. Z jednej strony rozważane przeze mnie zagadnienia, dzięki zastosowaniu całek typu Henstocka–Kurzweila oraz Henstocka–Kurzweila–Pettisa, obejmują istotnie szersze klasy funkcji niż rozważane wcześniej, z drugiej rozpatrzenie odpowiednich zagadnień na skali czasowej powoduje rozszerzenie ich dziedziny.

Teoria Henstocka–Kurzweila umożliwia całkowanie wszystkich funkcji całkownych w sensie Lebesgue’a (odpowiednio Bochnera w przestrzeni Banacha) oraz funkcji całkownych w sposób niewłaściwy w sensie Riemanna, co jest główną zaletą tej całki.

W pracy [80] J. Kurzweil jako pierwszy zastosował tego typu całkę do badania istnienia rozwiązań klasycznego zagadnienia Cauchy’ego:

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Dzięki zastosowaniu własności tej całki, J. Kurzweil uzyskał szerszą niż dotychczas klasę rozwiązań, nazywanych *rozwiązaniami uogólnionymi*. Przez rozwiązanie rozumiał funkcje absolutnie ciągłe w uogólnionym sensie (funkcje typu ACG_* - patrz definicja 2.1).

Badania te były kontynuowane między innymi przez Bullena, Výborny’ego [32], Chewa [36], Chewa, Flordelizę [37], Henstocka [70] i innych [16, 33, 54, 56]. W ten nurt badań włączyłam się także ja, uzyskując wyniki dla istotnie szerszych klas funkcji przy istotnie słabszych założeniach.

Inspiracją do zainteresowania się przeze mnie całką Henstocka-Kurzweila był następujący fakt.

Niech funkcja $f: I \times R \rightarrow R$ będzie określona wzorem:

$$f(t, x(t)) = t^2 x(t) + h(t), \quad |t| < 1, \quad |x| < 1,$$

oraz

$$h(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}(t^2 \sin t^{-2}), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Rozważmy następujące zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem wyżej wymienionego problemu jest funkcja

$$x(t) = \begin{cases} e^{t^3/3} \int_0^t e^{-s^3/3} F'(s) ds, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

gdzie $F(t) = t^2 \sin t^{-2}$.

Zauważmy, że funkcja $F'(t)$ nie jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a. Stąd znaleziona funkcja $x(t)$ nie jest rozwiązaniem rozpatrywanego zagadnienia Cauchy'ego przy założeniu całkowalności funkcji f w sensie Lebesgue'a. Pojawia się więc konieczność rozszerzenia klasy całek.

W części swoich badań wykorzystuję uogólnioną postać całki Henstocka-Kurzweila z funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha w celu uzyskania twierdzeń egzystencjalnych, dotyczących nieliniowych równań całkowych, różniczkowo-całkowych i różniczkowych, w tym także równań rzędu m oraz równań z odchylnym argumentem.

Ze względu na fakt, iż całka Henstocka-Kurzweila jest uogólnieniem wcześniej znanych całek, np. całki Bochnera, wyniki przedstawiane przeze mnie, uzyskane zostały dla szerszej klasy funkcji niż dotychczas znane.

Rozpatrzmy teraz następujący przykład (omówiony w pracy (6)).

Niech E oznacza przestrzeń Banacha, E^* - przestrzeń dualną do przestrzeni Banacha.

Niech $f: [0,1] \rightarrow (L^\infty[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ oraz $f(t) = \chi_{[0,t]} + A(t) \cdot F'(t)$, gdzie $F(t) = t^2 \sin t^{-2}$, $t \in (0,1]$,

$$F(0) = 0, \chi_{[0,t]}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0, t] \\ 0, & \tau \notin [0, t] \end{cases}, \quad t, \tau \in [0,1] \text{ oraz } A(t)(\tau) = 1 \text{ dla } t, \tau \in [0,1].$$

Przyjmijmy $f_1(t) = \chi_{[0,t]}$, $f_2(t) = A(t)F'(t)$.

Zauważmy, że

$$x^*(f(t)) = x^*(f_1(t) + f_2(t)) = x^*(f_1(t)) + x^*(f_2(t)).$$

Ponieważ funkcja $x^*(f_1(t))$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, więc funkcja f_1 jest całkowalna w sensie Pettisa. Funkcja $x^*(f_2(t))$ jest natomiast całkowalna w sensie Henstocka-Kurzweila. Ponieważ dla żadnego $x^* \in E^*$, funkcja x^*f nie jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, więc funkcja f nie jest całkowalna w sensie Pettisa. Ponadto, funkcja f_1 nie jest silnie mierzalną funkcją, a f_2 jest silnie mierzalna. Zatem funkcja $f = f_1 + f_2$ nie jest silnie mierzalna i na mocy twierdzenia 9 [33] nie jest całkowalna w sensie Henstocka-Kurzweila.

Istnieje więc konieczność rozszerzenia klasy funkcji całkowalnych w sensie Henstocka-Kurzweila oraz w sensie Pettisa i wprowadzenia całki obejmującej oba rodzaje całek.

Definicja i podstawowe własności nowej całki, Henstocka-Kurzweila-Pettisa, zostały podane w pracy (6).

Z samej definicji całki Henstocka-Kurzweila-Pettisa wynika, że są to całki najbardziej ogólne z rozpatrywanych dotychczas, a powyższy przykład uzasadnia, że jest to istotne rozszerzenie klasy funkcji całkowalnych w porównaniu z uprzednio badanymi. Poniżej przedstawiam diagram zależności między całkami:

$$\begin{array}{c} (B) \Rightarrow (HL) \Rightarrow (HK) \Rightarrow (HKP) \Leftarrow (P) \\ \Downarrow \\ (D) \end{array}$$

gdzie (B) oznacza całkę Bochnera, (HL) - silną całkę Henstocka-Kurzweila, (HK) - słabą całkę Henstocka-Kurzweila, (D) - całkę Denjoy, (P) - całkę Pettisa, (HKP) - całkę Henstocka-Kurzweila-Pettisa.

Nowo zdefiniowane całki są intensywnie badane i rozwijane w wielu ośrodkach naukowych na świecie. Całki te znalazły zastosowanie w równaniach różniczkowych [33-35, 64, 67-69, 76], całkowych i różniczkowo-całkowych [1-2, 13, 66, 90-95, 100, 111], jak również w równaniach dynamicznych na skali czasowej [42-43]. Zdefiniowano całkę Henstocka-Kurzweila-Pettisa na ogólniejszych przestrzeniach, a nie tylko na przedziale [25-27]. Prowadzone są badania nad ich zbieżnościami oraz przestrzeniami funkcji całkowalnych w tym właśnie sensie [41, 65, 67, 94-97]. Zdefiniowano także całki typu Henstocka-Kurzweila-Pettisa z multifunkcji [52-53, 94].

Z drugiej strony mają one bardzo szerokie zastosowania w teorii kwantowej oraz analizie nieliniowej. W pracach (np. [116, 117, 119]) autorzy wykorzystują te całki oraz wyniki uzyskane przeze mnie, w rozważaniach dotyczących układów hybrydowych. Są to układy dynamiczne, które wykazują zarówno ciągłe (opisane równaniami różniczkowymi) jak i dyskretne (opisane równaniami różnicowymi) własności dynamiczne. Klasycznym przykładem układu hybrydowego jest odbijająca się piłka, czyli układ fizyczny z „uderzeniem”. Piłka, rozumiana jako punkt masy, upuszczana jest z początkowej wysokości i odbija się od podłoża, rozpraszając energię przy każdym odbiciu. Odbijająca się piłka stanowi szczególnie interesujący układ hybrydowy, gdyż wykazuje zachowanie Zenona. Jest to układ wykonujący nieskończoną ilość skoków w skończonym czasie. W przytoczonym przykładzie za każdym razem gdy piłka odbija się traci energię, przez co kolejne odbicia mają miejsce po coraz krótszym czasie. W celu rozważenia najbardziej ogólnej klasy systemów hybrydowych autorzy wykorzystali najogólniejszą ze znanych całek, całkę Henstocka-Kurzweila-Pettisa [116, 117, 119].

Wśród narzędzi dowodowych, które wykorzystuję wymienić należy najnowsze wyniki z teorii punktu stałego oraz silnych miar niezwartości. Jak wiadomo, w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych jest bardzo dużo odwzorowań ciągłych. J. P. Schauder pokazał, że jeżeli ograniczyć się do odwzorowań zwartych, to istnieje punkt stały. Zwartość jest jednak zbyt silnym założeniem. Dlatego

K. Kuratowski wprowadził miary niewartości, aby badać odwzorowania nierozszerzające, które nie są odwzorowaniami zwartymi, a zachodzi dla nich twierdzenie o punkcie stałym.

Przykłady bardzo wielu funkcji, które spełniają założenia zwartościowe umieszczone w tym autoreferacie i publikacjach, można zbudować wg następującej idei: bierzemy dowolny operator niezwarty na przestrzeni Banacha, domykamy obraz kuli jednostkowej i składamy np. z odwzorowaniem, które przekształca dowolny ograniczony i wypukły zbiór w dowolnej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha na ten sam zbiór. Będzie to co więcej odwzorowanie Lipschitza. Następnie mnożymy tę funkcję przez funkcję ciągłą dwóch zmiennych i ponownie składamy z odwzorowaniem, które będzie przeprowadzało kulę jednostkową w kulę jednostkową i będzie odwzorowaniem Lipschitza. Jeśli w środek wstawimy operator zwarty, to otrzymamy odwzorowanie, które będzie przeprowadzało kulę jednostkową w zbiór zwarty i będzie odwzorowaniem Lipschitza. W ten sposób wyprodukujemy całą klasę zwartych nieliniowych operatorów spełniających założenia przedstawionych twierdzeń.

Część wyników uzyskałam na skalach czasowych, czyli na szeroko rozumianych modelach czasu. Skala czasowa T to dowolny niepusty podzbiór domknięty zbioru liczb rzeczywistych. Pojęcie to zostało wprowadzone przez S. Hilgera [71] w 1988 r. i od samego początku spotkało się z ogromnym zainteresowaniem naukowców z różnych dyscyplin naukowych, w tym z matematyki czystej i stosowanej, a także biologii, ekonomii, inżynierii i fizyki. Ma zastosowanie w każdej dziedzinie, która wymaga jednoczesnego modelowania dyskretnych i ciągłych danych.

Standardowe modele ekonomiczne to modele ciągłe (opisane równaniami różniczkowymi) i dyskretnie (opisane równaniami różnicowymi). Te dwa rodzaje modeli wymagają różnych technik dowodzenia. Przykładem może być model Ramseya - makroekonomiczny model wzrostu, który bada zależność między konsumpcją a kapitałem. W modelu dyskretnym, konsument otrzymuje jakiś dochód (np. raz na miesiąc) i decyduje ile wydaje i oszczędza w danym okresie (np. miesiąca). Zakłada się, że wszystkie decyzje są dokonywane w równych odstępach czasu. Model dyskretny ma postać:

$$\sum_{t=0}^{T-1} (1+p)^{-t} U(C_t) \rightarrow \max, \quad C_t = W_t - \frac{W_{t+1}}{1+r},$$

gdzie C_t - konsumpcja, p - stopa dyskontowa, r - stopa procentowa, W_t - funkcja produkcji, U_t - chwilowa funkcja produkcji.

Odpowiadający model ciągły możemy zapisać w postaci:

$$\int_0^T e^{-pt} U(C(t)) dt \rightarrow \max, \quad C(t) = rW(t) - W'(t).$$

Bywają jednak takie sytuacje ekonomiczne, których te modele nie obejmują. Na przykład, jeżeli dochody nie są regularne (konsument otrzymuje dochód czasami raz w miesiącu, czasami raz na kwartał lub na tydzień). Wprowadzenie skali czasowej T umożliwia opisanie tych trzech sytuacji jednym modelem [17].

Przykładami skali czasowej są:

$$\begin{array}{ll}
 T = R & \text{-----} \\
 T = Z & \text{.} \\
 T = hZ & \text{.....} \\
 T = P_{a,b} & \text{---} \\
 T & \text{---}
 \end{array}$$

Skala czasowa została wprowadzona w celu ujednolicenia badań nad równaniami różniczkowymi (opisującymi modele ciągłe) i różnicowymi (opisującymi modele dyskretne). Największą zaletą wprowadzenia skali czasowej jest możliwość rozpatrywania kombinacji ciągłych i dyskretnych modeli matematycznych. Dlatego pojęcie skali czasowej może być uważane za most łączący analizę ciągłą i dyskretną. Okazało się, że jedne wyniki dotyczące równań różnicowych przenoszą się dość łatwo na odpowiednie wyniki dla równań różniczkowych, inne natomiast, dotyczące równań różnicowych, wydają się być całkowicie odmienne dla ich ciągłych odpowiedników.

Rozważmy np. równanie różniczkowe: $y'' + y(x) = 0$. Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Każde z rozwiązań szczególnych jest ciągłą funkcją okresową, a więc jest ograniczone.

Formalny odpowiednik dyskretny tego równania ma postać: $\Delta^2 y_n + y_n = 0$. Jego rozwiązaniem ogólnym jest klasa ciągów $y_n = c_1 2^{n/2} \cos\left(\frac{n\pi}{4} + c_2\right)$.

Przyjmując $c_1 = -1$ i $c_2 = \pi$ otrzymujemy rozwiązanie szczególne $y_n = 2^{n/2} \cos(n\pi/4)$.

Dla $n = 8k + 1$ otrzymujemy $y_{8k+1} = 2^{4k} \rightarrow \infty$, gdy $k \rightarrow \infty$. Rozwiązanie to nie jest ani okresowe, ani ograniczone.

W badaniach nad równaniami dynamicznymi na skali czasowej ujawnia się takie rozbieżności i pozwala uniknąć dowodzenia pewnych wyników dwa razy: raz dla równań różnicowych i osobno dla różniczkowych. Ogólną ideą jest udowodnienie wyników dla równania dynamicznego, gdzie dziedziną nieznannej funkcji jest tzw. skala czasowa T .

Równania dynamiczne na skali czasowej znajdują zastosowania w wielu dziedzinach nauki takich jak: mechanika, elektrotechnika, sieci neuronowe, ciepło i kombinatoryka [45, 73]. Obliczenia na skalach czasowych stosuje się w teorii sterowania i ekonomii [17].

1.1. Równania różniczkowe typu $x^{(m)} = f(t, x)$ oraz funkcyjne równania różniczkowe z opóźnieniem.

W pracy [38] T.S. Chew, W. van Brunt oraz G. C. Wake zastosowali rzeczywistą całkę typu Henstocka-Kurzweila do rozwiązania zagadnienia typu:

$$(2.1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x_t) \\ x_t(\theta) = x(t + \theta), \\ x(\theta) = \varphi(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [-r, 0]$$

dla skończonej, dodatniej wartości r oraz funkcji φ całkowalnej w sensie Henstocka-Kurzweila na przedziale $[-r, 0]$.

W teorii równań różniczkowych z odchylnym argumentem przez długi czas zakładano, że funkcje φ i f muszą być ciągłe, zatem całkowalne w sensie Riemanna. W pracy [64] Hale zauważył, że wynik pozostaje prawdziwy przy założeniu, że funkcja f spełnia warunki Carathéodory'ego.

M. C. DeFlour oraz S. K. Mitter w [48] uogólniają otrzymane wcześniej wyniki zastępując założenia ciągłości funkcji φ i f całkowalnością w sensie Lebesgue'a. Dalsze uogólnienia znajdziemy w pracy [39], gdzie w 1999 r. T.L. Toh oraz T.S. Chew udowodnili twierdzenie o istnieniu rozwiązania zagadnienia (2.1) dla funkcji z odchyleniem nieograniczonym.

W pracy (4) udowadniam istnienie rozwiązania zagadnienia (2.1) w przestrzeniach Banacha. Zastosowanie przeze mnie uogólnionej całki typu Henstocka-Kurzweila pozwala rozpatrywać zagadnienie (2.1) dla istotnie szerszej klasy funkcji niż robiono to dotychczas. Moje wyniki obejmują między innymi funkcje wysoko oscylujące (patrz przykład str. 5). Oscylacja to cykliczna zmiana pewnej wielkości, względem innej zmiennej, zwykle czasowej lub przestrzennej. W fizyce na przykład, oscylacje oznaczają drgania. Typowym przykładem oscylacji jest zachowanie wahadła po wytrąceniu go z położenia równowagi. Oscylacje występują oczywiście nie tylko w modelowych układach fizycznych, ale także w układach biologicznych, czy zjawiskach społecznych.

Wprowadźmy oznaczenia obowiązujące w całym rozdziale.

Niech $I_a = [0, a]$ oznacza zwarty przedział na $\mathbb{R}$, E przestrzeń Banacha, E_1 ośrodkową przestrzeń Banacha, E^* przestrzeń dualną do przestrzeni Banacha oraz $(C(I_a, E), \omega)$ przestrzeń funkcji ciągłych z przedziału I_a do przestrzeni Banacha E ze słabą topologią jednostajnej zbieżności $\sigma(C(I_a, E), C(I_a, E)^*)$. Przez $H[a, b]$ oznaczmy przestrzeń klas równoważności funkcji, które są całkowalne w sensie silnej całki Henstocka-Kurzweila (HL) na przedziale $[a, b]$.

