

Elżbieta Sidorowicz

AUTOREFERAT

2014

Spis treści

I. Imię i nazwisko	2
II. Dyplomy i stopnie naukowe	2
III. Informacja o zatrudnieniu w jednostkach naukowych	2
IV. Osiągnięcie naukowe wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)	3
A) Tytuł osiągnięcia naukowego	3
B) Lista publikacji składających się na osiągnięcie naukowe	3
C) Omówienie wyników zawartych w publikacjach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego	4
1. Wstęp	4
2. Definicje i oznaczenia	5
3. Acykliczne kolorowanie grafów	6
4. Krawędziowe kolorowanie grafów	9
4.1. $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_3)$	10
4.2. $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_m)$	13
5. Rozgrywane kolorowanie grafów	17
V. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych	25
A) Lista publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego	25
B) Omówienie wyników zawartych w publikacjach niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego	26
Literatura	32

I. IMIĘ I NAZWISKO: Elżbieta Sidorowicz

II. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

- | | | |
|------|-------------------------------|--|
| 1992 | magister matematyki | Wyższa Szkoła Pedagogiczna
Promotor: prof. dr hab. Mieczysław Borowiecki
Tytuł: <i>Grafy nasycone</i> |
| 2000 | doktor nauk
matematycznych | Politechnika Zielonogórska
Promotor: prof. dr hab. Mieczysław Borowiecki
Tytuł: <i>Problemy ekstremalne grafów</i> |

III. INFORMACJA O ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- | | |
|-----------|--|
| 1992-2000 | asystent
Wyższa Szkoła Inżynierska w Zielonej Górze |
| 2000-2001 | adiunkt
Politechnika Zielonogórska |
| od 2001 | adiunkt
Uniwersytet Zielonogórski |

IV. OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE WYNIKAJĄCE Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (Dz. U. NR 65, POZ. 595 ZE ZM.):

A) TYTUŁ OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Podziały i uogólnione kolorowania grafów

B) LISTA PUBLIKACJI SKŁADAJĄCA SIĘ NA OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE (prezentacja zgodna z kolejnością omawiania):

- [H1] M. Borowiecki, A. Fiedorowicz, K. Jesse-Józefczyk, E. Sidorowicz, *Acyclic colourings of graphs with bounded degree*, Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 12 (2010) 59–74.
- [H2] M. Borowiecki, K. Jesse-Józefczyk, E. Sidorowicz, *The complexity of some acyclic improper colouring*, Discrete Math. 311 (2011) 732–737.
- [H3] A. Fiedorowicz, E. Sidorowicz, *Acyclic improper colouring of graphs with maximum degree 4*, Sci. China Math. doi: 10.1007/s11425-014-4828-9.
- [H4] M. Borowiecki, I. Schiermeyer, E. Sidorowicz, *Ramsey $(K_{1,2}, K_3)$ -minimal graphs*, Electron. J. Combin. 12 (2005).
- [H5] M. Borowiecki, M. Hałuszczak, E. Sidorowicz, *On Ramsey minimal graphs*, Discrete Math. 286 (2004) 37–43.
- [H6] M. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Generalised game colouring of graphs*, Discrete Math. 307 (2007) 1225–1231.
- [H7] E. Sidorowicz, *The game chromatic number and the colouring number of cactuses*, Inform. Process. Lett. 102 (2007) 147–151.
- [H8] E. Sidorowicz, *Colouring game and generalized colouring game on graphs with cut-vertices*, Discuss. Math. Graph Theory 30 (2010) 499–533.
- [H9] E. Sidorowicz, *On the relaxed colouring game and the unilateral colouring game*, Graphs Combin. doi: 10.1007/s00373-013-1326-8.

C) OMÓWIENIE WYNIKÓW ZAWARTYCH W PUBLIKACJACH WCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO:

1 Wstęp

Kolorowanie grafów jest jednym z bardziej znanych i intensywnie badanych problemów w teorii grafów. W literaturze zostało opisane wiele różnych wersji i uogólnień kolorowania grafów. Większość z nich możemy opisać używając pojęcia wierzchołkowego podziału grafu, tzn. podziału wierzchołków danego grafu na podzbiory, zwane klasami kolorów, które spełniają pewne określone wewnętrzne lub zewnętrzne warunki. Przez warunki wewnętrzne rozumiemy ograniczenia narzucone na wierzchołki należące do danej klasy kolorów, na przykład możemy wymagać, aby klasy kolorów były zbiorami niezależnymi, indukowały grafy o ograniczonym maksymalnym stopniu lub grafy acykliczne itd.. Przez warunki zewnętrzne rozumiemy ograniczenia jakie powinny spełniać zbiory krawędzi łączących wierzchołki dwóch różnych klas kolorów, na przykład możemy wymagać, aby indukowały one graf acykliczny lub las gwiazd itd.. Inne znane wersje kolorowania grafów związane są z podziałem grafu z dodatkowym ograniczeniem na sposób w jaki dokonujemy podziału wierzchołków. Na przykład możemy rozważać: on-line podział, off-line podział czy też podział z niewspółpracującym partnerem, czyli podział grafu poprzez grę. W literaturze badanych było wiele różnych problemów związanych z kolorowaniem (podziałem) grafu względem danych reguł. Jednym z najbardziej znanych problemów jest minimalizowanie liczby klas kolorów, na które dzielimy dany graf. Problem ten związany jest z wyznaczeniem liczby chromatycznej grafu i różnych jej uogólnień. Z drugiej strony, dla ustalonej liczby klas kolorów, możemy optymalizować własności klas kolorów, na które chcemy podzielić graf. Innym ciekawym problemem jest charakteryzacja grafów, które posiadają dany podział. Jednym z bardziej znanych problemów tego typu jest charakteryzacja grafów dwudzielnych, tzn. charakteryzacja grafów, których wierzchołki można podzielić na dwa zbiory niezależne. Wiadomo, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli długości nieparzystej. Podobnie jak kolorowanie wierzchołków grafów możemy rozważać kolorowanie krawędzi grafu, odpowiada ono podziałowi krawędzi grafu na podzbiory nazywane krawędziowymi klasami kolorów. Krawędziowy podział grafu G często nazywany jest dekompozycją grafu G . Problemy związane z krawędziowym kolorowaniem grafu odpowiadają problemom związanym z wierzchołkowym kolorowaniem grafu, gdyż kolorowanie krawędzi grafu G zawsze możemy postrzegać jako kolorowanie wierzchołków grafu krawędziowego $L(G)$.

Przedłożone osiągnięcie naukowe składa się z wyników dotyczących kolorowania wierzchołków lub krawędzi grafu, stanowią one nie tylko kontynuację, a także rozszerzenie dotychczasowych badań nad kolorowaniem grafów. W moich rozważaniach skupiłam się na trzech typach kolorowania: acyklicznym kolorowaniu wierzchołków, krawędziowym kolorowaniu grafu i rozgrywanym kolorowaniu. Dla tych kolorowań rozważam problemy, w których minimalizowana jest liczba klas kolorów, optymalizowane są własności klas kolorów i charakteryzują grafy, które posiadają pewien ustalony podział na klasy kolorów.

2 Definicje i oznaczenia

W niniejszym opracowaniu zakładamy, że wszystkie rozważane grafy są skończone, bez pętli i wielokrotnych krawędzi. Zbiór wierzchołków i krawędzi grafu G oznaczamy odpowiednio przez $V(G)$, $E(G)$. Symbolem $\mathcal{I}$ oznaczamy klasę wszystkich wzajemnie nieizomorficznych grafów. Przez *własność grafów* (krótko *własność*) będziemy rozumieli dowolną podklasę klasy $\mathcal{I}$. Będziemy używać pojęcia *własność grafów* i *klasa grafów* zamiennie. Mówimy, że własność $\mathcal{P}$ jest *dziedziczna*, jeżeli jest zamknięta ze względu na bycie podgrafem, tzn. jeżeli $H \subseteq G$ i $G \in \mathcal{P}$, to $H \in \mathcal{P}$. Mówimy, że własność $\mathcal{P}$ jest *addytywna*, jeżeli jest zamknięta na sumę grafów, tzn. jeżeli $H \in \mathcal{P}$ i $G \in \mathcal{P}$, to $H \cup G \in \mathcal{P}$. W niniejszym opracowaniu rozważmy tylko takie podziały grafów, w których klasy kolorów indukują addytywne własności dziedziczne.

Poniżej podamy przykłady i oznaczenia własności dziedzicznych wykorzystywane w opracowaniu. Niech k będzie liczbą naturalną.

$$\mathcal{O} = \{G \in \mathcal{I} : E(G) = \emptyset\};$$

$$\mathcal{O}_k = \{G \in \mathcal{I} : \text{każda komponenta } G \text{ ma co najwyżej } k + 1 \text{ wierzchołków}\};$$

$$\mathcal{S}_k = \{G \in \mathcal{I} : \Delta(G) \leq k\};$$

$$\mathcal{D}_k = \{G \in \mathcal{I} : G \text{ jest grafem } k\text{-zdegenerowanym, tzn., } \delta(H) \leq k \text{ dla } H \subseteq G\};$$

$$\mathcal{I}_k = \{G \in \mathcal{I} : G \text{ nie zawiera } K_{k+2}\};$$

$$\mathcal{T}_2 = \{G \in \mathcal{I} : G \text{ jest grafem zewnętrźnie planarnym}\}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{D}_1$ jest klasą grafów acyklicznych. Ponadto oznaczmy przez $\mathcal{LF} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S}_2$, klasę *lasów liniowych*.

Każda nietrywialna własność dziedziczna $\mathcal{P}$ może być w sposób jednoznaczny, opisana przez *zbiór minimalnych podgrafów zabronionych*, zdefiniowany następująco:

$$F(\mathcal{P}) = \{G \in \mathcal{I} : G \notin \mathcal{P} \text{ ale każdy podgraf właściwy } H \text{ grafu } G \text{ należy do } \mathcal{P}\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{P}$ jest addytywną własnością dziedziczną, to każdy graf należący do $F(\mathcal{P})$ jest spójny. Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem grafów. Oznaczmy przez $Forb(\mathcal{F})$ klasę

wszystkich grafów, które nie zawierają podgrafu izomorficznego z żadnym grafem ze zbioru $\mathcal{F}$. Na przykład $\mathcal{I}_{k-2} = \text{Forb}(\{K_k\})$. Własność $\mathcal{I}_{k-2}$ nazywamy klasą grafów K_k -wolnych.

Wprowadźmy pojęcia *uogólnionego kolorowania* i *uogólnionego krawędziowego kolorowania* grafów. Niech G będzie grafem i $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k)$ uporządkowanym zbiorem addytywnych własności dziedzicznych.

$(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podziałem (lub *uogólnionym kolorowaniem*) grafu G nazywamy podział $(V_1, \dots, V_k)$ zbioru wierzchołków $V(G)$ taki, że dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ podgraf $G[V_i]$ indukowany przez V_i ma własność $\mathcal{P}_i$. Klasę grafów, które mają $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podział oznaczamy przez $\mathcal{P}_1 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k$. Jeżeli $(V_1, \dots, V_k)$ jest $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podziałem grafu G , to odpowiadające mu kolorowanie c definiujemy następująco $c(v) = i$ dla $v \in V_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Jeżeli $\mathcal{P}_i = \mathcal{O}$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, k\}$, to $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podział grafu G jest dobrze znanym *właściwym k -kolorowaniem grafu G* . Ponadto najmniejsza liczba k , dla której G ma właściwe k -kolorowanie, nazywana jest *liczbą chromatyczną* $\chi(G)$ grafu G .