Dla $P \in H[a, b]$ zdefiniujemy normę $\|\cdot\|_H$: $\|P\|_H = \sup_{t \in [a, b]} \|\Phi(t)\|$, gdzie $\Phi(t) = \int_a^t \psi(s) ds$ dla każdego $\psi \in P$. Niech φ będzie pewną ustaloną funkcją o wartościach w przestrzeni $H[-r, 0]$, $r > 0$. Zdefiniujemy zbiory:

$$\Omega_b = \{x \in H[-r, 0] : \|x - \varphi\|_H \leq b\}, \quad R_{cb} = I_c \times \Omega_b, \quad c, b > 0.$$

Założmy, że x jest pewną funkcją zdefiniowaną na przedziale $[-r, a]$, $r, a > 0$. Dla dowolnego $t \in I_a$ zdefiniujemy funkcję x_t : $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r < \theta < 0$.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą $\hat{x}$:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, d], \\ \varphi(t), & t \in [-r, 0], \end{cases}$$

dla funkcji x spełniającej warunek $x(0) = \varphi(0)$.

Niech zbiór $\tilde{B} = \{x \in C(I_a, E) : x(0) = \varphi(0), \|x\| \leq b + \|\varphi(0)\|, \hat{x}_t \in \Omega_b\}$.

Definicja 2.1. Rodzinę $\mathcal{F}$ funkcji F nazywamy *jednostajnie absolutnie ciągłą* na zbiorze A (krótko: *jednostajnie* $AC_*(A)$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta > 0$ taka, że dla każdej funkcji F z rodziny $\mathcal{F}$ oraz dla każdego ciągu rozłącznych przedziałów $\{[a_i, b_i]\}$ takich, że $a_i, b_i \in A$ oraz $\sum_i |b_i - a_i| < \eta$, mamy $\sum_i \omega(F, [a_i, b_i]) < \varepsilon$, gdzie ω oznacza oscylację funkcji F na $[a_i, b_i]$.

Rodzinę $\mathcal{F}$ funkcji F nazywamy *jednostajnie absolutnie ciągłą* na przedziale $[a, b]$ w uogólnionym sensie (krótko: *jednostajnie* $ACG_*([a, b])$), jeżeli przedział $[a, b]$ jest sumą ciągu domkniętych podzbiorów A_i takich, że na każdym zbiorze A_i funkcja F jest jednostajnie $AC_*(A_i)$.

Głównym wynikiem pracy (4) jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 (4). Niech φ będzie pewną ustaloną funkcją całkowalną w sensie HL i określoną na przedziale $[-r, 0]$. Załóżmy, że dla każdej ciągłej funkcji $x: I_a \rightarrow E$ funkcja $f(t, x_t)$ jest funkcją Carathéodory’ego, całkowalną w sensie HL, zdefiniowaną na R_{ab} dla $a, b > 0$ oraz

$$\alpha(f(t, X)) \leq h(t, \alpha(X))$$

dla każdego ograniczonego zbioru $X \subset E$, gdzie h jest funkcją Kamkego oraz α oznacza miarę niezwartości Hausdorffa. Niech ponadto zbiór $F = \{F(x): x \in \tilde{B}\}$, gdzie

$$F(x)(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, \hat{x}_s) ds, \quad t \in I_a,$$

będzie zbiorem jednakowo ciągłym i jednostajnie ACG_* na przedziale I_a . Wtedy istnieje co najmniej jedno rozwiązanie problemu (2.1) na przedziale I_a , dla pewnego $0 < d \leq a$, z funkcją początkową φ .

Bardzo istotnym narzędziem dowodowym powyższego twierdzenia, oprócz własności całki Henstocka-Kurzweila, własności silnych miar niezwartości oraz twierdzenia Möncha o punkcie stałym, jest udowodniony przeze mnie w pracy (4) następujący lemat, który podaje warunki wystarczające do „wejścia” z miarą niezwartości Hausdorffa pod znak całki Henstocka-Kurzweila.

Lemat 2.3 (4). Załóżmy, że V jest przeliczalnym zbiorem funkcji całkowalnych w sensie HL. Niech $F = \left\{ \int_0^t x(s) ds, x \in V, t \in I_a \right\}$ będzie zbiorem jednakowo ciągłym, wspólnie ograniczonym oraz jednostajnie ACG_* na I_a . Wtedy

$$\alpha\left(\int_0^t V(s) ds\right) \leq \int_0^t \alpha(V(s)) ds, \quad t \in I_a,$$

jeżeli tylko $\alpha(V(s)) \leq \varphi(s)$ dla prawie wszystkich $s \in I_a$, gdzie φ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue’a oraz α oznacza miarę niezwartości Hausdorffa.

Lemat ten okazał się bardzo przydatny w dalszych badaniach. Został wykorzystany w wielu pracach przez innych matematyków. Ze względu na wciąż rozwijającą się tematykę, związaną z równaniami różniczkowymi z odchylnym argumentem, wyżej omówione przeze mnie wyniki są modyfikowane i wykorzystywane w dalszych badaniach. Zostały wykorzystane w dwóch monografiach [34, 90] oraz wielu publikacjach (np. [1, 50, 65-69, 91-95]). Omawiana praca jest cytowana wg bazy MathSciNet 9 razy, wg Google Scholar 29 razy.

W dalszej części tego rozdziału omówię wyniki uzyskane w pracy (8), dotyczące zagadnienia Cauchy’ego rzędu $m \in \mathbb{N}$ postaci:

$$(2.2) \quad \begin{cases} x^{(m)}(t) = f(t, x(t)), & t \in I_a, a \in R_+ \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = \eta_1, \dots, x^{(m-1)}(0) = \eta_{m-1}, & \eta_1, \dots, \eta_{m-1} \in E \text{ (lub } E_1) \end{cases}$$

Dowody poniższych twierdzeń opierają się głównie na Lemacie 2.3 oraz własnościach całki HL. Dzięki zastosowaniu Lematu 2.3 dowody głównych twierdzeń tej pracy są analogiczne do dowodów twierdzeń, w których funkcja jest całkowalna w sensie Bochnera. Ze względu na metody dowodowe i wykorzystanie różnych warunków zwartościowych, wyniki sformułowałam w postaci dwóch twierdzeń. Pierwsze z nich zostało udowodnione w ośrodkowej przestrzeni Banacha E_1 , drugie w dowolnej przestrzeni Banacha E .

Niech $B = \{x: \|x\| \leq b, b = \sum_{j=1}^{m-1} \|\eta_j\| \frac{a^j}{j!} + M, M > 0, d \leq a\}$, $\tilde{B} = \{x \in C(I_a, E): x \in B\}$,

$$F(x)(t) = p(t) + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t (t-s)^{m-1} f(s, x(s)) ds, \text{ gdzie } p(t) = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j \frac{t^j}{j!}, & m > 1. \end{cases}$$

Twierdzenie 2.4 (8). Niech $h: R_+ \rightarrow R_+$ będzie ciągłą, niemalejącą funkcją spełniającą warunki $h(0) = 0$ oraz $\int_{0+} \frac{dr}{m \sqrt[r^{m-1}]{h(r)}} = \infty$. Niech ponadto dla każdej ciągłej funkcji $x: I \rightarrow E_1$, funkcja $f(\cdot, x(\cdot))$ będzie całkowalna w sensie HL oraz $\alpha(f(t, X)) \leq h(\alpha(X))$, $t \in I_a$, $X \subset B$.

Założmy, że f jest funkcją Carathéodory'ego oraz zbiór $H = \{F(x): x \in \tilde{B}\}$ jest jednakowo ciągły, wspólnie ograniczony oraz jednostajnie ACG_{*} na I_a . Wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie zagadnienia (2.2) na przedziale I_a , dla pewnego d takiego, że $0 < d \leq a$.

Twierdzenie 2.5 (8). Niech dla każdej ciągłej funkcji $x: I_a \rightarrow E$, funkcja $f(\cdot, x(\cdot))$ będzie całkowalna w sensie HL oraz $\alpha(f(I, X)) \leq c \cdot \alpha(X)$ dla każdego ograniczonego zbioru $X \subset E$, każdego podprzedziału $I \subset I_a$ oraz stałej c takiej, że $0 \leq \frac{ca(a-s)^{m-1}}{(m-1)!} < 1$, $s \in I$. Założmy, że f jest funkcją Carathéodory'ego oraz zbiór $F = \{F(x): x \in \tilde{B}\}$ jest jednakowo ciągły, wspólnie ograniczony oraz jednostajnie ACG_{*} na I_a . Wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie zagadnienia (2.2) na przedziale I_a , dla pewnej wartości d takiej, że $0 < d \leq a$.

Badania prowadzone przeze mnie dotyczą także słabych rozwiązań różnych typów równań. Zauważmy, że jeśli funkcja $f: I_a \times E \rightarrow E$ spełnia w topologii słabej warunki Carathéodory'ego, to na ogół nie można znaleźć ani rozwiązań Carathéodory'ego, ani słabych rozwiązań, za to można badać istnienie pseudo-rozwiązań, tzn. funkcji absolutnie ciągłych spełniających warunek początkowy i takich, że ich złożenia z ciągłymi i liniowymi funkcjami na przestrzeni Banacha E są prawie wszędzie różniczkowalne i spełniają warunek: $(x^*x)'(t) = x^*(f(t, x(t)))$.

W pracy (7), wspólnie z I. Kubiaczykiem udało nam się w istotny sposób rozszerzyć wyniki uzyskane wcześniej przez Cramera, Lakshmikanthama i Mitchella [46], Cichonia [40], Cichonia i Kubiaczka [44], Szufłę [103], Szufłę i Szukałę [106], Szukałę [107], uzyskując twierdzenie mówiące o istnieniu pseudo-rozwiązania zagadnienia (2.2) i co więcej, mówiące o własnościach zbioru pseudo-rozwiązań omawianego zagadnienia.

Założenia nakładane na prawą stronę równania są istotnie słabsze niż dotychczas znane. Zakładamy słabą-słabą ciągową ciągłość funkcji f zamiast ciągłości, słabą całkowalność funkcji w sensie Pettisa. Przyjmujemy także słabszy warunek na zmniejszanie miary niezwartości. Ponieważ istnieją funkcje słabo-słabo ciągowo ciągłe, które nie są ciągłe, ani słabo ciągłe [20], uzasadnionym jest rozpatrywanie odwzorowań słabo-słabo ciągowo ciągłych.

Zanim podam definicję pseudo-rozwiązania rozważanego zagadnienia, przypomnę definicję odwzorowania słabo-słabo ciągowo ciągłego.

Definicja 2.6. Funkcję $g: E \rightarrow \tilde{E}$, nazywamy słabo-słabo ciągowo ciągłą, jeżeli dla każdego ciągu x_n słabo zbieżnego do x_0 w przestrzeni Banacha E , ciąg $g(x_n)$ jest słabo zbieżny w przestrzeni Banacha $\tilde{E}$.

Definicja 2.7. Funkcję $x: I_a \rightarrow E$ nazywamy pseudo – rozwiązaniem zagadnienia (2.2), jeżeli spełnia poniższe warunki:

- (i) x jest silnie absolutnie ciągłą funkcją, $(m-1)$ -razy słabo różniczkowalną,
- (ii) $\forall x^* \in E^* \exists \begin{matrix} A(x^*) \\ \text{mes } A(x^*)=0 \\ A(x^*) \subset I_a \end{matrix} x^* x: I_a \rightarrow E$ jest m razy różniczkowalna,
- (iii) $(x^* x^{(m-1)})'(t) = x^* f(t, x(t))$ dla każdego $t \notin A(x^*)$ oraz spełnione są warunki $x(0) = 0, x'(0) = \eta_1, \dots, x^{(m-1)}(0) = \eta_{m-1}$.

Niech $B = \{x \in E: \|x\| < b, b > 0\}$,

$$F(x)(t) = p(t) + (R) \int_0^t (R) \int_0^{t_1} \dots (R) \int_0^{t_{m-2}} (P) \int_0^{t_{m-1}} f(t_m, x(t_m)) dt_m \dots dt_2 dt_1,$$

gdzie symbole $(R) \int_0^t f(s) ds$, $(P) \int_0^t f(s) ds$ oznaczają odpowiednio słabą całkę Riemanna oraz całkę Pettisa. Ponadto

$$p(t) = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j \frac{t^j}{j!}, & m > 1. \end{cases}$$

Wyberzmy dodatnią wartość $d \leq a$ taką, że

$$\sum_{j=1}^{m-1} \|\eta_j\| \frac{d^j}{j!} + M \frac{d^m}{m!} < b, \quad d^m < 1, \quad m > 1,$$

gdzie $M = \sup\{\|f(t, x)\|: t \in I_a, x \in B\}$. Niech β oznacza słabą miarę niezwartości.

Główny wynik pracy (7) stanowi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.8 (7). Załóżmy, że dla każdej silnie absolutnie ciągłej funkcji $x: I_a \rightarrow E$ funkcja $f(\cdot, x(\cdot))$ jest całkowalna w sensie Pettisa, $f(t, \cdot)$ jest słabo-słabo ciągowo ciągła oraz spełnia warunek

$$\beta(f(I_a \times X)) \leq h(\beta(X)) \quad \text{dla każdego } X \subset B,$$

gdzie h jest funkcją taką, że $h(u) < u$ dla $u \in \mathbb{R}_+$. Wtedy istnieje pseudo-rozwiązanie zagadnienia (2.2) na przedziale $I_a \subset I_a$. Zbiór S wszystkich pseudo-rozwiązań zagadnienia (2.2) na przedziale $I_a \subset I_a$ jest zwarty i spójny w przestrzeni $(C(I_a, E), \omega)$.

2.2. Równania różniczkowo-całkowe.

Niech

$$B = \{x \in E: \|x\| \leq \|x_0\| + b, b > 0\}, \quad \tilde{B} = \{x \in (C(I_a, E), \omega): x(0) = x_0, \|x\| \leq \|x_0\| + b, b > 0\}$$

W pracy (15) wspólnej z R. Agarwalem i D. O'Reganem udowodniliśmy twierdzenie egzystencjalne dla ogólnego zagadnienia różniczkowo-całkowego postaci:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s))ds\right), \quad t \in I_a, \quad a \in R_+, \quad x_0 \in E, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

gdzie f, k, x są funkcjami o wartościach w przestrzeni Banacha E oraz całka jest całką Henstocka-Kurzweila-Pettisa.

Wyniki przedstawione w tej pracy pochłaniają wcześniejsze wyniki zawarte m.in. w pracach: [8, 10-12, 36, 40, 44, 46, 86, 87, 114, 115] dotyczące zagadnień różniczkowych i całkowych.

Poniżej podaję definicję całki Henstocka-Kurzweila-Pettisa (HKP) wprowadzoną w pracy (6), którą będę wykorzystywać w dalszej części autoreferatu.

Definicja 2.9. (6) *Funkcja $f: I_a \rightarrow E$ jest całkowalna w sensie Henstocka-Kurzweila-Pettisa (HKP całkowalna), jeśli istnieje funkcja $g: I_a \rightarrow E$ taka, że:*

- (i) $\forall x^* \in E^* \quad x^* f$ jest całkowalna w sensie Henstocka-Kurzweila na I_a oraz
- (ii) $\forall t \in I_a \quad \forall x^* \in E^* \quad x^*(g(t)) = (HK) \int_0^t x^*(f(s))ds.$

Funkcja g jest nazywana całką Henstocka-Kurzweila-Pettisa z funkcji f na przedziale I_a .

Rozważmy problem istnienia rozwiązania zagadnienia (2.3) w przestrzeni $(C(I_a, E), \omega)$ funkcji ciągłych ze słabą topologią jednostajnej zbieżności. Dzięki zastosowaniu własności całki Henstocka-Kurzweila-Pettisa do rozpatrywanego zagadnienia, uzyskaliśmy pierwszy wynik mówiący o istnieniu pseudo-rozwiązania zagadnienia (2.3) dla najszerszej rozpatrywanej do tej pory klasy funkcji. Pokazaliśmy ponadto, że zbiór wszystkich pseudo-rozwiązań zagadnienia (2.3) jest zwarty i spójny w przestrzeni $(C(I_a, E), \omega)$, dla $0 < d \leq a$.

Niech

$$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(z, x(z), \int_0^z k(z, s, x(s))ds)dz, \quad t \in I_a,$$

$$K = \{F(x): x \in \tilde{B}\}, \quad K_1 = \left\{ \int_0^z k(z, s, x(s))ds: z \in [0, t], t \in [0, a], x \in \tilde{B} \right\}.$$

Definicja 2.10. *Niech $F: [a, b] \rightarrow E$ oraz $A \subset [a, b]$. Funkcję $f: A \rightarrow E$ nazywamy pseudo – pochodną funkcji F , jeżeli dla każdego funkcjonału $x^* \in E^*$ rzeczywista funkcja $x^* F$ jest różniczkowalna prawie wszędzie na A .*

Definicja 2.11. *Funkcję $x: I_a \rightarrow E$ nazywamy pseudo-rozwiązaniem zagadnienia (2.3) jeżeli*

- (i) $x(\cdot)$ jest funkcją ACG_* ,
- (ii) $x(0) = x_0$,

(iii) dla każdego $x^* \in E^*$ istnieje zbiór $A(x^*)$ o mierze Lebesgue'a równej zero taki, że dla każdego $t \notin A(x^*)$, $(x^*x)'(t) = x^*\left(f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s))ds\right)\right)$, gdzie pochodna jest rozumiana jako pseudo-pochodna.

Twierdzenie 2.12 (15). Załóżmy, że dla każdej jednostajnie ACG_* funkcji $x: I_a \rightarrow E$, funkcje $k(\cdot, s, x(s))$, $f(\cdot, x(\cdot), \int_0^{\cdot} k(\cdot, s, x(s))ds)$, są całkowalne w sensie HKP oraz funkcje $k(t, s, \cdot)$, $f(t, \cdot, \cdot)$ są słabo-słabo ciągowo ciągłe. Załóżmy, że istnieją stałe $c_1, c_2, c_3 > 0$ takie, że dla dowolnych ograniczonych zbiorów $A, C \subset B$, $I \subset I_a$ zachodzi $\beta(f(I, A, C)) \leq c_1 \cdot \beta(A) + c_2 \cdot \beta(C)$.

Ponadto $\beta(k(I, I, X)) \leq c_3 \cdot \beta(X)$, $X \subset B$, $I \subset I_a$, gdzie

$$f(I, A, C) = \{f(t, x_1, x_2): (t, x_1, x_2) \in I \times A \times C\}, k(I, I, X) = \{k(t, s, x): (t, s, x) \in I \times I \times X\}.$$

Założmy, że zbiory K oraz K_1 są jednakowo ciągłe i jednostajnie ACG_* na przedziale I_a . Wtedy istnieje pseudo-rozwiązanie problemu (2.3) na przedziale I_d dla d takiego, że $0 < d \leq a$ oraz $0 < d \cdot c_1 + d^2 \cdot c_2 \cdot c_3 < 1$. Zbiór S wszystkich pseudo-rozwiązań problemu (2.3) na przedziale I_d jest słabo zwarty i spójny w przestrzeni $C(I_d, E), \omega$.

W pracy (15) podano także prawdziwość powyższego twierdzenia przy innych warunkach na zmniejszanie miary niezwartości β .

Wyżej omówione wyniki zostały już uogólnione w pracy [13], dotyczącej rozwiązań funkcjonalnych równań całkowych.

2.3. Równania dynamiczne na skali czasowej.

W ostatnich latach przeprowadzono wiele badań naukowych w zakresie równań dynamicznych w celu ujednolicenia wyników dotyczących równań różnicowych i różniczkowych [3-5, 8, 14, 18, 28-30, 42-43, 54, 63, 77, 98-99, 101, 108-109, 112-113]. Jednak dynamiczne równania w przestrzeniach Banacha, którymi się zajmuję, stanowią zupełnie nowy obszar badań, a wyniki uzyskane przeze mnie są pierwszymi tego typu.

Równania dynamiczne na skalach czasowych, których szczególnymi przypadkami są równania różniczkowe (jeśli $T = R$) i odpowiadające im równania różnicowe (jeśli $T = N$) pozwalają nam na ujednolicenie badań zagadnień brzegowych na przedziałach dyskretnych, rzeczywistych, a także ich kombinacjach.

Zagadnieniu różniczkowemu Cauchy'ego $x'(t) = f(t, x(t))$ oraz zagadnieniu różnicowemu Cauchy'ego poświęcono dużo miejsca w literaturze. Istnienie i własności rozwiązań zostały zaprezentowane z różnego rodzaju warunkami.

Badanie słabych rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego w przestrzeniach Banacha zostało zainicjowane przez Szépa w pracy [102]. Twierdzenia o istnieniu słabych rozwiązań tego problemu zostały udowodnione między innymi w pracach [40, 43, 44]. Podobne metody rozwiązywania problemów

istnienia rozwiązania równań różnicowych w przestrzeniach Banacha wyposażonych w słabą topologię badano na przykład w [6, 7, 59].

Głównym celem pracy (16) jest zbudowanie teorii, która łączy istnienie słabych rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla przypadku ciągłego i dyskretnego. Uzyskany wynik łączy zagadnienia istnienia słabych rozwiązań dla przypadku dyskretnego, nie tylko dla stałego odstępu czasu (Hz), ale również dla zmiennych odstępów czasu (KQ).

Zakładamy, że funkcja f jest słabo - słabo ciągowo ciągła o wartościach w przestrzeni Banacha i spełnia pewne warunki wyrażone w języku słabej miary niezwartości DeBlasi'ego [47].

Wprowadźmy podstawowe oznaczenia i definicje.

Niech T oznacza *skalę czasową* tzn. niepusty domknięty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych R ze standardową topologią przestrzeni rzeczywistej [71-72].

Najpopularniejszymi przykładami obliczeń na skali czasowej są: rachunek różniczkowy, jeśli $T = R$, rachunek różnicowy jeśli $T = N$ oraz rachunek kwantowy dla $T = q^{N_0} = \{q^t : t \in N_0\}, q > 1$. Przez I_a oznaczam, w tym rozdziale, przedział na skali czasowej tzn.

$$I_a = [0, a] \cap T = \{t \in T : 0 \leq t \leq a\} = [0, a]_T.$$

Zdefiniujmy *operator skoku w przód* $\sigma : T \rightarrow T$ jako $\sigma(t) = \inf\{s \in T : s > t\}$ i *skoku w tył* $\rho : T \rightarrow T$ jako $\rho(t) = \sup\{s \in T : s < t\}$. Operatory te klasyfikują punkty na skali czasowej w następujący sposób: jeżeli $\sigma(t) = t$, to t nazywamy *prawostronnie gęstym*, jeżeli $\sigma(t) > t$, to t nazywamy *prawostronnie rozproszonym*. Analogicznie operator ρ daje nam *punkty lewostronnie gęste* (gdy $\rho(t) = t$) oraz *lewostronnie rozproszone* (gdy $\rho(t) < t$). Jeżeli $\rho(t) = t = \sigma(t)$, to t jest *punktem gęstości*. Jeśli natomiast $\rho(t) < t < \sigma(t)$, to t jest *punktem izolowanym*.

Definicja 2.13. Mówimy, że funkcja $k : T \rightarrow E$ jest *rd-ciągła* jeżeli k jest ciągła w każdym punkcie $t \in T$ prawostronnie gęstym oraz granica $\lim_{s \rightarrow t^-} k(s)$ istnieje i jest skończona w każdym lewostronnie gęstym punkcie $t \in T$.

Zdefiniujmy teraz pojęcie Δ (∇) - pochodnej. punkcie $t \in T$

Definicja 2.14. Niech $t \in T$ oraz niech $f : I_a \rightarrow E$. Wtedy przez Δ - pochodną funkcji f rozumiemy granicę

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}.$$

Funkcję f nazywamy Δ - różniczkowalną na T , jeśli dla każdego $t \in T$ istnieje $f^\Delta(t)$.

Analogicznie

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s},$$

Funkcję f nazywamy ∇ - różniczkowalną na T , jeśli dla każdego $t \in T$ istnieje $f^\nabla(t)$.

Zauważmy, że

- (1) $f^\Delta = f^\nabla = f'$, w przypadku gdy $T = R$,
- (2) $f^\Delta = \Delta f$, $f^\nabla = \nabla f$ w przypadku gdy $T = N$,

$$(3) f^\Delta = \Delta_q f = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}, f^\nabla = \nabla_q f = \frac{f(t) - f(t/q)}{t(1-1/q)} \text{ w przypadku gdy}$$

$$T = q^{N_0} = \{q^t : t \in N_0\}, q > 1.$$

W pracy (16) rozważamy równanie dynamiczne postaci:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x^\Delta(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0, \quad t \in J, \end{aligned}$$

gdzie $J = \{t \in T : 0 \leq t < \infty\}$.

Uogólniamy pewne definicje i pojęcia znane dla funkcji $f: T \rightarrow R$ na przypadek funkcji $f: T \times E \rightarrow E$.

Definicja 2.15. Niech $u: T \rightarrow E$. Mówimy, że funkcja u jest słabo Δ -różniczkowalna w punkcie $t \in T$, jeżeli istnieje element $Y(t) \in E$ taki, że dla każdego $x^* \in E^*$ funkcja x^*u jest Δ -różniczkowalna w punkcie t oraz $(x^*u)^\Delta(t) = (x^*Y)(t)$. Funkcję Y nazywamy słabą Δ -pochodną funkcji u oraz oznaczamy $u^{\Delta w}$.

Definicja 2.16. Funkcję $x: J \rightarrow E$ nazywamy słabym Δ -rozwiązaniem problemu (2.4) jeżeli x posiada słabą Δ -pochodną oraz spełnia równanie (2.4) dla wszystkich $t \in J$.

W przypadku słabo-słabo ciągowo ciągłej funkcji f rozwiązanie równania (2.4) jest równoważne z rozwiązaniem równania postaci $x(t) = x_0 + wC \int_0^t f(s, x(s)) \Delta s$, $t \in J$, gdzie całka jest rozumiana jako słaba Δ -całka Cauchy'ego (tzn. jeżeli $U^{\Delta w}(t) = u(t)$ dla każdego t , to słabą Δ -całką Cauchy'ego nazywamy całkę postaci $wC \int_a^t u(s) \Delta s = U(t) - U(a)$).

Niech $B_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$, $r > 0$ będzie kulą w przestrzeni Banacha E . Rozpatrzmy przestrzeń funkcji ciągłych $C(I_a, E)$ z topologią słabą tzn. przestrzeń

$$(C(I_a, E), \omega) = (C(I_a, E), \sigma(C(I_a, E), C^*(I_a, E))).$$

Niech $f: J \times E \rightarrow E$ spełnia warunek $\|f(t, x(t))\| \leq b_1(t) + b_2(t)\|x(t)\|$ dla każdej pary $(t, x) \in J \times E$, gdzie b_1, b_2 są ograniczonymi i całkowalnymi funkcjami z przestrzeni $C_{rd}(J, R)$ funkcji rd -ciągłych. Ponadto niech $M(t)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia

$$M^\Delta(t) = b_1(t) + b_2(t)M(t), \quad M(0) = x_0.$$

Założmy, że b_1 i b_2 są funkcjami takimi, że $M_0 = \sup_{t \in J} M(t) < \infty$. Niech

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{M_0} = \{x \in (C_{rd}(J, E), \omega) : \|x(t)\| \leq M_0, \|x(t) - x(s)\| \leq (\|b_1\| + \|b_2\| \cdot M_0)|t - s|, \\ t, s \in J, x \in B_{M_0}\}. \end{aligned}$$

W pracy (16) udowodnione zostało twierdzenie o wartości średniej dla funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha, zdefiniowanej na skali czasowej oraz lemat typu Ambrossetti'ego [15] dla takiej funkcji, co pozwoliło udowodnić następny główny wynik pracy (twierdzenie 2.19).

Twierdzenie 2.17 (16). Jeżeli funkcja $u: J \rightarrow E$ jest słabo Δ -całkowalna wtedy

$$\int_{I_d} u(t) \Delta t \in \mu_\Delta(I_d) \cdot \overline{\text{conv}} u(I_d),$$

gdzie I_d jest dowolnym podprzedziałem przedziału J oraz $\mu_\Delta(I_d)$ oznacza miarę Δ -Lebesgue'a przedziału I_d .

Twierdzenie 2.18 (16). Niech $H \subset C(J, E)$ będzie rodziną funkcji silnie jednakowo ciągłych. Niech $H(t) = \{h(t) \in E : h \in H\}$, dla $t \in J$. Wtedy $\beta(H(J)) = \sup_{t \in J} \beta(H(t))$ oraz funkcja $t \mapsto \beta(H(t))$ jest ciągła na J .

Twierdzenie 2.19 (16). Załóżmy, że funkcja $f: J \times B_{M_0} \rightarrow E$ spełnia następujące warunki:

- (i) $\|f(t, x(t))\| \leq b_1(t) + b_2(t)\|x(t)\|$, dla każdej pary $(t, x) \in J \times E$,
- (ii) $f(t, \cdot)$ jest słabo – słabo ciągowo ciągła dla każdego $t \in J$,
- (iii) dla każdej silnie absolutnie ciągłej funkcji $x: J \rightarrow E$, funkcja $f(\cdot, x(\cdot))$ jest słabo ciągła,
- (iv) dla dowolnej niemalejącej funkcji Kamkego h zachodzi $\beta(f(I_d \times X)) \leq h(\beta(X))$, dla każdego zbioru ograniczonego $X \subset E$, oraz $I_d \subset J$.

Wtedy istnieje przynajmniej jedno Δ -słabe rozwiązanie problemu (2.4) na pewnym przedziale $I_d \subset J$.

Warunek (iv) w twierdzeniu 2.19 może zostać zastąpiony ogólniejszym warunkiem np. Sadovskiego, Szufli [104] oraz miara niezwartości β aksjomatyczną miarą słabej niezwartości.

Kolejne wyniki uzyskałam w pracy (29), w której wspólnie z S. A. Sakerem rozpatrujemy następujące zagadnienie:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x^{(\Delta m)}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in T, \\ x(0) &= 0, \end{aligned}$$

$$x^\Delta(0) = \eta_1, \dots, x^{(\Delta(m-1))}(0) = \eta_{m-1}, \quad \eta_1, \dots, \eta_{m-1} \in E,$$

gdzie $x^{(\Delta m)}$ oznacza słabą Δ - pochodną rzędu m , T jest nieograniczoną skalą czasową (tzn. niepustym, domkniętym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych takim, że istnieje ciąg $(a_n) \in T$ taki, że $a_n \rightarrow \infty$).

Niech $L^1(T)$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych w sensie Δ - Lebesgue'a na skali czasowej T . Załóżmy, że istnieje funkcja $M \in L^1(T)$ taka, że $M(t) \geq 0$, $t \in T$ oraz $\|f(t, x)\| \leq M(t)$, dla prawie wszystkich $t \in T$ oraz dla każdego $x \in E$.

$$\text{Ponadto niech } b_t = \sum_{j=0}^{m-1} \|\eta_j\| \frac{t^j}{j!} + \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} M(t_m) \Delta t_m \dots \Delta t_1,$$

$$K(\tau, s) = \int_\tau^s \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} M(t_m) \Delta t_m \dots \Delta t_1, \quad p(t) = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j \frac{t^j}{j!}, & \eta_1, \dots, \eta_{m-1} \in E, \quad m > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_t &= \{x \in (C(I_t, E), \omega) : \|x(s)\| \leq b_1, \quad \|x(\tau) - x(s)\| \leq \|p(\tau) - p(s)\| + K(\tau, s), \\ &\quad t, \tau, s \in T, 0 \leq s < \tau \leq t\}, \quad I_t = \{s \in T : 0 \leq s \leq t\}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator $F: \tilde{B}_t \rightarrow \tilde{B}_t$ w postaci

$$F(x)(t) = p(t) + \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m, x(t_m)) \Delta t_m \dots \Delta t_1.$$

W celu udowodnienia głównego wyniku pracy (29), w pierwszej kolejności pokazano lemat dotyczący „wchodzenia” ze słabą miarą niezwartości pod znak Δ -słabej całki.

Lemat. 2.20 (29). Niech X będzie zbiorem jednakowo ciągłym i ograniczonym w przestrzeni funkcji ciągłych $C(T, E)$ oraz $\int_0^a X(s) \Delta s = \{\int_0^a x(s) \Delta s : x \in X\}$. Wtedy $\beta(\int_0^a X(s) \Delta s) \leq \int_0^a \beta(X(s)) \Delta s$.

Główny wynik pracy stanowi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.21 (29). Załóżmy, że funkcja $f: T \times E \rightarrow E$ oraz istnieje funkcja $M \in L^1(T)$ taka, że $M(t) \geq 0$, $t \in T$ oraz $\|f(t, x)\| \leq M(t)$ dla prawie wszystkich $t \in T$ i dla każdego $x \in E$. Ponadto załóżmy, że spełnione są poniższe warunki:

- (i) $f(t, \cdot)$ jest słabo – słabo ciągowo ciągła dla każdego $t \in J$,
- (ii) dla każdej silnie absolutnie ciągłej funkcji $x: J \rightarrow E$, $f(\cdot, x(\cdot))$ jest słabo ciągła,
- (iii) istnieje funkcja $L: T \times [0, \infty)$ taka, że dla każdej ciągłej funkcji $u: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ odwzorowanie $t \mapsto L(t, u(t))$ jest ciągłe oraz $L(t, 0) \equiv 0$, dla $t \in T$,
- (iv) $\int_0^\infty \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} L(t_m, r) \Delta t_m \dots \Delta t_1 < r$, dla wszystkich $r > 0$ oraz
- (v) $\beta(f(I \times A)) \leq \sup\{L(t, \beta(A)): t \in I\}$ dla zwartego podprzedziału $I \subset T$ oraz dla każdego niepustego, ograniczonego zbioru $A \subset E$.

Wtedy istnieje przynajmniej jedno Δ -słabe rozwiązanie problemu (2.5) na przedziale $I_b \subset J$.

W pracy (21) rozpatruję dynamiczne równanie różniczkowo-całkowe postaci

$$(2.6) \quad \begin{aligned} x^\Delta(t) &= f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s)) \Delta s\right), \quad t \in I_a, \quad a \in R_+, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

gdzie $f: I_a \times E \times E \rightarrow E$, $k: I_a \times I_a \times E \rightarrow E$, $x: I_a \rightarrow E$, x^Δ oznacza pseudo Δ - pochodną funkcji x oraz całka jest rozumiana jako całka Δ - Henstocka–Kurzweila–Pettisa.

Równania różniczkowo – całkowe będące szczególnymi przypadkami równań różniczkowo – całkowych rozpatrywanych na skali czasowej (np. [54, 60-62, 112-113]) mają szerokie zastosowanie w wielu zagadnieniach naukowych, zaczynając od matematyki, fizyki, chemii aż po ekonomię i medycynę [45].

Uogólnienia w stosunku do wcześniej uzyskanych wyników dotyczących równań różniczkowo – całkowych (np. [112, 113]) uzyskanych w omawianej pracy, polegają na rozpatrzeniu szerszej klasy funkcji niż dotychczas rozpatrywane dzięki zastosowaniu własności nowej całki na skali czasowej typu Henstocka – Kurzweila - Pettisa. Oznaczać ją będę przez całkę Δ -HKP.

Pojęcie tej całki uogólnia pojęcie całki typu Δ -HK, które było wprowadzone przez A. Petersona i B. Thompsona w pracy [88] oraz całki typu Pettisa, która jest istotna w przypadku rozpatrywania słabej topologii w przestrzeniach Banacha.