$(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -dekompozycją (lub *uogólnionym krawędziowym kolorowaniem*) grafu G nazywamy podział $(E_1, \dots, E_k)$ zbioru krawędzi $E(G)$ taki, że dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ podgraf indukowany przez zbiór krawędzi E_i ma własność $\mathcal{P}_i$. Klasę grafów, które mają $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -dekompozycję oznaczamy przez $\mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_k$. Jeżeli $(E_1, \dots, E_k)$ jest $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -dekompozycją grafu G , to odpowiadające mu kolorowanie f definiujemy następująco $f(e) = i$ dla $e \in E_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Jeżeli $\mathcal{P}_i = \mathcal{O}_1$ dla $i \in \{1, \dots, k\}$, to $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -dekompozycja grafu G jest *właściwym krawędziowym k -kolorowaniem grafu G* . Najmniejsza liczba k , dla której G ma właściwe krawędziowe k -kolorowanie, nazywana jest *indeksem chromatycznym* $\chi'(G)$ grafu G .

Pojęcia podział i kolorowanie, dekompozycja i krawędziowe kolorowanie będziemy używali zamiennie.

3 Acykliczne kolorowanie grafów

W rozdziale tym zostaną omówione wyniki z prac [H1], [H2], [H3].

Niech $(V_1, \dots, V_k)$ będzie $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podziałem grafu G . Krawędź łączącą wierzchołek ze zbioru V_i z wierzchołkiem ze zbioru V_j nazywamy (i, j) -krawędzią. $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podział nazywamy *acyklicznym*, jeżeli dla każdej pary (i, j) , $i \neq j$, podgraf indukowany przez wszystkie (i, j) -krawędzie nie zawiera cykli, tzn. podgraf $G[V_i \cup V_j]$ może zawierać cykl, ale każdy taki cykl ma co najmniej dwa kolejne wierzchołki, które należą do V_i albo V_j . Mówimy, że graf G ma własność $\mathcal{P}_1 \odot \dots \odot \mathcal{P}_k$, jeżeli ma acykliczny $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podział. Zauważmy, że jeżeli własność $\mathcal{P}_i$ jest dziedziczna

dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$, to $\mathcal{P}_1 \odot \dots \odot \mathcal{P}_k$ jest też własnością dziedziczną.

Acykliczny $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podział grafu G nazywamy *acyklicznym k -kolorowaniem*, jeżeli $\mathcal{P}_i = \emptyset$ dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$. Najmniejszą liczbę k , dla której G ma acykliczne k -kolorowanie, nazywamy *acykliczną liczbą chromatyczną* grafu G i oznaczamy przez $\chi_a(G)$. Innym dobrze znanym acyklicznym $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podziałem jest acykliczne niewłaściwe kolorowanie. Acykliczny $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podział nazywamy *acyklicznym t -niewłaściwym k -kolorowaniem*, jeżeli klasa $\mathcal{P}_i$ zawiera grafy o maksymalnym stopniu co najwyżej t dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$, tzn. $G[V_i] \in \mathcal{S}_t$ dla $i \in \{1, \dots, k\}$.

Ideę acyklicznego kolorowania grafów wprowadził Grünbaum [40], od tej pory ten typ kolorowania jest intensywnie badany, jednakże znalezienie wartości $\chi_a(G)$ w ogólnym przypadku jest problemem trudnym. Kostochka [44] udowodnił, że problem sprawdzenia, czy dla dowolnego grafu G zachodzi $\chi_a(G) \leq 3$, jest problemem NP-zupełnym. W literaturze badane były wartości acyklicznej liczby chromatycznej dla pewnych klas grafów, między innymi dla grafów planarnych, czy grafów o małym maksymalnym stopniu. Jednym z bardziej znanych twierdzeń tego typu jest twierdzenie udowodnione przez Borodina [11], które mówi, że acykliczna liczba chromatyczna grafu planarnego wynosi co najwyżej 5. Wśród wyników dla grafów o małym maksymalnym stopniu znane są ograniczenia acyklicznej liczby chromatycznej dla grafów o maksymalnym stopniu 3, 4, 5 lub 6. Grünbaum w pracy [40] udowodnił, że $\chi_a(G) \leq 4$ dla dowolnego grafu o maksymalnym stopniu co najwyżej 3 (patrz też [51]). Burstein [18] udowodnił, że $\chi_a(G) \leq 5$ dla dowolnego grafu o maksymalnym stopniu co najwyżej 4. Kostochka *et al.* [45] pokazali, że $\chi_a(G) \leq 7$ dla dowolnego grafu o maksymalnym stopniu co najwyżej 5. Zhao *et al.* [59] udowodnili, że dla grafów o maksymalnym stopniu co najwyżej 6, wystarczy 10 kolorów, aby acyklicznie pokolorować taki graf.

W 1999 roku Boiron, Sopena i Vignal [10] rozpoczęli badanie acyklicznego $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ -podziału grafów o ograniczonym maksymalnym stopniu. Udowodnili oni, że dowolny graf $G \in \mathcal{S}_3$ (o maksymalnym stopniu co najwyżej 3) ma acykliczny $(\mathcal{D}_1, \mathcal{S}_2)$ -podział oraz acykliczny $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1)$ -podział. W tej samej pracy autorzy postawili hipotezę, że dowolny graf o maksymalnym stopniu co najwyżej 3, ma acykliczny $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_2)$ -podział. Najważniejszym wynikiem jednotematycznego cyklu, związanym z acyklicznym kolorowaniem, jest dowód tej hipotezy. Mianowicie, w [H1] udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 ([H1], Thm. 2) $\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_2 \odot \mathcal{S}_2$.

Niezależnie tę hipotezę udowodnili Addario-Berry *et al.* w pracy [1].

Ponadto w pracy [H1] podano algorytm, oparty na dowodzie twierdzenia 1, który dokonuje acyklicznego $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_2)$ -podziału dowolnego grafu o maksymalnym stopniu co najwyżej 3 w czasie wielomianowym. Powyższego twierdzenia nie można uogólnić na grafy o dowolnym maksymalnym stopniu.

Twierdzenie 2 ([H1], Thm. 1) *Dla dowolnego $d \geq 4$ istnieje graf G o maksymalnym stopniu d , który nie ma acyklicznego $(\mathcal{S}_{d-1}, \mathcal{S}_{d-1})$ -podziału.*

Yand *et al.* [57] rozważali $(\mathcal{O}, \mathcal{D}_1)$ -podziały grafów o ograniczonym maksymalnym stopniu. Udowodnili oni, że każdy graf o maksymalnym stopniu co najwyżej 3, z wyjątkiem K_4 , ma $(\mathcal{O}, \mathcal{D}_1)$ -podział, tzn. $\mathcal{S}_3 \setminus \{K_4\} \subseteq \mathcal{O} \odot \mathcal{D}_1$. Wyniku tego nie można przenieść na kolorowanie acykliczne. Ponieważ istnieje nieskończenie wiele grafów o maksymalnym stopniu 3 z acykliczną liczbą chromatyczną równą 4, więc istnieje też nieskończenie wiele grafów o maksymalnym stopniu 3, które nie mają acyklicznego $(\mathcal{O}, \mathcal{D}_1)$ -podziału. Boiron *et al.* [10] udowodnili, że $\mathcal{S}_3 \setminus \{K_4, K_{3,3}\} \subseteq \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{D}_1$. Ponadto w tej samej pracy zostało pokazane, że $\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{S}_2$. W pracy [H2] pierwszy z wyników wzmocniono w następujący sposób:

Twierdzenie 3 ([H2], Thm. 4) $\mathcal{S}_3 \setminus \{K_4, K_{3,3}\} \subseteq \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{LF}$.

W pracy [H3] kontynuowane są poprzednie badania, rozważano grafy o maksymalnym stopniu co najwyżej 4. Udowodniono, że każdy graf o maksymalnym stopniu co najwyżej 4 ma acykliczny $(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ -podział.

Twierdzenie 4 ([H3], Thm. 3.1) $\mathcal{S}_4 \subseteq \mathcal{S}_3 \odot \mathcal{S}_3 \odot \mathcal{S}_3$.

Z twierdzenia 2 wynika, że istnieje graf należący do $\mathcal{S}_4$, który nie ma acyklicznego 3-niewłaściwego 2-kolorowania. Zatem poprzedniego twierdzenia nie można wzmocnić przez ograniczenie liczby kolorów. W dalszej części pracy [H3] rozważano acykliczne kolorowanie, w którym klasy kolorów indukują lasy. Zauważmy, że aby pokolorować w taki sposób graf K_{n+1} ($n \geq 2$) musimy użyć co najmniej n kolorów. W [H3] udowodniono, że każdy graf $G \in \mathcal{S}_4$ ma acykliczny $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1)$ -podział.

Twierdzenie 5 ([H3], Thm. 4.1) $\mathcal{S}_4 \subseteq \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{D}_1$.

Z zaobserwowanej własności dla grafu K_{n+1} wynika, że twierdzenia 5 nie można wzmocnić przez ograniczenie liczby kolorów. Można podać silniejszą wersję twierdzenia "poprawiając" własności, na które dzielimy graf. W [H3] udowodniono, że każdy graf $G \in \mathcal{S}_4$ można acyklicznie pokolorować za pomocą 4 kolorów w taki sposób, że każda klasa kolorów indukuje las o maksymalnym stopniu 3.

Twierdzenie 6 ([H3], Thm. 4.3) $\mathcal{S}_4 \subseteq \mathcal{P}_1 \odot \mathcal{P}_2 \odot \mathcal{P}_3 \odot \mathcal{P}_4$, gdzie $\mathcal{P}_i = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S}_3$ dla $i \in \{1, \dots, 4\}$.

4 Krawędziowe kolorowanie grafów

Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$ są własnościami dziedzicznymi, to $\mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_k$ jest również własnością dziedziczną. Zatem własność $\mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_k$ może być w sposób jednoznaczny opisana za pomocą zbioru minimalnych grafów zabronionych. W pracach [H4] i [H5], poprzez zbiór minimalnych grafów zabronionych, scharakteryzowano grafy, które mają $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ -dekompozycję (dla ustalonych własności dziedzicznych $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$).

Zbiór minimalnych grafów zabronionych dla własności dziedzicznej $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ jest ściśle związany ze zbiorem grafów minimalnych Ramseya. Piszemy, że $G \rightarrow (F, H)$ jeżeli w każdym czerwono-niebieskim dwukolorowaniu krawędzi grafu G , czerwony podgraf zawiera F lub niebieski podgraf zawiera H . W przeciwnym razie piszemy $G \nrightarrow (F, H)$. Mówimy, że graf G jest (F, H) -minimalny (*minimalnym grafem Ramseya*), jeżeli $G \rightarrow (F, H)$ i $G' \nrightarrow (F, H)$ dla dowolnego podgrafu właściwego $G' \subseteq G$. Zbiór wszystkich (F, H) -minimalnych grafów oznaczamy przez $\mathcal{R}(F, H)$.

Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ będą własnościami dziedzicznymi z jednym minimalnym podgrafem zabronionym, tzn. $\mathcal{P}_1 = \text{Forb}(\{F\})$ i $\mathcal{P}_2 = \text{Forb}(\{H\})$. $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ -dekompozycja jest takim podziałem (E_1, E_2) krawędzi $E(G)$, że $G[E_1]$ nie zawiera grafu F i $G[E_2]$ nie zawiera grafu H . Zatem G nie ma $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ -dekompozycji wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $G \rightarrow (F, H)$. Z tego wynika, że zbiór minimalnych podgrafów zabronionych dla własności $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ jest dokładnie zbiorem grafów (F, H) -minimalnych, więc $F(\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) = \mathcal{R}(F, H)$ lub równoważnie możemy zapisać $F(\text{Forb}(\{F\}) \oplus \text{Forb}(\{H\})) = \mathcal{R}(F, H)$.