Wprowadzenie całki typu Δ -HK pozwoliło rozpatrywać ogólniejsze niż dotychczas równania dynamiczne, w tym dynamiczne równania różniczkowo-całkowe. W pracy [88] pokazano, że istnieją funkcje wysoko oscylujące, które nie są całkowne w sensie Δ -całek, ale są całkowne w sensie Δ - HK. Dalszych uogólnień dokonał np. M. Cichoń w pracy [42] definiując całki typu Δ -HK, Δ -HL, Δ -HKP z funkcji o wartościach w przestrzeniach Banacha.

Z drugiej strony uogólniona została także dziedzina rozpatrywanych rozwiązań poprzez rozpatrzenie zagadnienia na skali czasowej.

Zauważmy, że równanie (2.6) w swej ogólnej postaci obejmuje kilka różnych typów równań różniczkowo-całkowych i różnicowo-całkowych w zależności od wyboru skali czasowej T . Na przykład:

- (1) dla $T = R$ mamy $\sigma(t) = t, \mu(t) = 0, x^\Delta(t) = x'(t)$ i problem (2.6) opisuje zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowo-całkowego postaci:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s)) \Delta s\right), \quad t \in R, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

- (2) dla $T = N$ mamy $\sigma(n) = n + 1, \mu(n) = 1, x^\Delta(n) = \Delta x(n) = x(n + 1) - x(n)$, wtedy równanie (2.6) opisuje problem Cauchy'ego dla równań

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s)) \Delta s\right), \quad t \in N, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

W pracy (21) wprowadzam nowe pojęcie rozwiązania zagadnienia (2.6) w sensie Δ -pseudo-rozwiązania. Przez takie rozwiązanie rozumiem funkcję $x: I_a \rightarrow E$ spełniającą poniższe warunki:

- (i) $x(\cdot)$ jest funkcją typu ACG_* ,
- (ii) $x(0) = x_0$,
- (iii) dla każdego funkcjonału $x^* \in E^*$ istnieje zbiór $A(x^*)$ o mierze Lebesgue'a μ_Δ równej zero taki, że dla każdego $t \notin A(x^*)$ zachodzi

$$(x^* x)^\Delta(t) = x^* \left(f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s)) \Delta s\right) \right).$$

Niech $B = \{x \in E: \|x\| \leq \|x_0\| + p, p > 0\}$, $\tilde{B} = \{x \in (C(I_a, E), \omega): x(0) = x_0, \|x\| \leq \|x_0\| + p, p > 0\}$

$$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(z, x(z), \int_0^z k(z, s, x(s)) \Delta s) \Delta z, \quad t \in I_a,$$

$$K = \{F(x): x \in \tilde{B}\}, \quad K_1 = \left\{ \int_0^z k(z, s, x(s)) \Delta s: z \in I_t = [0, t] \cap T, t \in I_a, x \in \tilde{B} \right\}.$$

Główny wynik pracy formułuję w postaci poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.22 (21). Załóżmy, że dla każdej jednostajnie ACG_* funkcji $x: I_a \rightarrow E$, funkcje $k(\cdot, s, x(s))$, $f\left(\cdot, x(\cdot), \int_0^{(\cdot)} k(\cdot, s, x(s)) \Delta s\right)$ są całkowne w sensie Δ -HKP oraz funkcje k, f są słabo-słabo ciągowo ciągłe. Załóżmy, że istnieją stałe $c_1, c_2, c_3 > 0$ takie, że

$$\beta(f(I, A, C)) \leq c_1 \cdot \beta(A) + c_2 \cdot \beta(C)$$

dla dowolnych ograniczonych zbiorów $A, C \subset B$ oraz $I \subset I_a$. Ponadto $\beta(k(I, I, X)) \leq c_3 \beta(X)$, $X \subset B$, $I \subset I_a$, gdzie

$$f(I, A, C) = \{f(t, x_1, x_2): (t, x_1, x_2) \in I \times A \times C\}, \quad k(I, I, X) = \{k(t, s, x): (t, s, x) \in I \times I \times X\}.$$

Załóżmy dodatkowo, że zbiory K oraz K_1 są jednakowo ciągłe i jednostajnie ACG_* na przedziale I_a . Wtedy istnieje Δ -pseudo-rozwiązanie problemu (2.6) na przedziale I_a , dla pewnego d takiego, że $0 < d \leq a$ oraz $0 < d \cdot c_1 + d^2 \cdot c_2 \cdot c_3 < 1$.

W pracy (21) udowodniłam także twierdzenie z innymi warunkami na zmniejszenie miary niezwartości β .

Wynik uzyskany w pracy (30) dotyczy istnienia rozwiązania typu Carathéodory'ego nieliniowego zagadnienia Sturma – Liouville'a:

$$(2.7) \quad (p(t)x^\Delta(t))^\nabla + f(t, x(t), x^\Delta(t), x^\nabla(t)) = 0, \quad t \in J = [0, \infty) \cap T$$

$$(2.8) \quad \alpha_1 x(0) - \beta_1 \lim_{t \rightarrow 0^+} p(t)x^\Delta(t) = 0, \quad \alpha_2 \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \beta_2 \lim_{t \rightarrow \infty} p(t)x^\Delta(t) = 0$$

w przestrzeni Banacha.

W pracy [108] Topal, Yantir oraz Cetin udowodnili istnienie rozwiązania równania

$$(p(t)x^\Delta(t))^\nabla + \chi\phi(t)f(t, x(t)) = 0, \quad 0 < t < \infty$$

na nieograniczonej skali czasowej. W omawianej pracy uzyskujemy rozwiązanie typu Carathéodory'ego dla nieco szerszego zagadnienia (2.7) – (2.8).

Przypomnijmy, że funkcję $f: T \times E^3 \rightarrow E$ nazywamy *funkcją Carathéodory'ego* jeśli:

- (i) $f(t, x, x_1, x_2)$ jest funkcją ograniczoną,
- (ii) $f(t, x, x_1, x_2)$ jest mierzalna ze względu na $t \in T$ dla wszystkich $(x, x_1, x_2) \in E^3$,
- (iii) $f(t, x, x_1, x_2)$ jest ciągła ze względu na x, x_1, x_2 dla μ_Δ prawie wszystkich $t \in T$, gdzie μ_Δ oznacza miarę Lebesgue'a przedziału rozpatrywanego na skali czasowej.

Funkcję $x: T \rightarrow E$ nazywamy *rozwiązaniem Carathéodory'ego* zagadnienia (2.7)-(2.8) jeśli:

- (i) x jest Δ - różniczkowalna na T^k ,
- (ii) $x^\Delta: T \rightarrow E$ jest ∇ - różniczkowalna na $T^* = T^k \cap T_k$,
- (iii) $x^{\Delta\nabla}: T^* \rightarrow E$ jest ciągła i $x(\cdot)$ spełnia μ_Δ prawie wszędzie na T^* równanie (2.7) wraz z warunkami początkowymi (2.8), gdzie T^k, T_k oznaczają odpowiednio skale czasowe, na których funkcja x jest odpowiednio Δ oraz ∇ różniczkowalna.

Zakładamy, że

- (A1) $p: T \rightarrow R$ jest funkcją ∇ - różniczkowalną na przedziale $T_k = [0, \infty)_k$, $p(t) \neq 0, \forall t \in T$ oraz $p^\nabla: T_k \rightarrow R$ jest ciągła i zachodzi, $\int_0^\infty \Delta s / p(s) < \infty$,
- (A2) $f: T \times E^3 \rightarrow E$ jest funkcją Carathéodory'ego,
- (A3) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R, |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0, \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \int_0^\infty \frac{\Delta s}{p(s)} \neq 0$.

W pracy wykorzystujemy równoważne zagadnieniu (2.7)-(2.8) równanie całkowe

$$x(t) = \int_0^\infty G(t, s)f(s, x(s), x^\Delta(s), x^\nabla(s))\nabla s,$$

gdzie $G(t, s) = \frac{1}{D} \begin{cases} u_1(t)u_2(s) & 0 \leq t < s < \infty \\ u_1(s)u_2(t) & 0 \leq s < t < \infty \end{cases}, \quad D = u_1^{[\Delta]}(t)u_2(t) - u_1(t)u_2^{[\Delta]}(t),$

$$u_1(t) = \beta_1 + \alpha_1 \int_0^t \frac{\Delta s}{p(s)} \text{ oraz } u_2(t) = \beta_2 + \alpha_2 \int_t^\infty \frac{\Delta s}{p(s)}, \quad \text{gdzie}$$

$$\beta_1 = x(0), \quad \alpha_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} x^{[\Delta]}(t), \quad \beta_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), \quad -\alpha_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} x^{[\Delta]}(t)$$

są rozwiązaniami zagadnień odpowiednio (2.9)-(2.10), (2.9)-(2.11) podanych poniżej.

$$(2.9) \quad -\left(p(t)x^\Delta(t)\right)^\nabla = 0$$

z warunkami początkowymi odpowiednio

$$(2.10) \quad x(0) = \beta_1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} x^{[\Delta]}(t) = \alpha_1,$$

$$(2.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \beta_2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x^{[\Delta]}(t) = -\alpha_2.$$

W pracy pokazaliśmy, że operator całkowy $F(x)(t) = \int_0^\infty G(t, s)f(s, x(s), x^\Delta(s), x^\nabla(s))\nabla s$ posiada punkt stały, który jest rozwiązaniem zagadnienia (2.7)-(2.8).

W dowodzie głównego twierdzenia omawianej pracy wykorzystana została uogólniona postać lematu Ambrossetti'ego dla przestrzeni $C_1^{\Delta\nabla}(T, E)$ udowodniona w pracy (28) oraz twierdzenie o wartości średniej dla $\nabla(\Delta)$ – całek:

Lemat 2.23. (28) Niech $A \in C_1^{\Delta\nabla}(T, E)$ będzie rodziną funkcji wspólnie ograniczonych i silnie jednakowo ciągłych. Niech ponadto $A^\Delta = \{g^\Delta: g \in A\}$ oraz $A^\nabla = \{g^\nabla: g \in A\}$ będą ograniczone i jednakowo ciągłe. Wtedy

$$\alpha(A) = \max\{\sup_{t \in T} \alpha(A(t)), \sup_{t \in T} \alpha(A^\Delta(t)), \sup_{t \in T} \alpha(A^\nabla(t))\}.$$

Twierdzenie 2.24. (28) Jeżeli $u: J \rightarrow E$ jest funkcją ∇ -całkowalną, to

$$\int_I u(t)\nabla t \in \mu_\nabla(I) \cdot \overline{\text{conv}}u(I),$$

gdzie I jest dowolnym podprzedziałem przedziału J oraz μ_∇ oznacza ∇ miarę przedziału I .

Zdefiniujmy

$$M_1 = \frac{1}{D} \left(\beta_1 + \alpha_1 \int_0^\infty \frac{\Delta s}{p(s)} \right) \left(\beta_2 + \alpha_2 \int_0^\infty \frac{\Delta s}{p(s)} \right), M_2 = \sup_{t \in J} \left| \frac{1}{p(t)} \right|, M_3 = \sup_{t \in J} \left| \frac{1}{p(\rho(t))} \right|,$$

$$M_0 = M_1 \int_0^\infty m(s)\nabla s, \hat{G}(t, \tau) = \int_0^\infty |G(t, s) - G(\tau, s)|m(s)\nabla s.$$

Niech ponadto

$$\tilde{B} = \{x \in C(J, E): \|x\| \leq M_0, \|x(t) - x(\tau)\| \leq \hat{G}(t, \tau)$$

$$\|x^\Delta(t) - x^\Delta(\tau)\| \leq \left| \frac{1}{p(\tau)} - \frac{1}{p(t)} \right| \int_0^\infty m(s)\nabla s + \left| \frac{1}{p(\tau)} \right| \int_t^\tau m(s)\nabla s,$$

$$\|x^\nabla(t) - x^\nabla(\tau)\| \leq \left| \frac{1}{p(\rho(\tau))} - \frac{1}{p(\rho(t))} \right| \int_0^\infty m(s)\nabla s + \left| \frac{1}{p(\rho(\tau))} \right| \int_t^\tau m(s)\nabla s\}.$$

Główne twierdzenie pracy (30) ma postać:

Twierdzenie 2.25 (30). Załóżmy, że funkcja $f: T \times E \times E \times E \rightarrow E$ jest funkcją Carathéodory'ego oraz istnieją funkcje $m, k: [0, \infty) \rightarrow R^+$ całkowne w sensie ∇ -Lebesgue'a, takie, że

$$(2.12) \quad \|f(t, x, x_1, x_2)\| \leq m(t), \quad \text{dla } t \in J, x, x_1, x_2 \in E,$$

$$(2.13) \quad \alpha(f(I \times A \times B \times C)) \leq k(t) \max\{\alpha(A), \alpha(B), \alpha(C)\}$$

$$(2.14) \quad 0 < M_i \int_0^\infty k(s)\nabla s < 1, \quad M_i > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

dla $I \subset J$ oraz dla dowolnych ograniczonych podzbiorów A, B, C przestrzeni E . Wtedy zagadnienie (2.7) - (2.8) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Poniższy przykład ilustruje zastosowanie udowodnionego twierdzenia.

Przykład (30).

Rozważmy zagadnienie postaci

$$\left(\frac{1}{2^t}x^\Delta(t)\right)^\nabla + \frac{1+\sin(x(t)x^\Delta(t))}{3^t} = 0, \quad t \in T = \left\{\frac{n}{2}: n \in N_0\right\},$$

$$\frac{1}{2}x(0) - \frac{1}{2}\lim_{t \rightarrow 0^+} p(t)x^\Delta(t) = 0, \quad \frac{1}{2}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)x^\Delta(t) = 0.$$

Zauważmy, że warunki (A1) – (A3) są spełnione oraz możemy obliczyć

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{2^s} = \frac{5+\sqrt{2}}{8} \approx 0,8 \neq 0.$$

Łatwo też znaleźć $M_1 \approx 1,376$, $M_2 \approx 0,5$ oraz $M_3 \approx 0,5$. Jeśli przyjmiemy $m(t) = 2/3^t$, to warunek $\|f(t, x(t), x^\Delta(t))\| \leq m(t)$ jest spełniony. Ponadto $M_0 = M_1 \int_0^\infty m(t)\Delta t \approx 1,376 \cdot 1,366 \approx 1,879$. Jeśli natomiast $k(t) = 4^{-t}$, to ponieważ $\int_0^\infty k(s)\nabla s = 0,5$, więc założenie (2.14) jest również spełnione.

Funkcja $f\left(t, x(t), x^\Delta(t)\right) = \frac{1+\sin(x(t)x^\Delta(t))}{3^t}$ spełnia także warunek (2.13). Stąd, na mocy twierdzenia 2.25. rozpatrywane przez nas zagadnienie posiada rozwiązanie.

W pracy (25), wspólnie z M. Cichoniem i B. Satco rozważamy impulsowe nielokalne zagadnienie Cauchy'ego w przestrzeni Banacha E postaci:

$$(2.15) \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \text{ dla prawie każdego } t \in [0, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$$

$$(2.16) \quad \Delta y(t_i) = I_i(y(t_i)), \text{ dla każdego } i \in \{1, \dots, m\}$$

$$(2.17) \quad y(0) = g(y) + y^0,$$

gdzie $[0, b] \subset \mathbb{R}$, $0 < t_1, \dots, t_m < b$ oznaczają momenty impulsu, $\Delta y(t) = y(t^+) - y(t^-)$ oznacza „skok” funkcji y w punkcie t . Funkcja $I_i: E \rightarrow E$ opisuje nieciągłość funkcji y w punkcie t_i .

Od ponad wieku, równania różniczkowe są wykorzystywane do opisu dynamicznie zmieniających się zjawisk fizycznych. Zastąpienie klasycznego warunku początkowego $y(0) = y_0$ warunkiem nielokalnym $y(0) + g(y) = y_0$ daje możliwość dokładniejszego opisu tych zjawisk. Dynamika wielu procesów ulega gwałtownym zmianom, takim jak wstrząsy, wyładowania atmosferyczne, klęski żywiołowe itp. Zjawiska te obejmują krótkie perturbacje, a do ich modelowania wykorzystuje się właśnie równania różniczkowe z impulsem (np. [19, 51, 81]).

W przeciwieństwie do wcześniejszych prac, w których rozważano zagadnienia z impulsem na skali czasowej (np. [82-83]), my proponujemy niestandardowe podejście do tego zagadnienia. Zauważmy, że możemy potraktować równania różniczkowe z impulsami jako zwykłe równania dynamiczne na skali czasowej, co pozwala na ujednolicenie tych teorii. Przy takim podejściu możemy jednocześnie rozpatrywać dwa zagadnienia: dynamiczne nielokalne zagadnienie Cauchy'ego w przestrzeni Banacha na skali czasowej oraz nielokalne zagadnienie z impulsem rozpatrywane na „zwykłym” przedziale, jako szczególny przypadek pierwszego zagadnienia.

Rozważając zagadnienia z impulsami, rozwiązań szukamy zwykle w przestrzeni funkcyjnej $PC([0, b], E)$ wyposażonej w normę $\|\cdot\|_C$.

Definicja 2.26. $PC([0, b], E)$ jest zbiorem funkcji $y: [0, b] \rightarrow E$ spełniających poniższe warunki:

- (i) y jest ciągła w każdym punkcie $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$,
- (ii) y jest lewostronnie ciągła w każdym punkcie $t \in \{t_1, \dots, t_m\}$ oraz istnieją prawostronne granice $y(t^+)$.

W pracy wykorzystano pojęcie całki Δ -Henstocka.