W literaturze można znaleźć wiele prac, w których rozważa się zbiór $\mathcal{R}(F, H)$. W części z nich bada się, czy zbiór $\mathcal{R}(F, H)$ jest skończony czy nieskończony. W innych charakteryzuje się grafy należące do zbioru $\mathcal{R}(F, H)$, tzn. charakteryzuje się zbiór minimalnych podgrafów zabronionych dla własności $\text{Forb}(\{F\}) \oplus \text{Forb}(\{H\})$. Wśród nich są prace związane z grafami minimalnymi Ramseya dla gwiazd i K_3 . Na przykład Mengersen *et al.* [47] scharakteryzowali grafy należące do zbioru $\mathcal{R}(2K_2, K_{1,n})$. W pracy [16] Burr *et al.* opisali zbiór $\mathcal{R}(2K_2, K_3)$. Burr *et al.* w pracy [15] pokazali, że jeżeli m, n są nieparzyste, to $\mathcal{R}(K_{1,m}, K_{1,n}) = \{K_{m+n+1}\}$. Burr *et al.* [17] udowodnili, że $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,2}) = \{K_{1,3}\} \cup \{C_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Natomiast problem scharakteryzowania grafów należących do $\mathcal{R}(K_{1,m}, K_{1,n})$, gdy jedna z liczb m, n jest parzysta dla pozostałych m, n , jest otwarty. Z twierdzenia udowodnionego przez Łuczaka [49] wynika, że zbiór ten jest nieskończony. W pracy [H5] podano częściowe rozwiązanie tego problemu, badano zbiór $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ dla $m \geq 3$. Podano twierdzenia charakteryzujące grafy należące do tego zbioru, wyniki te podamy w podrozdziale 4.2. Ponadto w pracy [H5] podano warunek wystarczający na to, aby graf należał do

$\mathcal{R}(K_{1,m}, K_{1,n})$.

W pracy [H4] opisano wszystkie grafy należące do $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_3)$. Idea konstrukcji, którą użyto w tej pracy, została później zastosowana i uogólniona w pracach [7, 8, 12, 41]. Baskoro *et al.* w pracach [7, 8] za pomocą tej konstrukcji otrzymali nieskończoną rodzinę grafów należących do $\mathcal{R}(K_{1,2}, C_4)$, Hałuszczak w pracy [41] wygenerował nieskończoną rodzinę grafów z $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_n)$, natomiast w pracy [12] Borowiecka-Olszewska *et al.* wygenerowali nieskończoną rodzinę grafów należących do $\mathcal{R}(K_{1,2}, \mathcal{G})$, gdzie $\mathcal{G}$ jest klasą grafów dwuspójnych.

Własność dziedziczna $\mathcal{S}_k$ ma dokładnie jeden minimalny podgraf zabroniony $K_{1,k+1}$, podobnie jedynym minimalnym podgrafem zabronionym dla własności $\mathcal{I}_1$ jest graf K_3 . Jeżeli graf G ma $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{m-1})$ -dekompozycję ($G \in \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_{m-1}$), to $G \not\rightarrow (K_{1,2}, K_{1,m})$. Jeżeli graf G ma $(\mathcal{S}_1, \mathcal{I}_1)$ -dekompozycję ($G \in \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{I}_1$), to $G \not\rightarrow (K_{1,2}, K_3)$. Zatem problem scharakteryzowania grafów należących do $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$, który badano w pracy [H5], możemy w sposób równoważny wyrazić jako problem scharakteryzowania zbioru minimalnych grafów zabronionych dla własności $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_{m-1}$. Podobnie problem wyznaczenia grafów należących do $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_3)$, który badano w pracy [H4], jest równoważny problemowi wyznaczenia zbioru minimalnych grafów zabronionych dla własności $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{I}_1$. Możemy więc powiedzieć, że w obu przypadkach zbiory grafów, które mają pewną ustaloną dekompozycję (kolorowanie krawędziowe) zostały opisane przez minimalne podgrafy zabronione. Główne wyniki z prac [H4] i [H5] zostaną przedstawione odpowiednio w podrozdziałach 4.1 i 4.2.

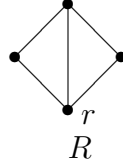
4.1 $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_3)$

Omówienie głównego twierdzenia zawartego w pracy [H4] rozpoczniemy od wprowadzenia potrzebnych definicji i oznaczeń.

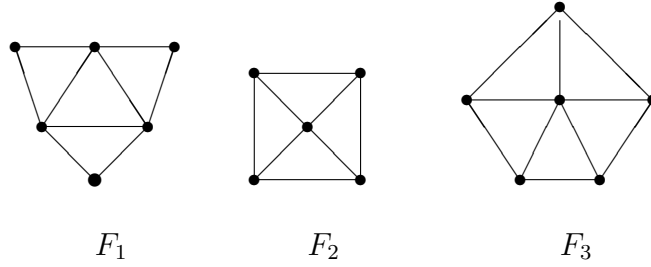
K_3 -drogą nazywamy graf G o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$ i zbiorze krawędzi $E(G) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, k-1\} \cup \{v_i w_i : i = 1, 2, \dots, k-1\} \cup \{w_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, k-1\}$, dla $k \geq 2$. K_3 -cyklem nazywamy graf G o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_k\}$ i zbiorze krawędzi $E(G) = \{v_i v_j : i = 1, 2, \dots, k, j \equiv i+1 \pmod{k}\} \cup \{w_i v_i : i = 1, 2, \dots, k\} \cup \{w_i v_j : i = 1, 2, \dots, k, j \equiv i+1 \pmod{k}\}$, dla $k \geq 4$. Długością K_3 -drogi (K_3 -cyklu) nazywamy liczbę trójkątów w niej zawartych. Z definicji wynika, że każdy K_3 -cykl ma długość co najmniej 4.

Nieparzystą K_3^2 -drogą nazywamy graf otrzymany z K_3 -drogi przez dodanie do niej krawędzi $w_i w_{i+1}$ ($i = 1, \dots, k-2$). Długością K_3^2 -drogi nazywamy liczbę trójkątów w niej zawartych. Zauważmy, że długość K_3^2 -drogi jest zawsze liczbą nieparzystą.

Przez R oznaczamy graf z korzeniem r przedstawiony na rysunku 1.



Rysunek 1. Graf R .

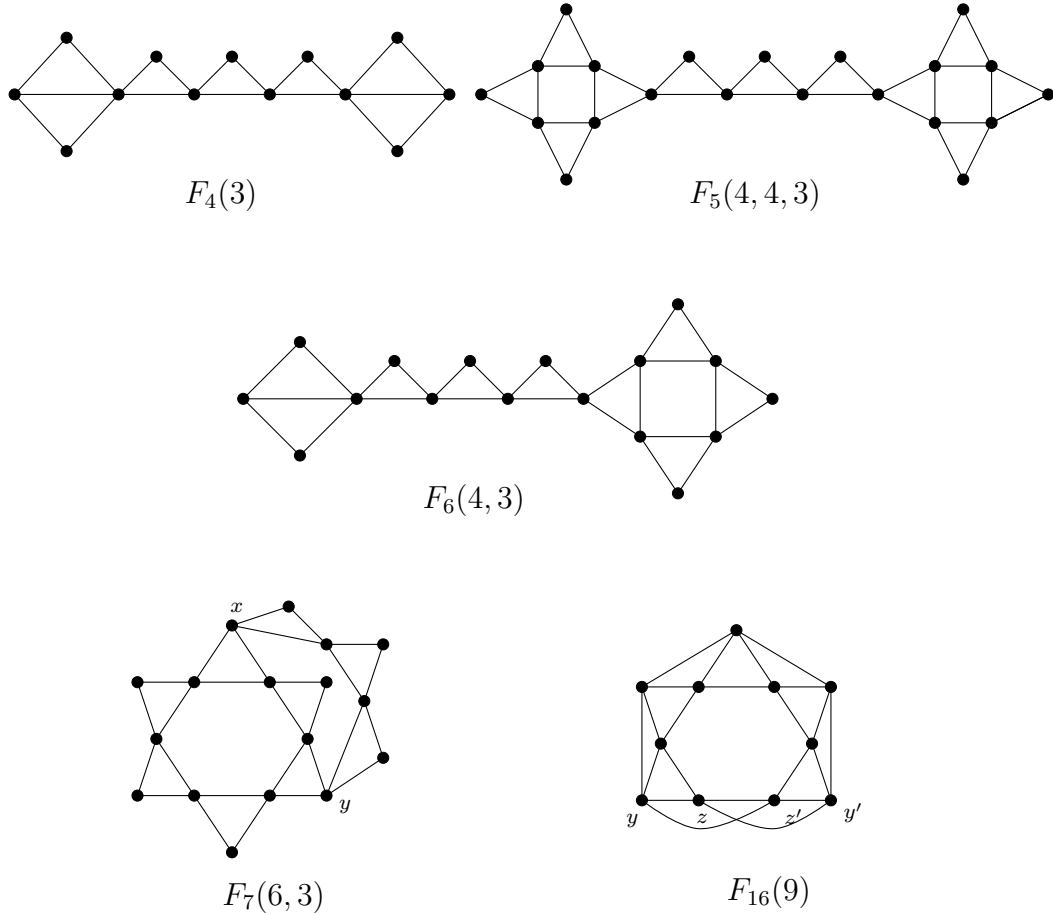


Rysunek 2. Grafy: F_1, F_2, F_3 .

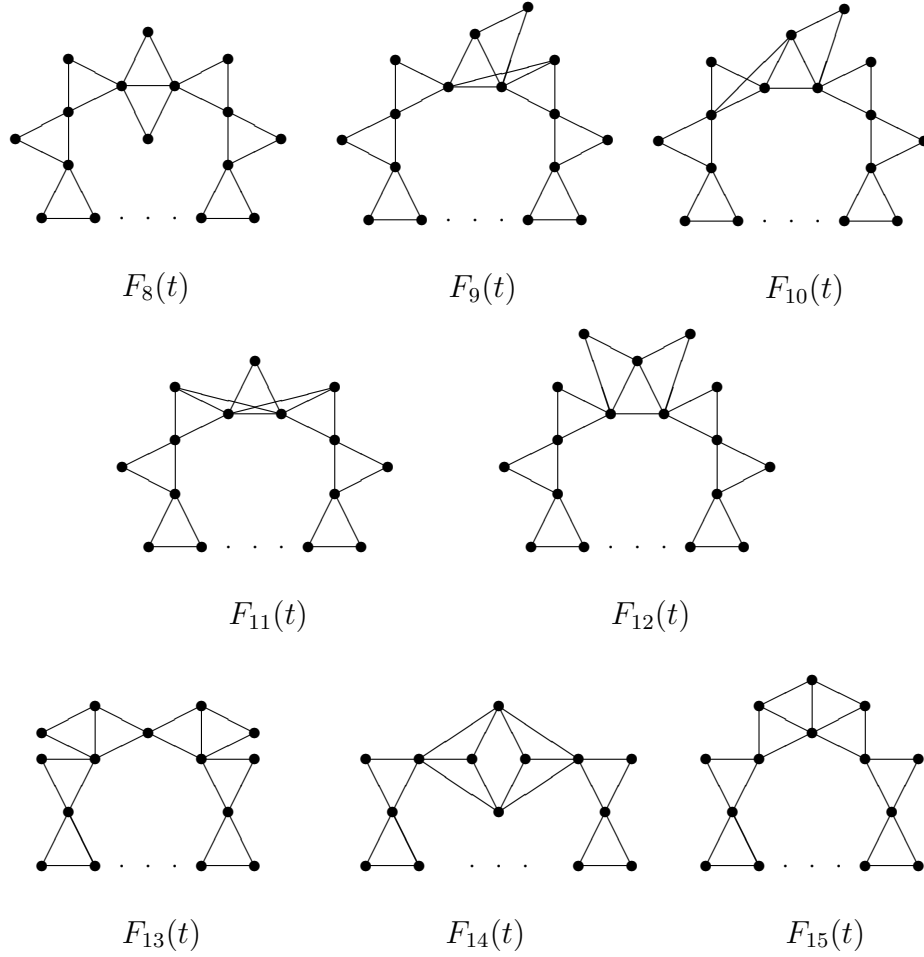
Niech $\mathcal{T}$ będzie klasą złożoną z następujących grafów:

1. grafy F_1, F_2, F_3 przedstawione na rysunku 2;
2. $F_4(k)$, $k \geq 0$ — dwie wierzchołkowo rozłączne kopie grafu R , których korzenie są połączone K_3 -drogą długości k (rysunek 3), dla $k = 0$ mamy dwie kopie grafu R sklejone korzeniami;
3. $F_5(t_1, t_2, k)$, $t_1 \geq 4$, $t_2 \geq 4$, $k \geq 0$ — dwa wierzchołkowo rozłączne K_3 -cykle, długości t_1 i t_2 , połączone K_3 -drogą długości k (rysunek 3), dla $k = 0$ mamy dwa K_3 -cykle sklejone wierzchołkiem;
4. $F_6(t, k)$, $t \geq 4$, $k \geq 0$ — graf R i K_3 -cykl długości t razem z K_3 -drogą długości k , która łączy korzeń R z dowolnym wierzchołkiem K_3 -cyklu (rysunek 3), dla $k = 0$ mamy graf R i K_3 -cykl sklejone korzeniem grafu R i dowolnym wierzchołkiem K_3 -cyklu;

5. $F_7(t, k)$, $t \geq 4, k \geq 1$ — K_3 -cykl H długości t i K_3 -droga długości k , która łączy dwa wierzchołki $x, y \in V(H)$ takie, że $k + d_H(x, y) \geq 4$ (symbol $d_H(x, y)$ oznacza odległość między wierzchołkami x i y w grafie H) (rysunek 3);
6. $F_8(t), F_9(t), \dots, F_{15}(t)$, $t \geq 4$ — grafy otrzymane z K_3 -cyklu długości t przez dodanie nowych trójkątów tak, jak na rysunku 4;
7. $F_{16}(t)$, $t \geq 5$ — graf otrzymany z nieparzystej K_3^2 -drogi P długości t w następujący sposób: do P dodajemy nowe krawędzie zy', yz' i zz' , gdzie z, z' są wierzchołkami stopnia 2 w P , y, y' są wierzchołkami stopnia 3 w P (rysunek 3).



Rysunek 3. Przykłady grafów $F_4(k), F_5(t_1, t_2, k), F_6(t, k), F_7(t, k), F_{16}(t)$.

Rysunek 4. Grafy: $F_8(t), F_9(t), \dots, F_{15}(t)$.

Twierdzenie 7 ([H4], Thm. 1) $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_3)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \in \mathcal{T}$.

4.2 $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$

W pracy [H5] scharakteryzowano grafy należące do $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ dla $m \geq 3$. Najpierw zauważmy, że $K_{1,m+1} \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$. Zatem wszystkie pozostałe grafy G należące do $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ nie zawierają podgrafu $K_{1,m+1}$, stąd $\Delta(G) \leq m$. Jeżeli $\Delta(G) \leq m - 1$, to każdą krawędź grafu G możemy pokolorować na niebiesko i

otrzymamy $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{m-1})$ -dekompozycję grafu G (tzn. $G \not\rightarrow (K_{1,2}, K_{1,m})$), wówczas $G \notin \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$. Z tego wynika, że $\Delta(G) = m$. k -faktorem grafu nazywamy k -regularny podgraf rozpinający. Zauważmy, że jeżeli graf G , o maksymalnym stopniu równym m , ma 1-faktor, to kolorując krawędzie 1-faktora na czerwono, a pozostałe krawędzie grafu na niebiesko, otrzymamy $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{m-1})$ -dekompozycję grafu G . Zatem $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{m-1})$ -dekompozycja grafu jest związana z istnieniem 1-faktora w grafie. W charakteryzacji zbioru $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ wykorzystano dwa znane twierdzenia opisujące grafy, które posiadają 1-faktor.

Graf rzędu co najmniej 3 nazywamy *faktor-krytycznym*, jeżeli $G - v$ ma 1-faktor dla każdego $v \in V(G)$. Zauważmy, że jeżeli graf G jest faktor-krytyczny, to G nie ma 1-faktora, bo jest nieparzystego rzędu. Oznaczmy przez $\mathcal{C}_G$ zbiór komponent grafu G i przez $q(G)$ liczbę komponent nieparzystego rzędu grafu G . Niech $S \subseteq V(G)$. Przez G_S oznaczmy graf otrzymany z G przez ściągnięcie komponent $C \in \mathcal{C}_{G-S}$ do pojedynczych wierzchołków i usunięcie krawędzi między wierzchołkami zbioru S , tzn. G_S jest grafem dwudzielnym o zbiorze wierzchołków $S \cup \mathcal{C}_{G-S}$ i zbiorze krawędzi $\{sC : s \in S \text{ i istnieje } c \in C \text{ taki, że } sc \in E\}$. Zbiór krawędzi niezależnych M grafu G nazywamy *skojarzeniem*. Mówimy, że zbiór wierzchołków S jest *skojarzony* z $G - S$, jeżeli istnieje skojarzenie M w grafie G_S takie, że każdy wierzchołek zbioru S jest incydentny z krawędzią M .

Pierwsze twierdzenie, opisujące grafy, które posiadają 1-faktor, jest konsekwencją twierdzenia Gallai-Edmonsa [27, 38, 39]. Przedstawimy je w postaci podanej w [24].

Twierdzenie 8 ([24]) *Każdy graf G ma zbiór wierzchołków S o następujących własnościach:*

- (i) S jest skojarzony z $G - S$;
- (ii) każda komponenta $G - S$ jest faktor-krytyczna.

Niech S będzie dowolnym zbiorem, który ma obie powyższe własności. Graf G ma 1-faktor wtedy i tylko wtedy, gdy $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$.

W drugim twierdzeniu podamy warunek Tutte na istnienie 1-faktora w grafie.

Twierdzenie 9 ([52]) *Graf G ma 1-faktor wtedy i tylko wtedy, gdy $q(G - S) \leq |S|$ dla każdego $S \subseteq V(G)$.*

Mówimy, że zbiór $S \subseteq V(G)$ ma *własność $\mathcal{S}$* (lub krótko jest *$\mathcal{S}$ -zbiorem*), jeżeli spełnia (i) and (ii) twierdzenia 8. Jeżeli $S \subseteq V(G)$ jest zbiorem, dla którego zachodzi

$q(G-S) > |S|$, to mówimy, że S ma *własność $\mathcal{T}$* (lub krótko jest $\mathcal{T}$ -zbiorem). $\mathcal{T}$ -zbiór S jest $\mathcal{T}$ -maksymalny, jeżeli S nie jest podzbiorem właściwym żadnego $\mathcal{T}$ -zbioru.

W pierwszej charakteryzacji grafów należących do $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ wykorzystano pojęcie $\mathcal{S}$ -zbioru.

Twierdzenie 10 ([H5], Thm. 3) *Niech $m \geq 3$. $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G = K_{1,m+1}$ lub graf G ma następujące własności:*

1. G jest spójny,
2. $\Delta(G) = m$,
3. w grafie G istnieje $\mathcal{S}$ -zbiór S , dla którego zachodzi:
 - (a) $d(v) = m$ dla każdego $v \in V(G - S)$,
 - (b) $|S| = q(G - S) - 1$,
 - (c) jeżeli C jest komponentą grafu $G - S$, to S jest skojarzony z $(G - C) - S$,
 - (d) $G[S]$ jest grafem bezkrawędziowym.

Ponadto w pracy [H5] udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11 ([H5], Cor. 1) *Niech $m \geq 3$. Jeżeli $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ i $G \neq K_{1,m+1}$, to dla każdego $\mathcal{S}$ -zbioru S grafu G zachodzi:*

- (a) $d(v) = m$ dla każdego $v \in V(G - S)$,
- (b) $|S| = q(G - S) - 1$,
- (c) jeżeli C jest komponentą grafu $G - S$, to S jest skojarzony z $(G - C) - S$,
- (d) $G[S]$ jest grafem bezkrawędziowym.

W drugiej charakteryzacji grafów należących do $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ wykorzystano pojęcie $\mathcal{T}$ -zbioru.

Twierdzenie 12 ([H5], Thm. 4) *Niech $m \geq 3$. $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G = K_{1,m+1}$ lub G ma następujące własności:*

1. G jest spójny,
2. $\Delta(G) = m$,

3. istnieje $\mathcal{T}$ -maksymalny zbiór S , dla którego zachodzi:

- (a) $d(v) = m$ dla każdego $v \in V(G - S)$,
- (b) dla każdego $S' \subseteq S$, który ma własność $\mathcal{T}$ w G , zbiór $\mathcal{C}_{G-S'}$ zawiera tylko komponenty nieparzystego rzędu,
- (c) $|S| = q(G - S) - 1$,
- (d) $G[S]$ jest grafem bezkrawędziowym.

W pracy [H5] pokazano, że każdy $\mathcal{T}$ -maksymalny zbiór grafu $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$, podobnie jak każdy $\mathcal{S}$ -zbiór grafu G , spełnia założenia twierdzenia 10.

Twierdzenie 13 ([H5], Cor. 3) *Niech $m \geq 3$. Jeżeli $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$ i $G \neq K_{1,m+1}$, to dla każdego $\mathcal{T}$ -maksymalnego zbioru S grafu G zachodzi:*

- (a) $d(v) = m$ dla każdego $v \in V(G - S)$,
- (b) $|S| = q(G - S) - 1$,
- (c) jeżeli C jest komponentą grafu $G - S$, to S jest skojarzony z $(G - C) - S$,
- (d) $G[S]$ jest grafem bezkrawędziowym.

Ponadto udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 14 ([H5], Cor. 2) *Niech $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m})$. Zbiór S ma własność $\mathcal{S}$ i spełnia warunki (a)–(d) twierdzenia 10 wtedy i tylko wtedy, gdy S jest $\mathcal{T}$ -maksymalnym zbiorem i spełnia warunki (a)–(d) twierdzenia 12.*

W pracy [H5] podano warunek wystarczający na to, aby graf należał do zbioru $\mathcal{R}(K_{1,m}, K_{1,n})$.

Twierdzenie 15 ([H5], Thm 6) *Niech m będzie liczbą nieparzystą, n liczbą parzystą oraz $m, n \geq 2$. Jeżeli $G \rightarrow (K_{1,m}, K_{1,n})$ oraz $G \in \mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,m+n-2})$, to $G \in \mathcal{R}(K_{1,m}, K_{1,n})$.*

5 Rozgrywane kolorowanie grafów

W tym rozdziale omówimy wyniki z prac: [H6], [H7], [H8], [H9], dotyczące kolorowania wierzchołków grafu z ograniczeniem na sposób, w jaki wierzchołki są wybierane do pokolorowania. Zdefiniujemy podział grafu z niewspółpracującym partnerem przez dwuosobową grę. Niech dany będzie graf G i uporządkowany zbiór addytywnych własności dziedzicznych $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$. Dwóch graczy Alice i Bob naprzemian kolorują wierzchołki grafu G . Alice rozpoczyna grę. Każdy gracz koloruje jeden wierzchołek grafu G kolorem ze zbioru $\{1, \dots, r\}$ w taki sposób, że po jego ruchu podgraf indukowany przez $G[V_i]$ ma własność $\mathcal{P}_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ (V_i jest zbiorem wierzchołków pokolorowanych kolorem i). Jeżeli po $|V(G)|$ ruchach graczy otrzymaliśmy $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ -podział grafu G , to grę wygrywa Alice. Mówimy wówczas, że graf G ma własność $\mathcal{P}_1 \square \dots \square \mathcal{P}_r$. Bob wygrywa grę, gdy po ruchu gracza pojawi się wierzchołek, którego nie można pokolorować żadnym kolorem ze zbioru $\{1, \dots, r\}$. Powyższą grę nazywamy $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ -grą. Ideę powyższej gry wprowadzono w pracy [H6]. Jeżeli $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \dots = \mathcal{P}_r = \mathcal{P}$, to powyższą grę nazywamy $\mathcal{P}$ -grą z r kolorami. Dla danego grafu G najmniejszą liczbę r , dla której Alice ma strategię wygrywającą w $\mathcal{P}$ -grę z r kolorami, nazywamy $\mathcal{P}$ -rozgrywaną liczbą chromatyczną i oznaczamy $\chi_g^{\mathcal{P}}(G)$. Niech $\mathcal{R}$ będzie klasą grafów. Jeżeli zbiór $\{\chi_g^{\mathcal{P}}(G) : G \in \mathcal{R}\}$ jest skończony, to zdefiniujemy $\chi_g^{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) = \max\{\chi_g^{\mathcal{P}}(G) : G \in \mathcal{R}\}$.