Niech $\delta = (\delta_L, \delta_R)$ będzie parą funkcji dodatnich. Mówimy, że podział przedziału $[a, b]_T$ taki, że $x_0 \leq \xi_1 < x_1 \leq \xi_2 < \dots \leq \xi_n < x_n$ jest δ -skończony, co zapisujemy

$$D = \{[u, v]_T, \xi\} = \{[x_{i-1}, x_i]_T; \xi_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

jeżeli $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta_L(\xi_i), \xi_i + \delta_R(\xi_i))$, $(x_i \neq \sigma(x_{i-1}))$.

Definicja 2.27. Funkcję $f: [a, b]_T \rightarrow E$ nazywamy całkowaną w sensie Δ -Henstocka na przedziale $[a, b]_T$, jeżeli istnieje funkcja $F: [a, b]_T \rightarrow E$ taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje para funkcji dodatnich $\delta = (\delta_L(\cdot), \delta_R(\cdot))$ na $[a, b]_T$ taka, że jeżeli $D = \{[u, v]_T, \xi\}$ jest δ -skończonym podziałem przedziału $[a, b]_T$, to

$$\|\sum_D |f(\xi)\mu_\Delta([u, v]_T) - (F(v) - F(u))|\| < \varepsilon.$$

W tym przypadku, dla każdego $t \in [a, b]_T$, $F(t) = (H) \int_a^t f(s) \Delta s$ jest całką Δ -Henstocka z funkcji f na $[a, b]_T$.

Definicja 2.28. Funkcję $f: [a, b]_T \rightarrow E$ nazywamy całkowaną w sensie Δ -Henstocka – Lebesgue’a na przedziale $[a, b]_T$, jeżeli istnieje funkcja $F: [a, b]_T \rightarrow E$ taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje para funkcji dodatnich $\delta = (\delta_L(\cdot), \delta_R(\cdot))$ na $[a, b]_T$ taka, że jeżeli $D = \{[u, v]_T, \xi\}$ jest δ -skończonym podziałem przedziału $[a, b]_T$, to

$$\sum_D \|f(\xi)\mu_\Delta([u, v]_T) - (F(v) - F(u))\| < \varepsilon.$$

W tym przypadku, dla każdego $t \in [a, b]_T$, $F(t) = (HL) \int_a^t f(s) \Delta s$ jest całką Δ -Henstocka–Lebesgue’a z funkcji f na $[a, b]_T$.

Oznaczmy przez $HL([a, b]_T, E)$ przestrzeń wszystkich funkcji całkownych w sensie Δ -HL z normą Alexiewicza $\|f\|_A = \sup_{t \in [a, b]_T} \|(HL) \int_a^t f(s) \Delta s\|$.

Zauważmy, że funkcja całkowna w sensie Δ -HL jest także całkowna w sensie Δ -H. Odwrotnie być nie musi. Dla funkcji o wartościach rzeczywistych obie całki są równoważne.

Z punktu widzenia zastosowań, całka Henstocka – Lebesgue’a jest bardzo interesująca. Nawet w przypadku, gdy $T = R$, funkcja pierwotna funkcji całkownej w sensie Henstocka jest absolutnie ciągła, ale niekoniecznie różniczkowalna prawie wszędzie, co jest z kolei własnością całki Henstocka – Lebesgue’a. Oznacza to, że w rozważaniach dotyczących istnienia i własności zbioru rozwiązań typu Carathéodory’ego równań różniczkowych, stosując całkę typu HL otrzymujemy równoważność zagadnienia różniczkowego z odpowiednim zagadnieniem całkowym. W pracy (25) wykorzystujemy tę całkę w przypadku równań dynamicznych na skali czasowej, udowadniając podstawowe, potrzebne w naszych rozważaniach, własności tej całki.

Twierdzenie 2.29 (25) (o wartości średniej). Dla każdego podprzedziału $[c, d]_T \subset [a, b]_T$, jeżeli istnieje całka (HL) $\int_c^d y(s)\Delta s$, to

$$(HL) \int_c^d y(s)\Delta s \in \mu_\Delta([c, d]_T) \overline{\text{conv}} y([c, d]_T).$$

Przedstawię teraz krótko konstrukcję funkcji ciągłej na skali czasowej.

Dla wybranego $h > 0$ rozważmy zbiór $T = [0, t_1] \cup [t_1 + h, t_2 + h] \cup \dots \cup [t_m + mh, b + mh]$, (który jest skalą czasową) uzyskany poprzez zwiększenie przedziału początkowego.

Zdefiniujmy funkcję $x: T \rightarrow E$ w następujący sposób:

$$x(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [0, t_1], \\ y(t-h)^+, & t = t_1 + h, \\ y(t-h), & t \in (t_1 + h, t_2 + h], \\ \dots \\ y(t-mh)^+, & t = t_m + mh, \\ y(t-mh), & t \in (t_m + mh, b + mh] \end{cases}$$

lub w innej postaci

$$x(t) = \begin{cases} y(\beta(t))^+, & t \in \{t_1 + h, t_2 + 2h, \dots, t_m + mh\} \\ y(\beta(t)), & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie funkcja $\beta: T \rightarrow [0, b]$ jest określona w następujący sposób

$$\beta(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, t_1], \\ t-h, & t \in [t_1 + h, t_2 + h], \\ \dots \\ t-mh, & t \in [t_m + mh, b + mh]. \end{cases}$$

W ten sposób otrzymaliśmy ciągłą funkcję określoną na skali czasowej T .

W celu uniknięcia dowodzenia twierdzenia dwa razy, raz dla zagadnienia różniczkowego, a następnie dla równania różnicowego, nasze zagadnienie impulsowe zapisujemy w postaci zagadnienia dynamicznego na skali czasowej w następujący sposób:

$$x^\Delta(t) = \begin{cases} f(\beta(t), x(t)), & \text{prawie wszędzie na } T \setminus \{t_1, t_1 + h, t_2 + 2h, \dots, t_m + mh\} \\ \frac{I_{\frac{t-\beta(t)}{h}+1} x(t)}{h}, & t \in \{t_1, t_2 + h, \dots, t_m + (m-1)h\} \end{cases}$$

$$x^\nabla(t) = \frac{I_{\frac{t-\beta(t)}{h}}(x(t))}{h}, \quad \text{dla } t \in \{t_1 + h, t_2 + 2h, \dots, t_m + mh\}$$

$$x(0) = \tilde{g}(x) + y^0,$$

gdzie funkcja $\tilde{g}(x): C(T, E) \rightarrow E$ ma postać $\tilde{g}(x) = g(y)$, $y \in PC([0, b], E)$ jest funkcją opisaną powyższą metodą.

Tak jest, ponieważ dla prawostronnie izolowanego punktu, na przykład t_1 , mamy

$$x^\Delta(t_1) = \frac{x(\sigma(t_1)) - x(t_1)}{\sigma(t_1) - t_1} = \frac{l_1(y(t_1))}{h}.$$

Podobnie dla lewostronnie izolowanego punktu, na przykład $t_1 + h$, mamy

$$x^\nabla(t_1 + h) = \frac{x(\rho(t_1 + h)) - x(t_1 + h)}{\rho(t_1 + h) - (t_1 + h)} = \frac{l_1(y(t_1))}{h}.$$

Jeśli przez Ω oznaczymy podzbiór zbioru $[0, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, miary zero, gdzie y nie jest funkcją różniczkowalną, to impulsowe zagadnienie różniczkowe staje się zagadnieniem różniczkowym na skali czasowej postaci:

$$x^\Delta(t) = \begin{cases} f(\beta(t), x(t)), & t \notin (\Omega \cup \{t_1, t_1 + h, t_2 + h, t_2 + 2h, \dots, t_m + mh\}) \\ \frac{I_{t-\beta(t)+1} x(t)}{h}, & t \in \{t_1, t_2 + h, \dots, t_m + (m-1)h\} \end{cases}$$

$$x(0) = \tilde{g}(x) + y^0.$$

Powyżej opisana konstrukcja pozwala rozpatrywać impulsowe zagadnienia różniczkowe na „zwykłym” przedziale z wykorzystaniem metod używanych na skali czasowej.

Niech $B_r(x^0)$ oznacza domkniętą kulę w przestrzeni Banacha E , o promieniu $r > 0$ i środku w $x^0 \in E$.

Rozważmy następujące równanie różniczkowe z nielokalnym warunkiem początkowym na ograniczonej skali czasowej T :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} x^\Delta(t) &= F(t, x(t)) && \text{dla prawie wszystkich } t \in T, \\ x(0) &= G(x) + x^0. \end{aligned}$$

(załóżmy, że minimum skali czasowej wynosi 0, a jej maksimum oznaczmy przez A).

W pracy (25) udowodnione zostało następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.30 (25). *Niech T będzie ograniczoną skalą czasową i niech $F: T \times E \rightarrow E$ oraz $G: C(T, E) \rightarrow E$ spełnia warunki:*

- (i) *dla każdej ciągłej funkcji $x: T \rightarrow E$, funkcja $t \in T \mapsto F(t, x(t))$ jest całkowalna w sensie Δ -HL,*
- (ii) *Δ -HL pochodne funkcji $F(\cdot, x(\cdot))$ są jednostajnie ciągłe na skali czasowej T ze względu na funkcję x w dowolnej kuli z przestrzeni funkcji ciągłych tzn. dla każdego $r > 0$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje $0 < \delta_{\varepsilon, r} < 1$ taka, że*

$$\left\| (HL) \int_{t'}^{t''} F(s, x(s)) \Delta s \right\| < \varepsilon, \quad \forall |t' - t''| < \delta_{\varepsilon, r}, \quad \forall x \in B_r(x^0),$$

- (iii) *odwzorowanie $F: C(T, E) \rightarrow HL(T, E)$ takie, że $x \mapsto F(\cdot, x(\cdot))$, jest $\|\cdot\|_A$ -ciągłe,*
- (iv) *istnieje dodatnia, Δ -całkowalna funkcja $L \in L^1(T, R)$ taka, że*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(f(J_{t, \tau} \times D)) \leq L(t) \alpha(D), \quad \forall t \in T, \text{ dla każdego ograniczonego zbioru } D \subset E, \text{ gdzie}$$

$$J_{t, \tau} = [t - \tau, t] \cap T,$$
- (v) *funkcja $G: C(T, E) \rightarrow E$ spełnia następujące warunki:*

- *G odwzorowuje zbiór ograniczony w zbiór ograniczony,*
- $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left(\frac{A+1}{\delta_{1, r}} + \max_{x \in B_r(x^0)} \|G(x)\| \right) < 1,$
- *G jest ciągła,*
- *istnieje stała $c < 1$ taka, że $\alpha(G(K)) \leq c \alpha(K)$, dla każdego ograniczonego $K \subset C(T, E)$.*

Wtedy zagadnienie (2.18) posiada przynajmniej jedno globalne ciągłe rozwiązanie.

Zauważmy, że warunki dotyczące funkcji G są spełnione w szczególności, gdy funkcja G jest funkcją Lipschitza. Jeśli bowiem $G: C(T, E) \rightarrow E$ spełnia, dla pewnej stałej $0 < c < 1$ nierówność $\|G(x) - G(y)\| \leq c\|x - y\|$, dla każdego $x, y \in C(T, E)$, to spełnia także warunek $\alpha(G(K)) \leq c\alpha(K)$ dla każdego ograniczonego $K \subset C(T, E)$.

Nie zawsze jest prawdą, że $\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(F(J_{t,\tau} \times D)) \leq \alpha(F(t, D))$, dlatego warunek (iv) jest interesujący oraz może być uogólniony na warunek z funkcją Kamkego po prawej stronie.

Uzyskane Twierdzenie 2.30 zostało zastosowane do udowodnienia następującego, nowego wyniku egzystencjonalnego dla nielokalnego zagadnienia różniczkowego z impulsem (2.15)-(2.17) na prostej.

Twierdzenie 2.31 (25). *Niech $f: [0, b] \times E \rightarrow E$, $I_i: E \rightarrow E$ oraz funkcja $g: PC([0, b], E) \rightarrow E$ spełnia następujące warunki:*

- (i) *dla każdego $y \in PC([0, b], E)$, funkcja $t \in [0, b] \mapsto f(t, y(t))$ jest całkowalna w sensie HL oraz (HL) - pochodne funkcji $f(\cdot, y(\cdot))$ są jednostajnie ciągłe na przedziale $[0, b]_T$ ze względu na funkcję y w dowolnej kuli przestrzeni $PC([0, b], E)$ tzn. dla każdego $r > 0$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje $0 < \delta_{\varepsilon, r} < 1$ takie, że*

$$\left\| (HL) \int_{t'}^{t''} f(s, y(s)) \Delta s \right\| < \varepsilon, \quad \forall |t' - t''| < \delta_{\varepsilon, r}, \quad \forall \|y - y^0\|_C < r,$$

- (ii) *odwzorowanie $f: PC([0, b], E) \rightarrow HL([0, b], E)$ takie, że $y \mapsto f(\cdot, y(\cdot))$, jest $\|\cdot\|_A$ -ciągłe oraz dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$, $y \mapsto I_i(y(t_i))$ jest ciągłe,*

- (iii) *istnieje dodatnia, całkowalna funkcja $L \in L^1([0, b], R)$ taka, że*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(f(J_{t,\tau} \times D)) \leq L(t)\alpha(D), \quad \forall t \in [0, b], \text{ dla każdego ograniczonego zbioru } D \subset E, \text{ gdzie}$$

$$J_{t,\tau} = [t - \tau, t] \cap [0, b],$$

- (iv) *funkcja $g: PC([0, b], E) \rightarrow E$ spełnia następujące warunki:*

- *g odwzorowuje zbiór ograniczony w zbiór ograniczony,*
- *$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left(\frac{b+1}{\delta_{1,r}} + \max_{\|y - y^0\|_C < r} \|g(y)\| + \sum_{i=1}^m \max_{\|y - y^0\|_C < r} \|I_i(y(t_i))\| \right) < 1$,*
- *g jest ciągła,*
- *istnieje stała $c < 1$ taka, że $\alpha(g(K)) \leq c\alpha(K)$, dla każdego ograniczonego $K \subset PC([0, b], E)$.*

Wtedy zagadnienie (2.15)-(2.17) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni $PC([0, b], E)$.

Praca (25) i metoda w niej opisana została wykorzystana w kolejnych pracach dotyczących równań impulsowych np. [98, 99, 120, 121].

3. Omówienie wyników niewchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej.

Tematyka moich prac, poza wcześniej omówionymi, skupia się wokół badania problemu rozwiązalności równań różniczkowych, całkowych, różniczkowo-całkowych, a w ostatnim czasie także

równań dynamicznych na skali czasowej. Jestem ponadto współautorką 3 prac z teorii aproksymacji. Uzyskane przeze mnie wyniki dzielę na trzy części.

3.1 Zastosowanie całek nieabsolutnych do równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo - całkowych.

Pierwsza grupa prac jest poświęcona zastosowaniom całek nieabsolutnych do równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo całkowych. Do tej grupy wyników zaliczam prace (1-3,5-6, 9-12, 14, 20).

Prace (1) i (2) zostały opublikowane jeszcze przed doktoratem.

W pracy (1), wspólnej z I. Kubiaczykiem, rozważamy zagadnienie Cauchy'ego $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$ z zastosowaniem uogólnionej całki Henstocka-Kurzweila z funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha. Otrzymany przez nas wynik, ogólniejszy od wcześniej uzyskanych wyników tego typu, wykorzystujemy do uzyskania rozwiązania inkluzji różniczkowej: $x'(t) \in F(t, x(t))$, $x(0) = x_0$ w przestrzeni Banacha.

Niech $F: I_a \times E \rightarrow 2^E$ będzie multifunkcją. Zbiór

$$\left\{ \int_0^a f(s, x(s)) ds : f(\cdot, x(\cdot)) \in F(\cdot, x(\cdot)), f \text{ jest całkowna w sensie HL} \right\}$$

nazywamy *całką HL z multifunkcji F* na przedziale I_a .

Niech $G(x)(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s)) ds$, dla $t \in I_a$.

Twierdzenie (1). Niech multifunkcja $F(\cdot, x(\cdot))$ posiada selektor $f(\cdot, x(\cdot))$ całkowny w sensie HL dla każdego $x \in C(x_0, a) = \{x \in C(I_a, E) : x(0) = x_0, \|x\| \leq \|x_0\| + b, a, b > 0\}$ taki, że f jest funkcją Carathéodory'ego spełniającą warunek $\alpha(F(t, X)) \leq h(t, \alpha(X))$, gdzie h oznacza funkcję Kamkego, α miarę niezwartości Kuratowskiego. Niech ponadto zbiór $G = \{G(x) : x \in C(x_0, a)\}$ będzie jednakowo ciągły i jednostajnie ACG_{*} na przedziale I_a . Wtedy istnieje rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego $x'(t) \in F(t, x(t))$, $x(0) = x_0$ na przedziale I_a , dla pewnego d takiego, że $0 < d \leq a$.

W pracy (2) zdefiniowana została po raz pierwszy nowa całka Henstocka-Kurzweila-Pettisa, która pozwala uzyskiwać ogólniejsze wyniki dla równań, przy istotnie słabszych założeniach niż dotychczas. Wprowadzoną całkę stosujemy do dowodu twierdzenia o istnieniu pseudo-rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$. Ciągłość funkcji f zastępujemy słabą – słabą ciągową ciągłością funkcji, całkowność słabą całkownością w sensie Henstocka-Kurzweila-Pettisa.

Wyniki uzyskane w tej pracy zostały zaprezentowane na międzynarodowej konferencji „International Scientific Conference on Mathematics” w Koszycach na Słowacji w 1999 r. i spotkały się z dużym zainteresowaniem ze strony słuchaczy. Z tego też względu rozszerzenie wyników, o których „poinformowaliśmy” w materiałach konferencyjnych zostało opublikowane w pracy (6).