Gdy $\mathcal{P}$ jest klasą grafów bezkrawędziowych i gracze używają r kolorów, to otrzymamy dobrze znaną wersję $\mathcal{P}$ -gry — grę r -kolorującą. Wówczas gracz może pokolorować wierzchołek v kolorem i , $i \in \{1, \dots, r\}$ tylko, gdy v nie ma sąsiada pokolorowanego kolorem i . Najmniejszą liczbę r , dla której Alice ma strategię wygrywającą w grę r -kolorującą na grafie G , nazywamy rozgrywaną liczbą chromatyczną grafu G i oznaczamy $\chi_g(G)$. Pojęcie rozgrywanej liczby chromatycznej zostało wprowadzone przez Bodlaendera w pracy [9], który badał także jej złożoność obliczeniową. Do tej pory zostały wyznaczone wartości rozgrywanej liczby chromatycznej dla różnych klas grafów. Wersja $\mathcal{P}$ -gry, w której $\mathcal{P}$ jest klasą grafów o maksymalnym stopniu co najwyżej d , została wprowadzona przez Chou *et al.* [23] i nazywana jest grą (r, d) -niewłaściwie kolorującą. Najmniejszą liczbę r , dla której Alice ma strategię wygrywającą w grę (r, d) -niewłaściwie kolorującą na grafie G , nazywamy d -niewłaściwą rozgrywaną liczbą chromatyczną grafu G i oznaczamy $\chi_g^{(d)}(G)$.

Dla klasy grafów $\mathcal{R}$, podobnie jak $\chi_g^{\mathcal{P}}(\mathcal{R})$, zdefiniujemy:

$$\chi_g(\mathcal{R}) = \max\{\chi_g(G) : G \in \mathcal{R}\},$$

$$\chi_g^{(d)}(\mathcal{R}) = \max\{\chi_g^{(d)}(G) : G \in \mathcal{R}\}.$$

Pierwszy rezultat otrzymany w pracy [H6] związany jest z $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ -grą. Scharak-

teryzowano wszystkie grafy, dla których Alice ma strategię wygrywającą w tę grę, tzn. scharakteryzowano wszystkie grafy należące do zbioru $\mathcal{O} \square \mathcal{O}$.

Niech $\mathcal{B}$ będzie klasą grafów dwudzielnych G , które mają następujące własności:

- (1) $\chi_g(G) \geq 3$,
- (2) Dla dowolnego wierzchołka $v \in V(G)$ istnieje wierzchołek $u \in V(G)$ ($u \neq v$) taki, że $\{v, u\}$ jest zbiorem dominującym w G .

Twierdzenie 16 ([H6], Thm. 2) *$G \in \mathcal{O} \square \mathcal{O}$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest lasem gwiazd lub $G = G_1 \cup \dots \cup G_t \cup H$, gdzie H jest lasem gwiazd nieparzystego rzędu, $G_i \in \mathcal{B}$ ($i \in \{1, \dots, t\}$) oraz jeżeli $t \geq 2$, to rząd każdego grafu G_i jest parzysty.*

W pracy [60] Zhu postawił następujący problem:

Problem 1 *Założmy, że $\chi_g(G) = k$. Czy dla dowolnej liczby k' , $k' > k$, Alice ma strategię wygrywającą w grę k' -kolorującą na grafie G ?*

Twierdzenie 16 daje pozytywną odpowiedź na pytanie postawione w problemie 1 dla $k = 2$. Ponadto z twierdzenia 16 wynika, że można w czasie wielomianowym rozstrzygnąć, czy Alice ma strategię wygrywającą w $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ -grze. Złożoność problemu gry r -kolorującej została postawiona w pracy [9] jako problem otwarty.

Kolejne twierdzenie udowodnione w pracy [H6] dotyczy gry kolorującej na lasach. Chou *et al.* [23] udowodnili, że każde drzewo należy do $\mathcal{O}_1 \square \mathcal{O}_1 \square \mathcal{O}_1$. W tej samej pracy zostało wskazane drzewo T , dla którego Bob ma strategię wygrywającą w $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_1)$ -grę. Z tego wynika, że rezultat otrzymany przez Chou *et al.* nie może być wzmocniony przez ograniczenie liczby kolorów. W pracy [H6] wzmocniono ten rezultat przez pokazanie, że każdy las należy do $\mathcal{O} \square \mathcal{O} \square \mathcal{O}_1$.

Twierdzenie 17 ([H6], Thm. 3) $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{O} \square \mathcal{O} \square \mathcal{O}_1$.

Ponadto w pracy [H6] wskazano las T , dla którego Bob ma strategię wygrywającą w $(\mathcal{O}, \mathcal{SF})$ -grę.

Twierdzenie 18 ([H6], Thm. 4) $\mathcal{D}_1 \not\subseteq \mathcal{O} \square \mathcal{SF}$.

W literaturze rozważana była też krawędziowa wersja gry kolorującej. *Rozgrywanym indeksem chromatycznym* $\chi'_g(G)$ nazywamy najmniejszą liczbę r , dla której Alice ma strategię wygrywającą w krawędziową wersję gry r -kolorującej na grafie G . Cai i Zhu [19] wyznaczyli ograniczenie górne, równe $\Delta + 3k - 1$, dla rozgrywanego indeksu chromatycznego grafów k -zdegenerowanych o maksymalnym stopniu Δ . Z

tego wyniku otrzymujemy, że rozgrywany indeks chromatyczny dowolnego drzewa o maksymalnym stopniu Δ , wynosi co najwyżej $\Delta + 2$. W tej samej pracy autorzy poprawili ograniczenie górne dla drzew o maksymalnym stopniu 3. Udowodnili, że rozgrywany indeks chromatyczny drzewa o maksymalnym stopniu 3 z nieparzystą liczbą krawędzi, wynosi co najwyżej 4. Powyższe wyniki zainspirowały badania nad następującym problemem: czy rozgrywany indeks chromatyczny dowolnego drzewa o maksymalnym stopniu Δ wynosi co najwyżej $\Delta + 1$? Łatwo zauważyć, że odpowiedź na powyższe pytanie jest pozytywna dla $\Delta = 2$. Erdős *et al.* [28] dali pozytywną odpowiedź dla $\Delta \geq 6$. Andres [5] poprawił poprzedni rezultat, udowodnił, że jeżeli $\Delta \geq 5$, to $\chi'_g(T) \leq \Delta + 1$ dla drzewa T o maksymalnym stopniu Δ . Ten sam autor w pracy [4] rozwiązał przypadek dla $\Delta = 3$. Problem $\Delta = 4$ pozostaje otwarty. Ostatnio Chan *et al.* [21] udowodnili, że $\chi'_g(T) \leq 5$, jeżeli $\Delta(T) = 4$ i T jest lasem, którego każda komponenta jest gąsienicą lub T nie ma dwóch sąsiednich wierzchołków stopnia 4.

Grę na krawędziach grafu G możemy zawsze postrzegać, jako grę na wierzchołkach grafu krawędziowego $L(G)$. *Kaktusem* nazywamy graf, w którym każdy blok jest cyklem lub K_2 i dowolne dwa bloki mają co najwyżej jeden wspólny wierzchołek. Graf krawędziowy drzewa o maksymalnym stopniu 3 jest więc kaktusem z cyklami długości co najwyżej 3 taki, że każdy wierzchołek należy do co najwyżej dwóch bloków. Wynik Andes [4] implikuje, że rozgrywana liczba chromatyczna takich specjalnych kaktusów wynosi co najwyżej 4.

W pracy [H7] rozważano grę na kaktusach. Z jednej strony wskazano kaktus, dla którego Bob ma strategię wygrywającą w grę 4-kolorującą. Z drugiej strony udowodniono twierdzenie mówiące, że dla dowolnego kaktusa Alice ma strategię wygrywającą w grę 5-kolorującą. Dowód tego twierdzenia oparty jest na badaniu innego inwariantu grafu — rozgrywanej liczby kolorującej, która została wprowadzona przez Zhu w [60]. Rozgrywana liczba kolorująca została zdefiniowana poprzez dwuosobową grę — *grę etykietującą*. Alice i Bob naprzemian oznaczają wierzchołki grafu G . Alice rozpoczyna grę. Gra kończy się, gdy wszystkie wierzchołki są zaznaczone. Dla wierzchołka v oznaczmy symbolem $s(v)$ liczbę jego sąsiadów, którzy byli zaznaczeni przed nim. *Wynikiem gry* nazywamy liczbę $s = 1 + \max_{v \in V} s(v)$. Celem Alice jest minimalizowanie wyniku gry, natomiast celem Boba jest maksymalizowanie wyniku gry. *Rozgrywaną liczbą kolorującą* $\text{col}_g(G)$ nazywamy najmniejszą liczbę s , dla której Alice ma strategię wygrywającą w grę etykietującą z wynikiem co najwyżej s . Łatwo zauważyć, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G)$. Własność powyższa pozwala wykorzystywać rozgrywaną liczbę kolorującą, jako narzędzie do badania rozgrywanej liczby chromatycznej grafu.

Niech $\mathcal{R}$ będzie klasą grafów, podobnie jak wcześniej, zdefiniujmy rozgrywaną

liczbę kolorującą dla klasy grafów $\text{col}_g(\mathcal{R}) = \max\{\text{col}_g(G) : G \in \mathcal{R}\}$. W pracy [H7] udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 19 ([H7], Thm. 1) *Jeżeli $\mathcal{C}$ jest klasą kaktusów, to $\chi_g(\mathcal{C}) = \text{col}_g(\mathcal{C}) = 5$.*

W kolejnych dwóch pracach [H8] i [H9] rozważano gry kolorujące na klasie grafów oznaczonych symbolem $\mathcal{H}_k$:

$\mathcal{H}_k = \{G : \text{każdy blok grafu } G \text{ ma co najwyżej } k \text{ wierzchołków}\}$.

Klasa $\mathcal{H}_k$ jest interesująca ze względu na to, że zawiera w sobie wiele znanych klas grafów. Na przykład $\mathcal{H}_2$ jest klasą lasów. Jeżeli $G \in \mathcal{H}_k$ i każdy blok grafu jest grafem pełnym, to G jest drzewem Husimi. Jeżeli $G \in \mathcal{H}_k$ i każdy blok jest cyklem lub K_2 , to G jest kaktusem. $\mathcal{H}_k$ zawiera także w sobie grafy krawędziowe lasów. Jeżeli każdy blok grafu $G \in \mathcal{H}_k$ jest grafem pełnym i każdy wierzchołek grafu G jest w co najwyżej dwóch blokach, to G jest grafem krawędziowym lasu o maksymalnym stopniu co najwyżej k . Zatem gra kolorująca krawędzie lasu odpowiada grze kolorującej wierzchołki grafów należących do $\mathcal{H}_k$.

Pierwszy wynik z pracy [H8] mówi o rozgrywanej liczbie chromatycznej grafów należących do $\mathcal{H}_k$. Przypomnijmy, że $\mathcal{H}_2$ jest klasą lasów. Faigle *et al.* [31] udowodnili, że rozgrywana liczba chromatyczna lasu wynosi co najwyżej 4, czyli dla $T \in \mathcal{H}_2$ zachodzi $\chi_g(T) \leq 4$. W pracy [H8] pokazano, że dla dowolnego k liczba $k + 2$ jest ograniczeniem górnym rozgrywanej liczby chromatycznej grafu należącego do $\mathcal{H}_k$.

Twierdzenie 20 ([H8], Thm. 8) *Dla $k \geq 2$ zachodzi $\chi_g(\mathcal{H}_k) \leq k + 2$.*

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika, że rozgrywany indeks chromatyczny lasu o maksymalnym stopniu k wynosi co najwyżej $k + 2$. Wiadomo, że istnieje las T o maksymalnym stopniu k , dla którego $\chi'_g(T) = k + 1$. Łącząc to z twierdzeniem 20 otrzymujemy dolne i górne ograniczenie na rozgrywaną liczbę chromatyczną klasy grafów $\mathcal{H}_k$, $k + 1 \leq \chi_g(\mathcal{H}_k) \leq k + 2$. W pracy [H8] udowodniono, że dla $k \geq 6$ ograniczenie dolne jest także ograniczeniem górnym dla rozgrywanej liczby chromatycznej klasy $\mathcal{H}_k$.

Twierdzenie 21 ([H8], Thm. 11) *Jeżeli $k \geq 6$, to $\chi_g(\mathcal{H}_k) = k + 1$.*

Z powyższego twierdzenia wynika twierdzenie Erdős *et al.* [28] mówiące, że rozgrywany indeks chromatyczny lasów o maksymalnym stopniu Δ , $\Delta \geq 6$ wynosi $\Delta + 1$. Zatem w pracy [H8] uogólniono, na szerszą klasę grafów, twierdzenie Erdős *et al.* [28].

Kolejne wyniki pracy [H8] dotyczą $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ -gry na grafach należących do $\mathcal{H}_k$. W pracy [H7] został wskazany kaktus T , $T \in \mathcal{H}_3$, którego rozgrywana liczba chromatyczna wynosi 5. Kaktus ten nie zawiera cykli długości większej niż 3. Zatem $\chi_g(\mathcal{H}_3) \geq 5$, a z tego wynika, że $\mathcal{H}_3 \not\subseteq \mathcal{O} \square \mathcal{O} \square \mathcal{O} \square \mathcal{O}$. W pracy [H8] udowodniono natomiast następującą własność klasy grafów $\mathcal{H}_3$:

Twierdzenie 22 ([H8], Thm.17) $\mathcal{H}_3 \subseteq \mathcal{O}_1 \square \mathcal{O}_1 \square \mathcal{O} \square \mathcal{O}$.

Przypomnijmy, że problem czy rozgrywany indeks chromatyczny lasów o maksymalnym stopniu 4 jest ograniczony przez 5 czy 6, jest problemem otwartym. W pracy [H8] zbliżono się do rozwiązania tego problemu. Otrmano wynik trochę słabszy, udowodniono, że Alice ma strategię wygrywającą w $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}, \mathcal{O}, \mathcal{O}, \mathcal{O})$ -grę na wierzchołkach grafu krawędziowego lasu o maksymalnym stopniu 4. Ponieważ gra na wierzchołkach grafu krawędziowego $L(G)$ odpowiada grze na krawędziach grafu G , więc w pracy [H8] pokazano strategię wygrywającą dla Alice, w grę na krawędziach lasu o maksymalnym stopniu 4, w której gracze używają 5 kolorów i kolorują krawędzie tak, że krawędzie w pierwszym kolorze indukują las gwiazd o maksymalnym stopniu 2, a krawędzie w pozostałych kolorach indukują skojarzenia. Wynik ten jest wnioskiem z ogólniejszego twierdzenia udowodnionego w pracy:

Twierdzenie 23 ([H8], Thm. 19) Dla $k \geq 4$ zachodzi $\mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{P}_1 \square \mathcal{P}_2 \square \dots \square \mathcal{P}_{k+1}$, gdzie $\mathcal{P}_1 = \mathcal{O}_1$, $\mathcal{P}_i = \mathcal{O}$ ($i = 2, \dots, k+1$).

W pracy [H9] kontynuowano rozważanie gier na grafach należących do $\mathcal{H}_k$, w szczególności gier niewłaściwie kolorujących grafy. W literaturze gra niewłaściwie kolorująca była intensywnie badana dla różnych klas grafów, między innymi dla częściowych k -drzew, grafów planarnych, grafów zewnętrznie planarnych, drzew. He *et al.* [42] zebrali udowodnione wyniki związane z grą niewłaściwie kolorującą na drzewach w następującą formułę:

Twierdzenie 24 ([23, 31, 42]) Dla $d \in \{0, 1, 2\}$ zachodzi $\chi_g^{(d)}(\mathcal{H}_2) \leq 4 - d$.

oraz postawili hipotezę, że w podobny sposób można opisać wyniki dla gry na grafach zewnętrznie planarnych. Hipoteza ta została udowodniona przez Wu *et al.* [56], którzy uogólnili znane dotychczas twierdzenia dla grafów zewnętrznie planarnych w następujący sposób:

Twierdzenie 25 ([56]) Dla $0 \leq d \leq 4$ zachodzi $\chi_g^{(d)}(\mathcal{T}_2) \leq 7 - d$.

W pracy [H9] podano podobną formułę dla grafów należących do $\mathcal{H}_k$ dla $k \in \{3, 4\}$. Najpierw zauważmy, że z twierdzenia 20 wynika $\chi_g^{(0)}(G) \leq k + 2$ dla $G \in \mathcal{H}_k$. Z twierdzeń 22 i 23 wynika $\chi_g^{(1)}(G) \leq k + 1$ dla $G \in \mathcal{H}_k$ ($k \geq 3$). Z twierdzenia 5 udowodnionego w pracy [H9] wynika, że $\chi_g^{(2)}(G) \leq 3$ dla $G \in \mathcal{H}_3$. Z twierdzenia 6 udowodnionego w pracy [H9] wynika, że jeżeli $d \in \{2, 3\}$, to $\chi_g^{(d)}(G) \leq k + 2 - d$ dla $G \in \mathcal{H}_4$. Łącząc, te wyniki otrzymujemy następującą formułę:

Twierdzenie 26 ([H9], Cor. 4) *Dla $k \in \{3, 4\}$ i $0 \leq d \leq k - 1$ zachodzi $\chi_g^{(d)}(\mathcal{H}_k) \leq k + 2 - d$.*

Pomimo, że w literaturze jest wiele wyników dotyczących rozgrywanej liczby chromatycznej, to nie ma wielu strategii dla gry kolorującej. Najbardziej znaną strategią jest *strategia aktywująca*, która została wprowadzona w pracy [31] dla gry na drzewach. Później została ulepszona w pracy [46]. Od tej pory jest ona bardzo często używana, Alice grając zgodnie ze strategią aktywującą może wygrać grę kolorującą, jak również opisane zostały wersje tej strategii dla gry etykietującej. W pracy [H8] podano nową strategię, która umożliwia Alice wygranie nie tylko gry kolorującej na danym grafie, ale także dowolnej $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ -gry. W pracy [H9] rozwinęto i ulepszono tę strategię poprzez wprowadzenie gry pomocniczej, nazwanej jednostronną grą kolorującą oraz parametru związanego z tą grą, nazwanego jednostronnie rozgrywaną liczbą chromatyczną. Kluczowym punktem tej strategii jest konstrukcja dla grafu G , na którym rozgrywana jest gra, specjalnej rodziny grafów częściowo pokolorowanych, nazywanej rodziną rozgrywanie domkniętą, która zawiera niepokolorowany graf G . Alice wygra grę na G , jeżeli będzie kolorowała wierzchołki w taki sposób, aby zawsze po jej ruchu, otrzymany częściowo pokolorowany graf G , należał do skonstruowanej wcześniej, rodziny rozgrywanie domkniętej. Poniżej podamy formalną definicję rodziny rozgrywanie domkniętej oraz opiszemy strategię gry. Ograniczymy się do $\mathcal{P}$ -gry, łatwo widać, że wszystkie pojęcia można uogólnić na $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ -grę.

Częściowym r -kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję $c_r : S \rightarrow \{1, \dots, r\}$, gdzie $S \subseteq V(G)$. Parę (G, c_r) nazywamy *częściowo r -pokolorowanym grafem*. Jeżeli żaden wierzchołek grafu nie jest pokolorowany lub wszystkie wierzchołki grafu są pokolorowane, to również mówimy, że graf jest częściowo pokolorowany. Niech $\mathcal{P}$ będzie addytywną własnością dziedziczną. Mówimy, że kolor i jest $(\mathcal{P}, r)$ -*dopuszczalny* dla niepokolorowanego wierzchołka v , jeżeli $i \in \{1, \dots, r\}$ i po pokolorowaniu wierzchołka v kolorem i , nie pojawi się monochromatyczny podgraf zabroniony dla własności $\mathcal{P}$, zawierający v . Niech $\beta(G)$ zawiera grafy izomorficzne z G , które zostały częściowo pokolorowane.

Definicja 1 Rodzinę $\beta(G)$ nazywamy $(\mathcal{P}, r)$ -rozgrywanie domkniętą, jeżeli dla każdego $(G, c_r) \in \beta(G)$ zachodzi:

- (i) Jeżeli w (G, c_r) są wierzchołki niepokolorowane, to istnieje wierzchołek, który może być pokolorowany przez Alice kolorem $(\mathcal{P}, r)$ -dopuszczalnym w taki sposób, że otrzymany graf będzie należał do $\beta(G)$.
- (ii) Jeżeli Bob pokoloruje wierzchołek grafu (G, c_r) dowolnym kolorem i , $i \in \{1, \dots, r\}$ i po jego ruchu są wierzchołki niepokolorowane, to istnieje wierzchołek, który może być pokolorowany przez Alice kolorem $(\mathcal{P}, r)$ -dopuszczalnym w taki sposób, że otrzymany graf będzie należał do $\beta(G)$.

Definicja 2 $(G, \mathcal{P}, r)$ -strategia

- (1) Alice konstruuje rodzinę $(\mathcal{P}, r)$ -rozgrywanie domkniętą $\beta(G)$, która zawiera niepokolorowany graf G .
- (2) Alice gra w taki sposób, że zawsze po jej ruchu otrzymany graf należy do $\beta(G)$.

Bezpośrednio z definicji rodziny rozgrywanie domkniętej wynika, że grając zgodnie z $(G, \mathcal{P}, r)$ -strategią, Alice wygra $\mathcal{P}$ -grę z r kolorami na grafie G . Ponadto zauważmy też, że grając zgodnie z tą strategią Alice wygra grę, jeżeli pierwszy ruch będzie należał do Boba lub jeżeli będziemy rozważali grę, w której dopuszczamy, że Bob może opuścić swój ruch.

W pracy [H9] zdefiniowano grę, w której Bob ma więcej swobody w kolorowaniu niż Alice i może opuścić swój ruch. $(G, \mathcal{P}, r)$ -strategia umożliwia Alice wygranie również tej gry. Niech dany będzie graf G , addytywna własność dziedziczna $\mathcal{P}$ i zbiór kolorów $\{1, \dots, r\}$. Dwóch graczy, Alice i Bob, kolorują wierzchołki grafu G , Alice rozpoczyna grę. Gracze grają naprzemiennie, ale Bob może opuścić swój ruch. Bob może pokolorować wierzchołek dowolnym kolorem ze zbioru $\{1, \dots, r\}$, Alice musi pokolorować wierzchołek kolorem $(\mathcal{P}, r)$ -dopuszczalnym dla tego wierzchołka. Jeżeli wszystkie wierzchołki grafu są pokolorowane, to grę wygrywa Alice, w przeciwnym razie grę wygrywa Bob. Zatem Bob wygrywa grę, gdy pojawi się niepokolorowany wierzchołek, dla którego nie ma $(\mathcal{P}, r)$ -dopuszczalnego koloru. Powyższą grę nazywamy *jednostronną $\mathcal{P}$ -grą* z r kolorami. *Jednostronnie $\mathcal{P}$ -rozgrywaną liczbą chromatyczną*, oznaczaną przez $\chi_{ug}^{\mathcal{P}}(G)$, nazywamy najmniejszą liczbę kolorów r , dla której Alice ma strategię wygrywającą w jednostronną grę $\mathcal{P}$ -kolorującą.