Praca (3) stanowi wstęp do rozważań o problemie istnienia rozwiązania równania różniczkowo-całkowego postaci:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s))ds\right), \quad t \in I_a, a \in R_+, x_0 \in E,$$

$$x(0) = x_0.$$

Praca jest podzielona na dwie części. W części pierwszej, o funkcjach f, k, x zakładam, że są funkcjami o wartościach w przestrzeni Banacha, całkowalnymi w sensie Bochnera i udowadniam twierdzenie o istnieniu rozwiązania typu Carathéodory'ego powyższego równania. W części drugiej omawianej pracy, udowadniam twierdzenie egzystencjalne dla powyższego zagadnienia przy założeniu, że funkcje f, k, x są całkowalne w sensie Pettisa. Wykorzystując własności słabej całki Pettisa, słabych miar niezwartości oraz twierdzenie o punkcie stałym dla odwzorowań słabo – słabo ciągowo ciągłych uzyskuję istnienie słabego rozwiązania tego problemu.

To samo zagadnienie rozpatruję także w pracy (12) udowadniając istnienie silnego rozwiązania, z całką typu HL po prawej stronie równania. Stosując ten typ całki rozszerzam klasę funkcji objętą tym równaniem.

Innemu zagadnieniu różniczkowo-całkowemu poświęcona jest praca (11). Rozpatruję tu równanie postaci:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t k_1(t, s)g(s, x(s))ds, \int_0^a k_2(t, s)h(s, x(s))ds\right), \quad t \in I_a, a \in R_+, x_0 \in E$$

$$x(0) = x_0,$$

gdzie $f: I_a \times E \times E \times E \rightarrow E$, $g: I_a \times E \rightarrow E$, $h: I_a \times E \rightarrow E$.

W pierwszej części pracy, wspólnej z G. Nowakiem, udowadniamy istnienie rozwiązania powyższego zagadnienia z całką typu Henstocka-Kurzweila dla szerszej klasy funkcji niż dotychczas, uwzględniając funkcje wysoko oscylujące. W części drugiej, osłabiając założenia ciągłości i całkowalności funkcji f pokazujemy istnienie pseudo-rozwiązania tego zagadnienia.

W pracy (10) rozpatruję zagadnienie całkowe postaci:

$$x(t) = f(t) + \int_0^a k_1(t, s)x(s)ds + \int_0^a k_2(t, s)g(s, x(s))ds, \quad t \in I_a, a \in R_+,$$

gdzie $g: I_a \times E \rightarrow E$ jest funkcją taką, że

$$g(t, x(t)) = t^2 x(t) + h(t)x_0, \quad x_0 \in E, |t| < 1, \|x\| < 1, \quad h(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}(t^2 \sin t^{-2}), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Ponadto zakładam, że funkcje $x, f: I_a \rightarrow E$ oraz funkcje $k_1, k_2: I_a \times I_a \rightarrow R_+$ są mierzalnymi funkcjami takimi, że $k_1(t, \cdot), k_2(t, \cdot)$ są ciągłe.

Ponieważ funkcje $k_1(t, s)x(s)$ oraz $k_2(t, s)g(s, x(s))$ nie są całkowalne w sensie Bochnera, istnieje konieczność wykorzystania szerszej klasy całek niż całki Bochnera. Opierając się na własnościach całek typu Henstocka-Kurzweila, własnościach silnych miar niezwartości oraz twierdzeniu Möncha o punkcie stałym, udowadniam istnienie rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia.

Dużą grupę prac stanowią te mówiące o nieliniowych równaniach całkowych Volterry, Urysohna i Fredholma.

W literaturze znajdziemy bardzo dużo prac dotyczących równań całkowych, wykorzystujących własności całki Bochnera czy Pettisa. W ostatnich dwóch dekadach, badając równania całkowe (i nie tylko) uwzględniono także funkcje wysoko oscylujące. Uzyskano nowe wyniki dla funkcji na prostej przy użyciu całki Henstocka-Kurzweila.

W pracy (5) rozważam równania całkowe Volterry i Urysohna w ogólnym przypadku przestrzeni Banacha. Stosując własności całki Henstocka-Kurzweila, uzyskuję rozwiązanie odpowiednich zagadnień dla funkcji wysoko oscylujących, rozszerzając wcześniej uzyskane wyniki w pracach [31, 56, 60, 73, 81, 82]. Dowody tych wyników są znacznie trudniejsze technicznie niż w przypadku równań określonych przy pomocy całki Bochnera. Wynika to w szczególności z faktu, że całki nieabsolutnie zbieżne, w szczególności całka Henstocka-Kurzweila nie posiadają pewnych własności charakteryzujących całkę Bochnera. Dla przykładu, moduł funkcji całkowlanej w sensie Henstocka-Kurzweila nie musi być całkowlany.

Niech $\tilde{B} = \{x \in C(I_a, E) : \|x\| \leq \|\varphi(\cdot)\| + \lambda p, \lambda, p > 0\}$ oraz niech $r(K)$ oznacza promień spektralny operatora całkowego $K(u)(t) = \int_0^a k(t, s)u(s)ds, u \in \tilde{B}, t \in I_a$.

Rozważmy nieliniowe równania całkowe Urysohna

$$x(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^a f(t, s, x(s))ds, \lambda > 0, t \in I_a,$$

gdzie f i φ są funkcjami o wartościach w przestrzeni Banacha oraz całki są rozumiane jako całki typu HL.

Zdefiniujmy operator całkowy $F(x)(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^a f(t, s, x(s))ds, \lambda > 0, t \in I_a, x \in \tilde{B}$.

Twierdzenie (5). *Założmy, że dla każdej ciągłej funkcji $x: I_a \rightarrow E_1$ i każdego $s \in I_a$, funkcja $f(\cdot, s, x(s))$ jest całkowlana w sensie HL, f jest funkcją Carathéodory'ego spełniającą warunek*

$$\alpha(f(t, s, X)) \leq h(t, s, \alpha(X)), 0 \leq s \leq t \leq a,$$

dla dowolnego ograniczonego zbioru $X \subset E_1$, gdzie h oznacza funkcję Kamkego.

Założmy, że zbiór $H = \{F(x) : x \in \tilde{B}\}$ jest jednakowo ciągły, wspólnie ograniczony oraz jednostajnie ACG na I_a . Wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie zagadnienia na przedziale I_a , dla pewnego d takiego, że $0 < d \leq a$ z funkcją początkową φ .*

Rozpatrzmy teraz całkowe równanie Volterry:

$$x(t) = \varphi(t) + \int_0^t f(t, s, x(s))ds, t \in I_a.$$

Zdefiniujmy operator całkowy $G(x)(t) = \varphi(t) + \int_0^t f(t, s, x(s))ds$, dla $t \in I_a, x \in \tilde{B}_1$, gdzie

$$\tilde{B}_1 = \{x \in C(I_a, E) : \|x\| \leq \|\varphi(\cdot)\| + l, l > 0\}.$$

Twierdzenie (5). *Założmy, że dla każdej ciągłej funkcji $x: I_a \rightarrow E_1$ i każdego $s \in I_a$, funkcja $f(\cdot, s, x(s))$ jest całkowlana w sensie HL, f jest funkcją Carathéodory'ego spełniającą warunek*

$$\alpha(f(t, s, X)) \leq h(t, s, \alpha(X)), 0 \leq s \leq t \leq a,$$

dla każdego ograniczonego zbioru $X \subset E_1$, gdzie h oznacza funkcję Kamkego.

Założmy, że zbiór $G = \{G(x): x \in \tilde{B}_1\}$ jest jednakowo ciągły, wspólnie ograniczony oraz jednostajnie ACG_* na I_a . Wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie zagadnienia na przedziale I_d , $0 < d \leq a$ z funkcją początkową φ .

Wykorzystując dla operatorów F i G twierdzenie o punkcie stałym dla odwzorowań słabo – słabo ciągowo ciągłych, własności słabych miar niezwartości oraz całki HKP pokazałam, że istnieje przynajmniej jedno pseudo – rozwiązanie tych zagadnień przy najslabszych, znanych dotychczas, założeniach o funkcji f . Ciągłość funkcji zastępuję słabą-słabą ciągową ciągłością, całkowalność słabą całkowalnością w sensie Henstocka-Kurzweila-Pettisa.

Głównymi wynikami pracy (20) są następujące twierdzenia:

Twierdzenie (20). Założmy, że dla każdej ACG_* funkcji $x: I_a \rightarrow E$ i każdego $t \in I_a$, funkcja $f(t, \cdot, x(\cdot))$ jest całkowalna w sensie HKP, $f(t, s, \cdot)$ jest słabo-słabo ciągowo ciągła oraz istnieje mierzalna funkcja $k: I_a \times I_a \rightarrow R_+$ taka, że $k(t, \cdot)$ jest funkcją ciągłą oraz

$$\beta(f(t, J, X)) \leq \sup_{s \in J} k(t, s) \beta(X),$$

dla każdego ograniczonego zbioru $X \subset E$ oraz $J \subset I_a$. Założmy, że zbiór $G = \{G(x): x \in \tilde{B}\}$ jest jednakowo ciągły oraz jednostajnie ACG_* na I_a . Ponadto niech $\lambda r(K) < 1$, gdzie $\lambda \in R_+$ oraz $r(K)$ oznacza promień spektralny operatora całkowego $K(u)(t) = \int_0^a k(t, s)u(s)ds$, $u \in \tilde{B}$, $t \in I_a$. Wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie zagadnienia na przedziale I_d , dla pewnego d takiego, że $0 < d \leq a$ z funkcją początkową φ .

Obok problemu istnienia rozwiązania równania całkowego zajmowałam się także własnościami zbioru rozwiązań równań całkowych. Problematyka ta wywodzi się ze znanego twierdzenia H. Knesera z 1923 roku dotyczącego zagadnienia Cauchy'ego $x'(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, gdzie f jest funkcją ciągłą na zbiorze $P = \{(t, x) \in R^{n+1}: 0 \leq t \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$. Mówi ono, że zbiór wszystkich rozwiązań tego zagadnienia na pewnym przedziale zwartym J jest niepusty, spójny i zwarty w przestrzeni funkcji ciągłych $C(J, R^n)$. W 1955 roku M. Hukuhara udowodnił twierdzenie Knesera dla zbiorów ciągłych rozwiązań nieliniowego równania całkowego Volterry:

$$x(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t f(t, s, x(s))ds, t \in I_a.$$

W przypadku funkcji o wartościach w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha badanie istnienia oraz własności zbioru rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego oraz równania Volterry, gdzie I_a jest przedziałem ograniczonym lub nieograniczonym zawartym w R , a całkę rozumiemy w sensie Bochnera, stwarza sytuację zupełnie odmiennej natury aniżeli w przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych.

Już bowiem w 1950 roku Dieudonné podał w przypadku przestrzeni c_0 przykład funkcji ciągłej takiej, że zagadnienie Cauchy'ego nie posiada żadnego rozwiązania. Aby zagwarantować więc istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego oraz równania Volterry w tym przypadku, należy nałożyć na funkcję f dodatkowe warunki. Jedną z podstawowych grup takich warunków stanowią warunki

sformułowane w terminach miar niezwartości Kuratowskiego [21, 22]. Pierwszą pracą wykorzystującą miarę niezwartości Kuratowskiego do badania nieliniowego równania całkowego Volterry w przestrzeniach Banacha jest praca S. Szufli [105] z 1974 roku.

Włączając się w nurt badań nad własnościami zbioru rozwiązań równań całkowych pokazałam w pracy (20), że zbiór S wszystkich pseudo-rozwiązań równania Volterry jest zwarty i spójny w przestrzeni $(C(I_a, E), \omega)$.

Twierdzenie (20). Załóżmy, że dla każdej ACG_* funkcji $x: I_a \rightarrow E$ i każdego $t \in I_a$, funkcja $f(t, \cdot, x(\cdot))$ jest całkowalna w sensie HKP, $f(t, s, \cdot)$ jest słabo-słabo ciągowo ciągła oraz istnieje mierzalna funkcja $k_1: I_a \times I_a \rightarrow R_+$ taka, że $k_1(t, \cdot)$ jest funkcją ciągłą oraz

$$\beta(f(t, J, X)) \leq \sup_{s \in J} k_1(t, s) \beta(X),$$

dla każdego ograniczonego zbioru $X \subset E$ oraz $J \subset I_a$. Załóżmy, że zbiór $G = \{G(x): x \in \tilde{B}_1\}$ jest jednakowo ciągły oraz jednostajnie ACG_* na I_a . Ponadto niech $r(K) < 1$, gdzie $r(K)$ oznacza promień spektralny operatora całkowego $K(u)(t) = \int_0^t k_1(t, s)u(s)ds$, $u \in \tilde{B}_1$, $t \in I_a$. Wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie równania Volterry na przedziale I_a , dla pewnego d takiego, że $0 < d \leq a$ z funkcją początkową φ . Zbiór S wszystkich rozwiązań równania na I_a jest zwarty i spójny w przestrzeni $(C(I_a, E), \omega)$.

Wśród równań całkowych rozpatruję także nieliniowe równania Fredholma, które mogą być rozważane jako perturbacja równań liniowych (14):

$$x(t) = f(t) + \int_0^a k_1(t, s)x(s)ds + \int_0^a k_2(t, s)g(s, x(s))ds, \quad t \in I_a, a \in R_+.$$

Niech $\tilde{B}_2 = \{x \in C(I_a, E): x(0) = f(0), \|x\| \leq \|f(\cdot)\| + M, M > 0\}$. Zdefiniujmy operator całkowy $F: C(I_a, E) \rightarrow C(I_a, E)$ w następujący sposób

$$F(x)(t) = f(t) + \int_0^a k_1(t, s)x(s)ds + \int_0^a k_2(t, s)g(s, x(s))ds, \quad t \in I_a, a \in R_+, x \in \tilde{B}_2.$$

Ponadto niech $r(K)$ oznacza promień spektralny operatora

$$K(u)(t) = \int_0^a (k_1(t, s) + k_2(t, s))u(s)ds, \quad t \in I_a, a \in R_+, u \in \tilde{B}_2.$$

Twierdzenie (14). Załóżmy, że dla każdej ACG_* funkcji $x: I_a \rightarrow E$, funkcja $g(\cdot, x(\cdot))$ jest całkowalna w sensie HKP, $g(s, \cdot)$ jest słabo-słabo ciągowo ciągła oraz funkcje $k_1, k_2: I_a \times I_a \rightarrow R_+$ są mierzalne oraz $k_1(t, \cdot), k_2(t, \cdot)$ są ciągłe. Ponadto dla $L > 0$ spełniony jest warunek

$$\beta(g(I, X)) \leq L\beta(X), \quad I \subset I_a,$$

dla każdego ograniczonego zbioru $X \subset E$. Załóżmy, że zbiór $\{F(x): x \in \tilde{B}_2\}$ jest zbiorem jednakowo ciągłym i jednostajnie ACG_* na I_a . Ponadto niech $(1 + L)r(K) < 1$. Wtedy istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie zagadnienia na przedziale I_a , dla pewnego d takiego, że $0 < d \leq a$ z funkcją początkową f .

W pracy (31) omówione zostało istnienie dodatnich rozwiązań nieliniowego równania całkowego Hammersteina

$$u(t) = g(t, u(t)) + \int_0^1 k(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in [0, 1].$$

W dowodzie wykorzystane zostało twierdzenie o punkcie stałym Legetta-Wiliamsa.

3.2. Równania dynamiczne na skali czasowej.

W tym podrozdziale krótko omówię wyniki uzyskane w pracach (18, 23-24, 26-28).

W pracy (26) dowodzimy istnienia ciągłego rozwiązania oraz rozwiązania typu Carathéodory'ego dynamicznego zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{aligned} x^{(\Delta)}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in I_a = [0, a] \cap T, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

w przestrzeni Banacha dla funkcji odpowiednio ciągłej lub spełniającej warunki Carathéodory'ego, zdefiniowanej na skali czasowej. Wyniki tej pracy są szczególnie przydatne do dyskretyzacji ciągłych problemów w przestrzeniach Banacha.

W pracy (18) rozpatrujemy powyższe zagadnienie na nieograniczonej skali czasowej T . Pokazujemy, że dynamiczne zagadnienie Cauchy'ego posiada ciągłe rozwiązanie oraz rozwiązanie typu Carathéodory'ego. Otrzymane twierdzenia są nowe nie tylko dla funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha, ale także dla funkcji rzeczywistych. Dowód opiera się na twierdzeniu o punkcie stałym Sadovskiego oraz lemacie Ambrosetti'ego dla funkcji zdefiniowanej na skali czasowej.

W pracy (23) rozważam równanie różniczkowe (2.5) z Δ -pochodną rzędu m funkcji x oznaczoną $x^{(\Delta m)}(t)$. Funkcja f o wartościach w przestrzeni Banacha spełnia pewne warunki wyrażone w języku miar niezwartości. Dowód twierdzenia opiera się na twierdzeniu o punkcie stałym Sadovskiego oraz na udowodnionych w pracy lemacie Ambrossetti'ego dla funkcji zdefiniowanej na skali czasowej oraz lemacie o wejściu z miarą niezwartości Kuratowskiego pod znak Δ -całki.

Równania różniczkowo-całkowe oraz dynamiczne równania różniczkowo-całkowe na skali czasowej są badane przez wielu matematyków i mają liczne zastosowania. O tych zastosowaniach można przeczytać między innymi w książce Corduneanu [45]. Problemy te są wciąż badane i rozwijane. Y. Xing, W. Ding, M. Han w [112] udowodnili np. istnienie okresowych rozwiązań zagadnienia brzegowego dla nieliniowych równań różniczkowo-całkowych na skali czasowej.

W pracy (24) rozpatruję dynamiczne równanie różniczkowo-całkowe (2.6), stosując po raz pierwszy nowy typ Δ -całek, a mianowicie Δ -całkę Henstocka-Kurzweila. Pozwoliło mi to rozważyć szerszą klasę funkcji niż dotychczas.

W pracy (27), wspólnej z I. Kubiaczykiem i S. H. Sakerem omawiamy nowe warunki oscylacyjności dla równania dynamicznego

$$(r(t)(m(t)y(t) + p(t)y(\tau(t)))^\Delta + q(t)f(y(\delta(t))) = 0$$

na skali czasowej nieograniczonej z góry, gdzie m, p, r, τ, δ są rzeczywistymi, dodatnimi, Δ -ciągłymi funkcjami zdefiniowanymi na skali czasowej. Otrzymane wyniki uzupełniają i poprawiają znane już

warunki oscylacyjności dla równań różnicowych i różniczkowych z opóźnionym argumentem. W pracy podajemy przykłady ilustrujące nasze wyniki.

Praca (28) poświęcona jest nieliniowemu zagadnieniu Sturma – Liouville’a postaci (2.7)-(2.8) rozpatrywanemu w przestrzeni Banacha.

Przez rozwiązanie powyższego zagadnienia rozumiemy funkcję $x: T \rightarrow E$, Δ -różniczkowalną na T^k , $x^\Delta: T \rightarrow E$ jest funkcją ∇ -różniczkowalną na $T^* = T^k \cap T_k$, $x^{\Delta\nabla}: T^* \rightarrow E$ jest ciągła oraz spełnia powyższe równanie wraz z warunkami brzegowymi dla każdego $t \in T^*$.

Główny wynik pracy mówi o istnieniu rozwiązania omawianego zagadnienia.

W pracy (22), udowodnione zostały twierdzenia o punkcie stałym typu Leray’a-Schaudera i Furi-Pera dla funkcji wielowartościowych, słabo-słabo ciągowo ciągłych, przy użyciu słabej całki Henstocka-Kurzweila-Pettisa. Otrzymane przez nas wyniki są wykorzystane do badania problemów brzegowych na przedziałach niezwartych. Wyniki tej pracy zostały umieszczone w monografii [74].

3.3. Teoria aproksymacji.

Omówię tu wyniki uzyskane w pracach (13, 17, 19), których jestem współautorką. W pracach (13) i (19) rozpatrywane są operatory typu Favarda-Kantorovicha

$$F_n^* f(x) = n \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n,k}(x; \gamma) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt,$$

oraz operatory typu Favarda-Durrmeyera

$$\tilde{F}_n f(x) = n \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n,k}(x; \gamma) \int_{-\infty}^{\infty} p_{n,k}(t; \gamma) f(t) dt, \quad x \in R, n \in N,$$

gdzie $p_{n,k}(x; \gamma) = \frac{1}{n\gamma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\gamma_n^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right)$.

Operatory te są całkową modyfikacją dobrze znanych uogólnionych operatorów Favarda [55]

$$F_n f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k/n) p_{n,k}(x; \gamma), \quad x \in R, n \in N.$$

W przypadku, gdy $\gamma_n^2 = v/(2n)$ ($v > 0$), operator F_n staje się operatorem Favarda wprowadzonym przez J. Favarda [55], jako dyskretny analog całki Weierstrassa. Pewne własności aproksymacyjne klasycznych operatorów $F_n f$ można znaleźć w pracach [23] i [24], a uogólnionych operatorów Favarda w pracach [57] i [89].

W pracach (13) i (19) podaliśmy oszacowania dla rzędu normowej zbieżności tych operatorów w przestrzeni funkcji z wagą eksponencjalną: $L_{p,\sigma}(R) = \{f: \|wf\|_p < \infty\}$, dla $1 \leq p < \infty$, gdzie $w(x) = \exp(-\sigma x^2)$, $\sigma > 0$,

$$\|g\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|g\|_{\infty} = \operatorname{essup}_{x \in R} |g(x)|.$$

Gawroński i Stadtmüller w [57] otrzymali oszacowanie dla funkcji ograniczonych $f \in C(R)$ postaci

$$\omega(F_n; t) \leq 140\omega(f; t) + 16\pi t \|f\|.$$

Z kolei dla funkcji ograniczonych z wagą wielomianową $f \in C_m(R) = \{f: \|w_m f\|_\infty < \infty\}$, $w_m(x) = (1 + x^{2m})^{-1}$, Pych-Taberska [89] udowodniła, że

$$\omega_2(F_n; t)_m \leq K((1 + t_0^2)\omega_2(f; t)_m + t^2\|f\|_m).$$

Włączając się w nurt tych badań, otrzymaliśmy nierówność tego samego typu dla r -tego ($r \in N$) wagowego modułu gładkości dla funkcji z wagą eksponencjalną $f \in L_{p,\sigma}(R)$,

$$\omega_r(L_n; t)_{\sigma_1,p} \leq K((1 + t_0^2)\omega_r(f; t)_{\sigma,p} + t^r\|w_\sigma f\|_p), \quad (\sigma_1 > \sigma > 0),$$

gdzie $\omega_r(f; t)_{\sigma,p} = \sup_{|h| \leq t} \|w_\sigma \Delta_h^r f\|_p$, $\Delta_h^r f = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^i f(x + h(r/2 - i))$ oraz $L_n f$ oznacza

operator Favarda-Kantorovicha lub Favarda-Durrmeyerera.

W pracy (17) rozpatrywane są zmodyfikowane operatory Szasza-Mirakyan-Kantorovicha.

$$M_n^* f(x) = b_n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x; a_n) \int_{k/b_n}^{(k+1)/b_n} f(t) dt, \quad x \in [0, \infty),$$

gdzie $p_{n,k}(x; a_n) = \exp(-a_n x) \frac{(a_n x)^k}{k!}$ oraz (a_n) i (b_n) są ciągami liczb dodatnich natomiast całka jest rozumiana w sensie Denjoya-Perrona.

Omówione w pracy operatory są całkowym uogólnieniem operatorów zdefiniowanych w pracy [110].

W pracy podany został rząd punktowej zbieżności tych operatorów przez wagowy moduł ciągłości.

4. Wskaźniki dodatkowe.

- Sumaryczny impact factor publikacji naukowych, zgodnie z rocznikiem publikacji: 8,992
- Liczba cytowań publikacji według bazy:
 - Web of Science : 19,
 - Scopus: 41,
 - Math Sci Net (Mathematical Reviews) : 80,
 - Google Scholar: 155.
- Indeks Hirsha opublikowanych publikacji według bazy:
 - Web of Science: 2,
 - Scopus: 3,
 - Math.SciNet: 6,
 - Google Scholar: 7.

Osiągnięcia / nagrody.

1. Stypendium Polskiej Akademii Nauk dla młodych matematyków, 1999 r.
2. Nagroda Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki za osiągnięcia naukowe w 2000 r.
3. Nagroda Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki za osiągnięcia naukowe w 2001 r.
4. Nagroda Rektora UAM III stopnia za osiągnięcia naukowe w 2007 r.
5. Nagroda Rektora UAM III stopnia za osiągnięcia naukowe w 2010 r.

Udział w konferencjach naukowych.

1. Workshop Gronów 1999.
2. 4th Conference on Functional Analysis and Approximation Theory - FAAT Maratea 2000, Włochy .
3. The Czechoslovak International Conference on Differential Equations and Their Applications, Equadiff 10, Praga, Czechy 2001.
4. Function Space VI, Wrocław 2001.
5. International Conference on Differential Equations dedicated to the 100th anniversary of Yaroslav Borysovykh Lopatynski, Lwów 2006.
6. Equadiff 11, Wiedeń, Austria 2007.
7. Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Žilina, Słowacja 2008.
8. Progress on Difference Equations, PODE'09, Poznań 2009.
9. The Czechoslovak International Conference on Differential Equations and Their Applications, Equadiff 12, Brno, Czechy 2009.
10. 4th Podlasie Conference on Mathematics, Białystok 2010.
11. Colloquium on Differential and Integration Theory, Krtiny, Czechy 2010.
12. 9th International Congress ISAAC 2013, Kraków 5-10.08.2013.
13. Equadiff 13, Praga 26-30 sierpień 2013.
14. The 6th meeting of the series of conferences: Integration, Vector Measures and Related Topics, Będlewo 2014.
15. 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Vienna – Austria, IECMSA -2014.

Udział w komitetach organizacyjnych

- Międzynarodowa Konferencja z okazji 10-tej rocznicy śmierci prof. Orlicza, Poznań 2000 r.
- Międzynarodowa Konferencja z okazji 100-tnej rocznicy urodzin prof. Orlicza, Poznań 2004 r.
- Zjazd Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Poznań 2004 r.

Pełnione funkcje.

- Sekretarz Oddziału Poznańskiego PTM w latach 2011 - 2013

Recenzje dla międzynarodowych i krajowych czasopism naukowych.

- Abstract and Applied Analysis
- Applied Mathematical Letters
- Demonstratio Mathematica

- *Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization*
- *Electronic Journal of Differential Equations*
- *Fasciculi Mathematici*
- *Journal of Mathematical Analysis and Applications*
- *Mathematical and Computer Modeling*
- *Mathematica Slovaca*
- *Mediterranean Journal of Mathematics.*

Rodzaje prowadzonych zajęć:

- analiza matematyczna (ćwiczenia)
- analiza matematyczna dla informatyków (ćwiczenia)
- równania różniczkowe zwyczajne (ćwiczenia)
- równania różniczkowe cząstkowe (ćwiczenia)
- matematyka dla studentów akustyki i protetyki słuchu (wykład i ćwiczenia)
- matematyka dla studentów astronomii (wykład i ćwiczenia)
- analiza matematyczna dla studentów Studium Podyplomowego z Matematyki (ćwiczenia)
- geometria dla studentów Studium Podyplomowego z Matematyki (wykład i ćwiczenia)
- matematyka dyskretna dla nauczycieli (ćwiczenia)
- repetytorium z matematyki

5. Spis publikacji

- (1) *Differential equations in Banach spaces and Henstock-Kurzweil integrals*, (współautor: I. Kubiacyk), *Discuss. Math. Differ. Incl.* 19(1-2), 35-43, (1999).
- (2) *Henstock-Kurzweil and Henstock-Kurzweil-Pettis integrals and some existence theorems*, (współautorzy: M. Cichoń, I. Kubiacyk), Hascák, A. (ed.) et al., *International Scientific Conference on Mathematics. Proceedings of the conference*, Herlany, Slovakia, October 21-23, 1999. Kosice: University of Technology Kosice, Faculty of Electrical Engineering and Informatics, 53-56, (2000).
- (3) *Existence theory for nonlinear Volterra integral and differential equations*, *J. Inequal. Appl.*, 6 (3), 325-338, (2001).
- (4) *Retarded functional differential equations in Banach spaces and Henstock-Kurzweil integrals*, *Demonstr. Math* 35 (1), 49-60, (2002).
- (5) *On the existence of solutions of nonlinear integral equations in Banach spaces and Henstock-Kurzweil integrals*, *Ann. Pol. Math.* 83 (3), 257-267, (2004).
- (6) *The Henstock-Kurzweil-Pettis integrals and existence theorems for the Cauchy problem*, (współautorzy: M. Cichoń, I. Kubiacyk), *Czech. Math. J.* 54 (2), 279-289, (2004).
- (7) *The set of pseudo solutions of the differential equation $x^{(m)} = f(t, x)$ in Banach spaces* (współautor: I. Kubiacyk), *Publ. Math. Debrecen*, 68/3-4, 297-308, (2006).
- (8) *The existence theory for the differential equation $x^{(m)} = f(t, x)$ in Banach spaces and Henstock-Kurzweil integral*, *Demonstr. Math.* 40 (1), 115-124, (2007).
- (9) *Retarded functional differential equations in Banach spaces and Henstock-Kurzweil-Pettis integrals*, *Discuss. Math. Differ. Incl.* 27, 315-327, (2007).

- (10) *Existence of solutions of nonlinear integral equations and Henstock-Kurzweil integrals*, Commentationes Mathematicae, 47 (2), 227-238, (2007).
- (11) *Nonlinear integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces*, (współautor: G. Nowak), Int. J. Math. Sci, article ID 65947, 1-14, (2007).
- (12) *Existence theory for integrodifferential equations and Henstock-Kurzweil integral in Banach spaces*, J. Appl. Math., article ID 31572, 1-12, (2007).
- (13) *On the generalized Favard-Kantorovich and Favard-Durrmeyer operators in exponential function spaces*, (współautor: G. Nowak), J. Inequal. Appl. article ID 75142, 1-12, (2007).
- (14) *Nonlinear integral equations in Banach spaces and Henstock-Kurzweil-Pettis integrals*, Dynam. Syst. Appl. 17, 97-108, (2008).
- (15) *The set of solutions of integrodifferential equations and the Henstock-Kurzweil-Pettis integral in Banach spaces*, (współautorzy: R. Agarwal, D. O'Regan), Bull. Aust. Math. Soc. 78, 507-522, (2008).
- (16) *Weak solutions for the dynamic Cauchy problem in Banach spaces*, (współautorzy: M. Cichoń, I. Kubiacyk, A. Yantir), Nonlin. Anal. 71, 2936-2943, (2009).
- (17) *Some approximation properties of modified Szasz-Mirakyan-Kantorovich operators*, (współautor: G. Nowak), Rev. Anal. Num. Th. Approx. 38(1), 73-82, (2009).
- (18) *Existence of solutions of the dynamic Cauchy problem on infinite time scale intervals*, (współautor: I. Kubiacyk), Discuss. Math., Differ. Incl. 29, 113-126, (2009).
- (19) *Theorems for generalized Favard-Kantorovich and Favard-Durrmeyer operators in exponential function spaces*, (współautor G. Nowak), Math. Slovaca 60 (2), 265-278, (2010).
- (20) *The set of solutions of Volterra and Urysohn integral equations in Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math. 40 (4), 1313-1331, (2010).
- (21) *Integro-differential equations on time scales with Henstock-Kurzweil-Pettis delta integrals*, Abstr. Appl. Analysis, ID 836347, doi: 10.1155/2010/836347, (2010).
- (22) *On some fixed point theorems for I -set weakly contractive multi-valued mappings with weakly sequentially closed graph* (współautor: Afif Ben Amar), Advances in Pure Mathematics, 1, 163-169 doi:10.4236/14030, (2011).
- (23) *Dynamic equations $x^{(\Delta_m)}(t) = f(t, x(t))$ on time scales*, Demonstratio Mathematica, 44(2), 317-331, (2011).
- (24) *Integro-differential equations on time scales with Henstock-Kurzweil delta integrals* Discuss. Math., Differ. Incl., Control and Optimization 31, 71-90, (2011).
- (25) *Impulsive nonlocal differential equations through differential equations on time scales*, (współautorzy: M. Cichoń, B. Satco), Appl. Math. Comput. 218, 2449-2458, (2011).
- (26) *Existence of solutions of the dynamic Cauchy problem in Banach spaces*, (współautorzy: M. Cichoń, I. Kubiacyk, A. Yantir), Demonstratio Mathematica, 45(3), 561-573, (2012).
- (27) *Oscillation criteria for nonlinear neutral functional dynamic equations on time scales* (współautorzy: I. Kubiacyk, S.H. Saker), Mathematica Slovaca 63(2), 263-290, (2013).
- (28) *Nonlinear Sturm-Liouville dynamic equation with a measure of noncompactness in Banach spaces*, (współautorzy: I. Kubiacyk, A. Yantir), Bulletin of the Belgian Mathematical Society, 2013, Volume: 20, 587-601, (2013).
- (29) *Weak solutions for the dynamic equations $x^{(\Delta_m)}(t) = f(t, x(t))$ on time scales*, (współautor: S.H. Saker), Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No 21, 1-13, (2014).
- (30) *Carathéodory solutions of Sturm-Liouville dynamic equation with a measure of noncompactness in Banach spaces* (współautorzy: A. Yantir, I. Kubiacyk), Central European Journal of Mathematics, Open Math. 2015; 13: 6-15.
- (31) *Positive solutions of perturbed nonlinear Hammerstein integral equation* (współautor: M. Zima), przyjęta do druku w Mathematica Slovaca, sierpień 2015 r.