Ponieważ w jednostronnej $\mathcal{P}$ -grze Bob ma większą swobodę ruchu niż w $\mathcal{P}$ -grze, jednostronnie $\mathcal{P}$ -rozgrywana liczba chromatyczna jest ograniczeniem górnym $\mathcal{P}$ -rozgrywanej liczby chromatycznej

Twierdzenie 27 ([H9], Lem. 5) *Dla dowolnego grafu G zachodzi $\chi_g^{\mathcal{P}}(G) \leq \chi_{ug}^{\mathcal{P}}(G)$.*

W dotychczasowej literaturze bardzo często do oszacowania rozgrywanej liczby chromatycznej danego grafu wykorzystywano rozgrywaną liczbę kolorującą, ponieważ $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G)$. Jednostronnie rozgrywana liczba chromatyczna jest lepszym ograniczeniem dla rozgrywanej liczby chromatycznej niż rozgrywana liczba kolorująca. Przypomnijmy, że $\chi_g(G) = \chi_g^{\mathcal{O}}(G)$.

Twierdzenie 28 ([H9], Lem. 6) *Dla dowolnego grafu G zachodzi $\chi_g(G) \leq \chi_{ug}^{\mathcal{O}}(G) \leq \text{col}_g(G)$.*

Ponadto rozgrywanej liczby kolorującej nie można wykorzystać do ograniczenia rozgrywanej liczby d -niewłaściwie chromatycznej, natomiast jednostronnie rozgrywana liczba chromatyczna może być też narzędziem do badania tego parametru.

Twierdzenie 29 ([H9], Lem. 7) *Dla dowolnego grafu G zachodzi $\chi_g^d(G) \leq \chi_{ug}^{\mathcal{S}_d}(G)$.*

Rozważmy graf $K_{3,3}$ i jego podgraf $G = K_{3,3} - M$, gdzie M jest 1-faktorem grafu $K_{3,3}$. Łatwo sprawdzić, że $\chi_g(K_{3,3}) = 3$, natomiast dla grafu G Bob ma strategię wygrywającą w grę 3-kolorującą. Na tym przykładzie widzimy, że rozgrywana liczba chromatyczna nie jest monotoniczna, co często utrudnia jej badanie. W przeciwieństwie do rozgrywanej liczby chromatycznej, jednostronnie rozgrywana liczba chromatyczna jest monotoniczna.

Twierdzenie 30 ([H9], Lem. 3) *Jeżeli G' jest podgrafem G , to $\chi_{ug}^{\mathcal{P}}(G') \leq \chi_{ug}^{\mathcal{P}}(G)$.*

Ponadto odpowiedź na pytanie postawione w problemie 1 dla jednostronnej gry kolorującej jest pozytywna.

Twierdzenie 31 ([H9], Lem. 4) *Jeżeli Alice ma strategię wygrywającą dla jednostronnej $\mathcal{P}$ -gry na grafie G z r kolorami, to ma strategię wygrywającą dla jednostronnej $\mathcal{P}$ -gry na G z t kolorami dla $t \geq r$.*

V. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

A) LISTA PUBLIKACJI NIEWCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO
(prezentacja zgodna z kolejnością omawiania):

- [P1] E. Sidorowicz, *Size of C_3 -saturated graphs*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej 118 (1993) 61–66.
- [P2] K. Amin, J. Faudree, R.J. Gould, E. Sidorowicz, *On the non- $(p - 1)$ -partite K_p -free graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 33 (2013) 9–23.
- [P3] M. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Weakly P -saturated graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 22 (2002) 17–29.
- [P4] E. Sidorowicz, *Size of weakly saturated graphs*, Discrete Math. 307 (2007) 1486–1492.
- [P5] M. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Some extremal problems of graphs with local constraints*, Discrete Math. 251 (2002) 19–32.
- [P6] M. Borowiecki, P. Borowiecki, E. Sidorowicz, Z. Skupień, *On Extremal Size of Locally k -tree Graphs*, Czech. Math. J. 60 (135) (2010) 571–587.
- [P7] A. Hoffmann, E. Sidorowicz, L. Volkmann, *Extremal bipartite graphs with a unique k -factor*, Discuss. Math. Graph Theory 26 (2006) 181–192.
- [P8] M. Borowiecki, D. Michalak, E. Sidorowicz, *Generalized domination, independence and irredundance in graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 17 (1997) 147–153.
- [P9] K. Jesse-Józefczyk, E. Sidorowicz, *Secure sets and their expansion in cubic graphs*, Cent. Eur. J. Math. doi: 10.2478/s11533-014-0411-4 w druku.
- [P10] K. Jesse-Józefczyk, E. Sidorowicz, *Global security in claw-free cubic graphs*, Discrete Appl. Math. doi: 10.1016/j.dam.2014.05.27 w druku.
- [P11] M. Borowiecki, E. Sidorowicz, Zs. Tuza, *Game list colouring*, Electron. J. Combin. 14 (2007).

- [P12] P. Borowiecki, E. Sidorowicz, *Dynamic coloring of graphs*, Fundam. Inform. 114 (2012) 105–128.
- [P13] E. Sidorowicz, *The relaxed game chromatic number of graphs with cut-vertices*, submitted.
- [P14] P. Dorbec, I. Schiermeyer, E. Sidorowicz, E. Sopena, *Rainbow Connection in Oriented Graphs*, submitted.

B) OMÓWIENIE WYNIKÓW ZAWARTYCH W PUBLIKACJACH NIEWCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Maksymalne grafy K_p -wolne ([P1], [P2]) Graf G nazywamy K_p -wolnym, jeżeli nie zawiera podgrafu izomorficznego z K_p . Używając terminologii własności dziedzicznych, graf G jest K_p -wolny, jeżeli $G \in \mathcal{I}_{p-2}$. Graf G jest *maksymalny K_p -wolny* (K_p -nasycony), jeżeli dla dowolnej krawędzi $e \notin E(G)$ graf $G + e$ zawiera K_p . Klasyczne Twierdzenie Turána [53] mówi, że jeżeli n -wierzchołkowy graf K_p -wolny ma największy rozmiar, to jest izomorficzny z grafem pełnym $(p-1)$ -dzielny $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ takim, że $|n_i - n_j| \leq 1$ dla $i, j = 1, \dots, p-1$ i $n_1 + \dots + n_{p-1} = n$. Z drugiej strony Erdős *et al.* [29] udowodnili, że każdy n -wierzchołkowy ($n \geq p-1$) graf maksymalny K_p -wolny ma co najmniej $(p-2)n - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ krawędzi. Z udowodnionego w pracy [29] twierdzenia wynika również, że każdy n -wierzchołkowy graf maksymalny K_p -wolny najmniejszego rozmiaru jest grafem $(p-1)$ -dzielny i ma wierzchołek stopnia $n-1$. Problem znalezienia najmniejszego rozmiaru n -wierzchołkowego grafu maksymalnego K_p -wolnego bez wierzchołka stopnia $n-1$ był rozważany w pracach Füredi *et al.* [37], Erdős *et al.* [30] i Alon *et al.* [2]. Duffus *et al.* [25] badali minimalny rozmiar maksymalnych grafów K_p -wolnych z ustalonym minimalnym stopniem.

W pracach [P1] i [P2] rozważano grafy maksymalne K_p -wolne, które nie są $(p-1)$ -dzielne. Prace [P1] i [P2] zawierają wyniki rozprawy doktorskiej autorki niniejszego opracowania. Najmniejszy i największy rozmiar n -wierzchołkowego grafu maksymalnego K_p -wolnego, który nie jest grafem $(p-1)$ -dzielny, oznaczamy odpowiednio przez $s(n, K_p)$ i $e(n, K_p)$. Wyznaczono wartości $s(n, K_p)$ i $e(n, K_p)$ oraz badano spektrum rozmiaru takich grafów. W pracy [P1] rozwiązano ten problem dla $p=3$. Później te same wyniki otrzymali Barefoot *et al.* w [6]. Problem dla $p=4$ był badany przez Amin *et al.* w [3]. W pracy [P2] rozstrzygnięto ten problem dla dowolnego

p . Wyznaczono wartości $s(n, K_p)$ i $e(n, K_p)$. Następnie rozwiązano problem typu interpolacyjnego, który odpowiada na pytanie: dla jakich wartości m i n istnieją n -wierzchołkowe grafy maksymalne K_p -wolne rozmiaru m ? Oznaczmy przez $\text{sat}(n, K_n)$ i $\text{ex}(n, K_n)$ odpowiednio najmniejszy i największy rozmiar n -wierzchołkowego grafu maksymalnego K_p -wolnego. Udowodniono, że jeżeli n jest dostatecznie duże, to nie istnieją n -wierzchołkowe grafy maksymalne K_p -wolne rozmiaru m dla $\text{sat}(n, K_p) < m < s(n, K_p)$. Jeżeli $e(n, K_p) < m \leq \text{ex}(n, K_n)$, to każdy n -wierzchołkowy graf maksymalny K_p -wolny rozmiaru m jest grafem $(p-1)$ -dzielny. Jeżeli $n \geq 3p+4$, to dla każdego m , $s(n, K_p) \leq m \leq e(n, K_p)$ istnieje n -wierzchołkowy graf maksymalny K_p -wolny rozmiaru m . W pracy [P2] opisano także wszystkie n -wierzchołkowe grafy maksymalne K_p -wolne największego rozmiaru, które nie są $(p-1)$ -dzielne i mają rozmiar m .

Grafy słabo nasycone ([P3], [P4]) Niech F będzie ustalonym grafem. Mówimy, że graf G jest *słabo F -nasycony*, jeżeli nie zawiera grafu F (jest grafem F -wolnym) i wszystkie krawędzie należące do $E(\overline{G})$ można ustawić w ciąg w taki sposób, aby dodając kolejno krawędzie z ciągu, za każdym razem pojawiał się nowy podgraf F . Najmniejszy rozmiar n -wierzchołkowego grafu słabo F -nasyconego oznaczamy przez $\text{wsat}(n, F)$. W [P3] wyznaczono dokładne wartości $\text{wsat}(n, F)$, gdy F jest cyklem, drogą, gwiazdą, $2K_2$. Ostatnio, Faudree, Gould i Jacobson przygotowali cykl prac [32, 33, 34], w których wyznaczili dokładną lub podali oszacowania wartości $\text{wsat}(n, F)$, gdy F jest pewnym szczególnym drzewem, grafem pełnym wielodzielnym, grafem prawie pełnym lub rozłączną sumą grafów spójnych. Do wyznaczenia liczby $\text{wsat}(n, F)$ dla grafów niespójnych ([34]) autorzy wykorzystali twierdzenia udowodnione w pracy [P3].

Kolejnym problemem, którym zajmowano się w pracy [P3], jest rozmiar grafów słabo $\mathcal{P}$ -nasyconych dla własności dziedzicznej $\mathcal{P}$. Niech będzie własnością dziedziczną i $F(\mathcal{P})$ zbiorem minimalnych grafów zabronionych. Mówimy, że graf G jest *słabo $\mathcal{P}$ -nasycony*, jeżeli $G \in \mathcal{P}$ i wszystkie krawędzie należące do $E(\overline{G})$ można ustawić w ciąg w taki sposób, aby dodając kolejno krawędzie z ciągu, za każdym razem pojawiał się nowy podgraf należący do $F(\mathcal{P})$. Najmniejszy rozmiar n -wierzchołkowego grafu słabo $\mathcal{P}$ -nasyconego oznaczamy przez $\text{wsat}(n, \mathcal{P})$. W [P3] podano wartości $\text{wsat}(n, \mathcal{O}_k)$ i $\text{wsat}(n, \mathcal{D}_1)$ oraz wyznaczono ograniczenie górne dla $\text{wsat}(n, \mathcal{D}_k)$. Praca [P3] zawiera wyniki rozprawy doktorskiej autorki niniejszego opracowania.