Książki i Skrypty

1. Elementy matematyki dla informatyków, (współautorzy: M. Cichoń, I. Kubiacyk, A. Waszak), UAM Poznań, (1999), skrypt.

6. Prace cytowane w autoreferacie

- [1] A. Ben Amar, *Some fixed point theorems and existence of weak solutions of Volterra integral equation under Henstock-Kurzweil-Pettis integrability*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 52(2011), 177-181.
- [2] A. B. Amar, *On an integral equation under Henstock – Kurzweil – Pettis integrability*, Arab. J. Math. 4(2015), 91-99.
- [3] R. P. Agarwal, M. Bohner, *Basic calculus on time scales and some of its applications*, Result Math. 35 (1999), 3-22.
- [4] R. P. Agarwal, M. Bohner, A. Peterson, *Inequalities on time scales: a survey*, Math. Inequal. Appl. 4 (2001), no. 4, 535–557.
- [5] R. P. Agarwal, D. O'Regan, *Nonlinear boundary value problems on time scales*, Nonli. Anal. 44 (2001), 527-535.
- [6] R. P. Agarwal, D. O'Regan, *Difference equations in Banach spaces*, J. Aust. Math. Soc. ser. A 64 (1998), 277-284.
- [7] R. P. Agarwal, D. O'Regan, *A fixed point approach for nonlinear discrete boundary value problems*, Comp. Math. Appl. 36 (1998), 115-121.
- [8] R. P. Agarwal, D. O'Regan, S.H. Saker, *Properties of bounded solutions of nonlinear dynamic equations on time scales*, Can. Appl. Math. Q. 14 (2006), 1-10.
- [9] R. Agarwal, V. Lupulescu, D. O'Regan, G. Rahman, *Nonlinear fractional differential equations in nonreflexive Banach spaces and fractional calculus*, Advances in Differential Equations (2015), Doi: 10.1186/s 13666-015-045-s.
- [10] R.P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Positive solutions of singular integral equations – a survey*, Dynam. Systems Appl. 14(1) (2005), 1-37.
- [11] R.P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Nonlinear Integral Equations and Inclusions*, Nova Science Publishers, Hauppauge, NY, (2001).
- [12] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *Existence results for singular integral equations of Fredholm type*, Appl. Math. Lett., 13(2), (2000), 27-34.
- [13] A. Aghajani, Y. Jalilian, *Existence and global attractivity of solutions of a nonlinear functional integral equation*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15(2010), 3306-3312.
- [14] E. Akin-Bohner, M. Bohner, F. Akin, *Pachpate inequalities on time scale*, J. Inequal. Pure and Appl. Math. 6(1) Art. 6, 2005.
- [15] A. Ambrosetti, *Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach*, Rend. Sem. Univ. Padova 39 (1967), 349-361.
- [16] Z. Artstein, *Topological dynamics of ordinary differential equations and Kurzweil equations*, J. Differential Equations 23 (1977), 224-243.
- [17] F. M. Atici, D. C. Biles, A. Lebedinsky. *An application of time scales to economics*, Math. Comput. Model. 43(2006), no. 7-8, 718 -726.
- [18] B. Aulbach, S. Hilger, *Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale*, Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems, Akademie Verlag, Berlin, 1990.
- [19] D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Systems with Impulse Effect*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1989.
- [20] J. M. Ball, *Weak continuity properties of mappings and semi-groups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A 72(1979), 275-280.
- [21] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 60, Dekker, New York and Basel, 1980.
- [22] J. Banaś, J. Rivero, *On measures of weak noncompactness*, Ann. Math. Pura Appl. 125 (1987), 213-224.

- [23] M. Becker, P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Saturation for Favard operators in weighted function spaces*, Studia Math. 59 (1976), 139-153.
- [24] M. Becker, *Inverse theorems for Favard operators in polynomial weight spaces*, Ann. Soc. Math. Pol., Ser I Comment Math. 22 (1981), 165-173.
- [25] A. Boccuto, B. Riěcan, *A note on a Pettis-Kurzweil-Henstock type integrals in Riesz spaces*, Real Anal Exch. 28 (2002/2003), 153-161.
- [26] A. Boccuto, V.A. Skvortsov, *On Kurzweil-Henstock type integrals with respect to abstract derivation bases for Riesz valued functions*, J. Appl. Funct. Anal. 1 (2006), 251-270.
- [27] A. Boccuto, A. M. Minotti, A. R. Sambucini, *Set-valued Kurzweil-Henstock integral in Riesz space setting*, PanAmerican Mathematical Journal Volume 23(2013), Number 1, 57-74.
- [28] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic equations on time scales, An introduction with applications*, Birkäuser, 2001.
- [29] M. Bohner, A. Peterson, *Advances in dynamic equations on time scales*, Birkäuser, Boston, 2003.
- [30] L. Bourdin, E. Trelat, *General Cauchy – Lipschitz theory for Δ - Cauchy problems with Carathéodory dynamics on time scales*, J. of Difference Equations and Appl. Vol. 4 20(2014), 526-547.
- [31] D. Bugajewski, *On the Volterra integral equation and the Henstock-Kurzweil integral*, Math. Rommanica 9 (1998), 141-145.
- [32] P.S. Bullen, R. Výborný, *Some applications of a theorem of Marcinkiewicz*, Canad. Math. Bull. 34 (1991), 165-174.
- [33] S.S. Cao, *The Henstock integral for Banach valued functions*, SEA Bull., Math. 16 (1992), 36-40.
- [34] S. Carl, S. Heikkilä, *Fixed point theory in ordered sets and applications. From differential and integral equations to game theory*. Springer 2010.
- [35] S. Carl, S. Heikkilä, Y. Guoju, *Order properties of spaces of non-absolutely integrable vector-valued functions and applications to differential equations*, Diff. Int. Equations, 22 (2009), 135-156.
- [36] T.S. Chew, *On Kurzweil generalized ordinary differential equations*, J. Differential Equations 76 (1988), 286-293.
- [37] T.S. Chew, F. Flordeliza, *On $x' = f(t, x)$ and Henstock-Kurzweil integrals*, Diff. Int. Equations 4 (1991), 861-868.
- [38] T.S. Chew, W. van Brunt, G.C. Wake, *On retarded functional differential equations and Henstock-Kurzweil integrals*, Diff. Int. Equations 9 (1996), 569-580.
- [39] T.S. Chew, T.L. Toh, *On functional differential equations with ubounded delay and Henstock-Kurzweil integrals*, New Zeland J. Math. 28 (1999), 111-123.
- [40] M. Cichoń, *Weak solutions of differential equations in Banach spaces*, Dissc. Math. Differ. Incl. 15 (1995), 5-14.
- [41] M. Cichoń, *Convergence theorems for the Henstock-Kurzweil-Pettis integral*, Acta Math. Hungarica 92 (2001), 75-82.
- [42] M. Cichoń, *On integrals of vector-valued functions on time scales*, Commun. Math. Anal. 11(1), (2011), 94-110.
- [43] M. Cichoń, *A note on Peano's theorem on time scales*, Appl. Math. Lett. 23 (10), (2010), 1310-1313.
- [44] M. Cichoń, I. Kubiacyk, *On the set of solutions of the Cauchy problem in Banach spaces*, Archiv der Mathematik, 63 (3), (1994), 251-257.
- [45] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridg University Press, Cambridge, UK, 1991.
- [46] F. Cramer, V. Lakshmikantham, A. R. Mitchell, *On the existence of weak solution of differential equations in nonreflexive Banach spaces*, Nonlin. Anal. 2 (1978), 169-177.
- [47] F.S. DeBlasi, *On a property of the unit sphere in a Banach space*, Bull. Math. Soc.Sci. Math. R.S. Roumanie 21 (1977), 259-262.
- [48] M. C. Delfour, S. K. Mitter, *Hereditary differential systems with constant delays, I General case*, J. Differential Equations 9 (1972), 2213-235.

- [49] A. Denjoy, *Une extension de l' intégrale de M. Lebesgue*, C. R. Acad. Sci. Paris 154 (1912), 377- 386 .
- [50] L. Di Piazza, *Kurzweil-Henstock type integration on Banach spaces*, Real Anal. Exch. 29 (2003/04), 543-556.
- [51] L. Di Piazza, B. Satco, *A new result on impulsive differential equations involving non-absolutely convergent integrals*, J. Math. Anal. Appl. 352 (2009), 954-963.
- [52] L. Di Piazza, K. Musiał, *Set-valued Kurzweil-Henstock-Pettis integral*, Set Valued Anal. 13 (2005), 167-179.
- [53] Di Piazza, K. Musiał, *A decomposition theorem for compact-valued Henstock integral*, Monatsh. Math. 148 (2006), 119-126.
- [54] L. Erbe, A. Peterson, *Green's functions and comparison theorems for differential equations on measure chains*. Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 6 (1999), 121-137.
- [55] J. Favard, *Sur les multiplicateurs d'interpolation*, J. Math. Pures Appl. 23 (1944), 219 – 247.
- [56] M. Federson, R. Bianconi, *Linear integral equations of Volterra concerning Henstock integrals*, Real Anal. Exch. 25 (1977), 259-262.
- [57] W. Gawroński, U. Stadtmüller, *Approximation of continuous functions by generalized Favard operators*, J. Approx. Theory 34 (1982), 384-396.
- [58] R. A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1994.
- [59] C. Gonzalez, A. Jimenez-Meloda, *Set-contractive mappings and difference equations in Banach spaces*, Comp. Math. Appl. 45 (2003), 1235-1243.
- [60] D. Guo, V. Lakshmikantham, X. Liu, *Nonlinear integral equations in abstract spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [61] D. Guo, *Initial value problems for second-order integro-differential equations in Banach spaces*, Nonlin. Anal. 37 (1999), 289-300.
- [62] D. Guo, X. Liu, *Extremal solutions of nonlinear impulsive integro-differential equations in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 177 (1993), 538-553.
- [63] G.Sh. Guseinov, *Integration on time scales*, J. Math. Anal. Appl. 285 (2003), 107-127.
- [64] J. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer, 1971.
- [65] S. Heikkilä, *Monotone convergence theorems for Henstock-Kurzweil integrable and applications*, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011), 286-295.
- [66] S. Heikkilä, S. Seikkala, *On non-absolute functional Volterra integral equations impulsive differential equations in ordered Banach spaces*, Electronic J. Differ. Equations, 2008 (103), 1–11.
- [67] S. Heikkilä, M. Kumpulainen, S. Seikkala, *Convergence theorems for HL integrable vector - valued functions with applications*, Nonlin. Anal. 70 (2009), 1939-1955.
- [68] S. Heikkilä, *Well-posedness results for Cauchy problems containing non-absolutely integrable vector-valued functions*, Nonlinear Studies, 17 (2010), 327 – 338.
- [69] S. Heikkilä, G. Ye, *Equations containing locally Henstock – Kurzweil integrable functions*, Applications of Mathematics, 57(2012), 569 – 580.
- [70] R. Henstock, *The General Theory of Integration*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [71] S.Hilger, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.
- [72] S. Hilger, *Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus*, Results Math. 18 (1990), 18-56.
- [73] V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus*, Springer, New York, 2001.
- [74] A. Jeribi, B. Krichen, *Nonlinear functional analysis in Banach spaces and Banach algebras: Fixed point theory under weak topology for nonlinear operators and block operator matrices with applications*, Taylor and Francis Group, LLC, 2016.
- [75] G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, *Multiple positive solutions of some integral equations from nonlocal boundary-valued problems*, Electron. J. Diff. Equations 2002 (2002), No 30, 1-17.

- [76] A. Karoui, *Existence and approximate solutions of nonlinear equations*, J. Inequal. Appl. 5 (2005), 569-581.
- [77] B. Kaymakçalan, V. Lakshmikantham, S Sivasundaram, *Dynamical Systems on Measure Chains*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [78] W. J. Knight, *Solutions of differential equation in “B” spaces*, Duke Math. J. 41 (1974), 437-442.
- [79] I. Kubiacyk, *On the existence of solutions of differential equations in Banach spaces*, Bull. Poland Acad. Sci. Math. 33 (1985), 607-614.
- [80] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Czech Math. J. 7 (1957), 618-646.
- [81] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [82] J. Li, J. Shen, *Existence results for second-order impulsive boundary value problems on time scales*, Nonlinear Anal. Theor. Methods Appl. 70 (2009), 1648 – 1655.
- [83] H. Liu, X. Xiang, *A class of the first order impulsive dynamic equations on time scales*, Nonlinear Anal. Theor. Methods Appl. 69(2008), 2803-2811.
- [84] V. Lupulescu, C. Lungan, *Random integral equations on time scales*, Opuscula Math. 2(2013), 323-335.
- [85] R. K. Miller, J. A. Nohel, J. S. Wong, *A stability theorem for nonlinear mixed integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 25 (1969), 446-449.
- [86] D. O'Regan, *Existence results for nonlinear integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 192, 3(1995), 705-726.
- [87] D. O'Regan, M. Meehan, *Existence theory for integral and integrodifferential equations*, *Mathematics and its Applications*, vol. 445, Kluwer Academic, Dordrecht, 1998.
- [88] A. Peterson, B. Thompson, *Henstock -Kurzweil delta and nabla integrals*, J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), 162-178.
- [89] P. Pych-Taberska, *On the generalized Favard operators*, Funct. Approximatio, Comment. Math. 26 (1998), 265-273.
- [90] B. R. Satco, *Intégrabilité de Henstock et applications aux inclusions integrals*, Matrix Rom Bucuresti, 2008.
- [91] B. R. Satco, *A Komlós-type theorem for the set-valued Henstock-Kurzweil-Pettis integral and Applications*, Czech. Math. J. 56 (2006), No. 3, 1029-1047.
- [92] B. Satco, *Nonlinear Volterra integral equations in Henstock integrability settings*, Electron. J. Diff. Equations, 2008 (39), 1–9.
- [93] B. Satco, *On a generalization of Fourier integral transform*, 8th International Conference on Development and Applications Systems, Suceava, Romania, May 25–27, 2006.
- [94] B. Satco, *Existence results for Urysohn integral inclusions involving the Henstock integral*, J. Math. Anal. Appl. 352 (2007), 44-53.
- [95] B. Satco, *Volterra integral equations governed by highly oscillatory functions on time scales*, An. St. Univ. Ovidius Constant, Vol. 17(3), 2009, 233–240.
- [96] B. Satco, *A new relationship between decomposability and convexity*, Comment. Math. Univ. Carolin. 47 (2006), 457–466.
- [97] B. Satco, *Strong convergence in Henstock-Kurzweil-Pettis integration under an extreme point condition*, Real Anal. Exch. 31 (2005/06), 179-194.
- [98] B. Satco, *A Cauchy problem on time scales with applications*, Analele, S'Tint, Ifice ale Univeritat at “AL.I CUZA”, DOI: 10.2478/v10157-011-0016-1.
- [99] B. Satco, C. O. Turcu, *Hybrid systems by methods of time scales analysis*, Advances in Dynamical Systems and Applications, Vol.8, No. 2 (2013), 317–326.
- [100] Y. Shao, H. Zhang, *Existence of the solution for discontinuous fuzzy integro-differential equations and strong fuzzy Henstock integrals*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 14 (2) (2014) 148–161.
- [101] Y. Su, Z. Feng, *Positive solutions to the singular p -Laplacian BVPs with sign-changing nonlinearities and higher-order derivatives in Banach spaces on time scales*. Dyn. Partial Differ. Eq. 8 (2011), no. 2, 149–171.

- [102] A. Szep, *Existence theorem for weak solutions of ordinary differential equations in reflexive Banach spaces*, Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 197-203.
- [103] S. Szufła, *On the differential equation $x^{(m)} = f(t, x)$ in Banach spaces*, Func. Ekv. 41 (1998), 101-105.
- [104] S. Szufła, *Measure of noncompactness and ordinary differential equations in Banach spaces*, Bull. Acad. Poland Sci. Math. 19 (1971), 831-835.
- [105] S. Szufła, *On the existence of solutions of Volterra integral equations in Banach spaces*, Bull. Ac. Polon.: Math. 22 (1974), 1209-1213.
- [106] S. Szufła, A. Szukala, *On the differential equation $x^{(m)} = f(t, x)$ in Banach spaces*, Func. Ekv. 41 (1998), 101-105.
- [107] A. Szukala, *On the application of some measures of noncompactness to existence theorem for an m -th order differential equation*, Demonstr. Math. 34, 4 (2001), 819-824.
- [108] S. G. Topal, A. Yantir, E. Cetin, *Existence of positive solutions of a Sturm – Liouville BVP on unbounded time scale*, J. Difference Equ. Appl., 14(2008), 287-293.
- [109] C. C. Tisdell, A. Zaidi, *Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear, dynamic equations on time scales with an application to economic modelling*, Nonlin. Anal. 68 (2008), 35043524.
- [110] Z. Walczak, *On modified Szasz-Mirakyan operators*, Novi Sad J. Math. 33 (1) (2003), 93-107.
- [111] Z. Xia, *Global asymptotic stability for nonlinear functional integral equation of mixed type*, Journal of Applied Mathematics, (2013), Article ID 193602, 11 pages.
- [112] Y. Xing, M. Han, G. Zheng, *Initial value problem for first-order integrodifferential equation of Volterra type on time scales*, Nonlin. Anal. 60 (2005), 429-442.
- [113] Y. Xing, W. Ding, M. Han, *Periodic boundary value problems of integrodifferential equation of Volterra type on time scales*, Nonlin. Anal. 68 (2008), 127-138.
- [114] H. Xu, J.J. Nieto, *Extremal solutions of a class of nonlinear integro-differential equations in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2605-2614.
- [115] A. Yantir, D. Soyoglu, *Weak solutions of a hyperbolic-type partial dynamic equation in Banach spaces*, arXiv:1412.7351v1.
- [116] L. Yu, J.-P. Barbot, D. Boutat and D. Benmerzouk, *Observability Normal Forms for a class of switched systems with zeno phenomena*, manuscript published in “2009 American Control Conference (2009)”.
- [117] L. Yu, J.-P. Barbot, D. Boutat and D. Benmerzouk, T. Flouquet, G. Zheng, *About sliding mode algorithms, Zeno phenomena and observability*, HAL Id: hal-00750621, <https://hal.inria.fr/hal-00750621>.
- [118] S. Zhang, *The unique existence of periodic solutions of linear Volterra difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 193 (1995), 419-430.
- [119] G. Zheng, L. Yu, D. Boutat, J.-P. Barbot, *Algebraic observer for a class of switched systems with Zeno phenomenon*, in “48th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2009”.
- [120] J. Zhou, Y. Wang, Y. Li, *Existence and multiplicity of solutions for some second-order systems on time scales with impulsive effects*, Boundary Values Problems 2012/1/148, Open Access.
- [121] J. Zhou, Y. Wang, Y. Li, *Variational approach to a class of nonautonomous second-order systems on time scales with impulsive effects*, Taiwanese Journal of Mathematics, 17(2013), 1372-1384.

Aneta Sikorska-Musiel