W pracy [P4] kontynuowano badanie rozmiaru grafów słabo $\mathcal{P}$ -nasyconych. Podano ogólne ograniczenia na najmniejszy rozmiar grafów słabo $\mathcal{P}$ -nasyconych i pokazano własności i oszacowania wynikające z zależności zachodzących w kracie własności dziedzicznych.

Własności lokalne ([P5], [P6]) Niech $\mathcal{P}$ będzie klasą grafów (niekoniecznie dziedziczną). Mówimy, że graf G ma *lokalnie własność $\mathcal{P}$* , jeżeli $G[N(v)] \in \mathcal{P}$ dla każdego $v \in V(G)$. Klasę grafów, które mają lokalnie własność $\mathcal{P}$ oznaczamy przez $L(\mathcal{P})$. Jeżeli $\mathcal{P}$ jest własnością dziedziczną, to $L(\mathcal{P})$ też jest własnością dziedziczną. Zbiór minimalnych grafów zabronionych dla własności $L(\mathcal{P})$, gdy $\mathcal{P}$ jest własnością dziedziczną został opisany przez Borowieckiego *et al.* [13]. W pracy [P5], która zawiera wyniki rozprawy doktorskiej autorki, badano problemy ekstremalne związane z własnościami $L(\mathcal{O}_k)$ i $L(\mathcal{S}_k)$. Wyznaczono największy rozmiar n -wierzchołkowego grafu należącego do $L(\mathcal{O}_k)$ oraz największy rozmiar n -wierzchołkowego grafu należącego do $L(\mathcal{S}_k)$. Dla $k \in \{1, 2\}$ wyznaczono najmniejszy rozmiar n -wierzchołkowego grafu maksymalnego należącego do $L(\mathcal{O}_k)$ i najmniejszy rozmiar n -wierzchołkowego grafu maksymalnego należącego do $L(\mathcal{S}_k)$.

W literaturze badane były także problemy ekstremalne związane z własnością $L(\mathcal{P})$, gdy $\mathcal{P}$ nie jest własnością dziedziczną. Ryjáček *et al.* [50] skonstruowali lokalnie niespójne grafy z dużą liczbą krawędzi. Fronček wyznaczył dolne ograniczenie rozmiaru grafów lokalnie liniowych (tzn. takich, że dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$, $G[N(v)]$ jest skojarzeniem) [35] i grafów, które są lokalnie drogą [36]. Zelinka [58] wyznaczył najmniejszy rozmiar n -wierzchołkowych grafów lokalnie drzewiastych i postawił problem wyznaczenia największego rozmiaru takich grafów. W pracy [P6] rozważano lokalne k -drzewa. Pokazano, że każde $(k+1)$ -drzewo jest lokalnym k -drzewem i udowodniono, że każde spójne lokalne k -drzewo zawiera rozpinające $(k+1)$ -drzewo. Scharakteryzowano n -wierzchołkowe lokalne k -drzewa najmniejszego rozmiaru. Podano konstrukcję maksymalnych lokalnych k -drzew dużego rozmiaru. Wykorzystując tę konstrukcję, otrzymano dolne ograniczenie na największy rozmiar n -wierzchołkowych lokalnych k -drzew.

Grafy dwudzielne z jednym k -faktorem ([P7]) Volkmann [55] badał grafy, które mają dokładnie jeden k -faktor. Dla dowolnego n skonstruował grafy n -wierzchołkowe, które mają jeden k -faktor oraz zasugerował, że otrzymane grafy są grafami największego rozmiaru o tej własności. Hoffman *et al.* [43] wykorzystali wyniki z poprzedniej pracy dla grafów dwudzielnych i wyznaczyli górne ograniczenie dla rozmiaru grafów dwudzielnych z jednym k -faktorem dla $k \leq 3$ i w pewnych szczególnych przypadkach. W pracy [P7] uogólniono to twierdzenie dla dowolnego $k \geq 1$. Udowodniono, że dla $k \geq 1$, $p \equiv t \pmod{k}$, $0 \leq t < k$ graf dwudzielny $2p$ -wierzchołkowy z jednym k -faktorem ma co najwyżej $(p(p+k) - t(k-t))/2$ krawędzi. Ponadto opisano strukturę grafów ekstremalnych.

Uogólnione dominowane, niezależność i nienadmierność ([P8]) W pracy [P8] wprowadzono pojęcia $\mathcal{P}$ -dominowania, $\mathcal{P}$ -niezależności i $\mathcal{P}$ -nienadmierności. Niech

$\mathcal{P}$ będzie własnością dziedziczną. Zdefiniujemy zbiór $\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \{H \in \mathcal{I} : H \notin \mathcal{P} \text{ i } (H - v) \in \mathcal{P} \text{ dla } v \in V(H)\}$. Mówimy, że zbiór $D \subseteq V(G)$ jest $\mathcal{P}$ -dominujący, jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in V \setminus D$ istnieje podgraf H grafu G zawierający v taki, że $V(H) \cap D \neq \emptyset$ i $H \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. Zbiór $D \subseteq V(G)$ jest *silnie* $\mathcal{P}$ -dominujący, jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in V \setminus D$ istnieje podgraf H grafu G zawierający v taki, że $V(H) \setminus \{v\} \subseteq D$ i $H \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. Dwa wierzchołki u i v są $\mathcal{P}$ -sąsiednie, jeżeli istnieje podgraf indukowany H grafu G zawierający u i v taki, że $H \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. Dla danego wierzchołka v przez $N_{\mathcal{P}}$ oznaczamy jego $\mathcal{P}$ -sąsiedztwo, tzn. $N_{\mathcal{P}}(v) = \{u \in V(G) : u \text{ jest } \mathcal{P}\text{-sąsiedni z } v\}$. Mówimy, że zbiór $R \subseteq V(G)$ jest $\mathcal{P}$ -nienadmierny, jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in R$ zachodzi $N_{\mathcal{P}}[v] \setminus N_{\mathcal{P}}[R \setminus \{v\}] \neq \emptyset$. Zbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy $\mathcal{P}$ -niezależnym, jeżeli $G[S] \in \mathcal{P}$. Zbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy *silnie* $\mathcal{P}$ -niezależnym, jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in S$ zachodzi $N_{\mathcal{P}}(v) \cap S = \emptyset$. W grafie G moc najmniejszego zbioru: $\mathcal{P}$ -dominującego, silnie $\mathcal{P}$ -dominującego, $\mathcal{P}$ -nienadmiernego, $\mathcal{P}$ -niezależnego, silnie $\mathcal{P}$ -niezależnego oznaczamy odpowiednio: $\gamma_{\mathcal{P}}(G), \gamma'_{\mathcal{P}}(G), ir_{\mathcal{P}}(G), i_{\mathcal{P}}(G), i'_{\mathcal{P}}(G)$. Natomiast moc największego zbioru: $\mathcal{P}$ -dominującego, silnie $\mathcal{P}$ -dominującego, $\mathcal{P}$ -nienadmiernego, $\mathcal{P}$ -niezależnego, silnie $\mathcal{P}$ -niezależnego oznaczamy odpowiednio: $\Gamma_{\mathcal{P}}(G), \Gamma'_{\mathcal{P}}(G), IR_{\mathcal{P}}(G), \alpha_{\mathcal{P}}(G), \alpha'_{\mathcal{P}}(G)$. W pracy [P8] udowodniono podstawowe własności zbiorów $\mathcal{P}$ -dominujących, $\mathcal{P}$ -nienadmiernych i $\mathcal{P}$ -niezależnych, które uogólniają znane własności zbiorów dominujących, nienadmiernych i niezależnych. Udowodniono także prawdziwość następujących ciągów nierówności:

$$ir_{\mathcal{P}}(G) \leq \gamma_{\mathcal{P}}(G) \leq i'_{\mathcal{P}}(G) \leq \alpha'_{\mathcal{P}}(G) \leq \Gamma_{\mathcal{P}}(G) \leq IR_{\mathcal{P}}(G) \text{ oraz} \\ ir_{\mathcal{P}}(G) \leq \gamma_{\mathcal{P}}(G) \leq \gamma'_{\mathcal{P}}(G) \leq i_{\mathcal{P}}(G) \leq \alpha_{\mathcal{P}}(G) \leq \Gamma'_{\mathcal{P}}(G).$$

Zbiory dominujące i bezpieczne ([P9], [P10]) Rozważmy graf, którego wierzchołki reprezentują członków pewnych przeciwnych grup. Krawędź między dwoma wierzchołkami mówi, czy dane wierzchołki mogą bronić lub atakować się wzajemnie. Napastnik może atakować tylko jeden wierzchołek. Podobnie, obrońca może bronić siebie lub pomagać w obronie jednemu swojemu sąsiadowi. Jeżeli mamy zbiór obrońców (wierzchołków), który może obronić każdy atak, to mówimy, że zbiór jest *bezpieczny*. Definicja zbioru bezpiecznego została wprowadzona przez Brigham *et al.* w [14]. Brigham *et al.* udowodnili, że zbiór S jest bezpieczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \subseteq S$ zachodzi $|N[X] \cap S| \geq |N[X] \setminus S|$. W pracy [P9] wprowadzono pojęcie *zbioru silnie bezpiecznego* zdefiniowanego jako zbiór bezpieczny, który może obronić każdy atak z jednym dodatkowym napastnikiem. Z tego wynika, że zbiór S jest silnie bezpieczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niepustego zbioru $X \subseteq S$ zachodzi $|N[X] \cap S| > |N[X] \setminus S|$. Pokazano, że prawie każdy n -wierzchołkowy graf kubiczny ma najmniejszy zbiór silnie bezpieczny o mocy co najwyżej $n/2 + 1$. W

pracy [P9] badano także możliwość rozszerzania zbiorów bezpiecznych i silnie bezpiecznych. Mówimy, że zbiór (silnie) bezpieczny S grafu G jest *rozszerzalny*, jeżeli $|S| < |V(G)|$ i istnieje wierzchołek $v \in V(G) \setminus S$ taki, że $S \cup \{v\}$ jest zbiorem (silnie) bezpiecznym grafu G . Mówimy, że graf G jest ($\hat{s}$ -rozszerzalny) *s-rozszerzalny*, jeżeli każdy zbiór (silnie) bezpieczny grafu G , z wyjątkiem $V(G)$, jest rozszerzalny. Pokazano, że każdy graf spójny G taki, że $\Delta(G) \leq 3$ jest *s-rozszerzalny*. Natomiast prawie każdy graf kubiczny nie jest $\hat{s}$ -rozszerzalny. Istnieje dokładnie 8 spójnych grafów kubicznych, które są $\hat{s}$ -rozszerzalne.

Mówimy, że zbiór $D \subseteq V(G)$ jest *dominujący*, jeżeli $N[D] = V(G)$. Zbiór, który jest bezpieczny i dominujący nazywamy *globalnie bezpiecznym*. Moc najmniejszego zbioru dominującego i najmniejszego zbioru globalnie bezpiecznego oznaczamy odpowiednio przez $\gamma(G)$ i $\gamma_s(G)$. Dla dowolnego spójnego n -wierzchołkowego grafu zachodzi $\gamma(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Natomiast, $\gamma_s(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. W pracy [P10] badano globalne zbiory bezpieczne, które zawierają dokładnie połowę wierzchołków danego grafu. Pokazano, że każdy Hamiltonowski, $K_{1,3}$ -wolny (niezawierający podgrafu indukowanego $K_{1,3}$) graf kubiczny ma taki globalny zbiór bezpieczny. Ponadto pokazano, że każdy $K_{1,3}$ -wolny graf kubiczny ma globalny zbiór bezpieczny, który zawiera co najwyżej $5/9$ wierzchołków danego grafu.

Gra kolorująca z listy ([P11]) W pracy [P11] wprowadzono grę, która jest połączeniem gry kolorującej i kolorowania grafów z listy. W tej wersji gry każdemu wierzchołowi v zostaje przyporządkowana lista kolorów $L(v)$, wierzchołek może zostać pokolorowany tylko kolorem, który jest na jego liście. Funkcję $L : V(G) \rightarrow 2^N$ nazywamy *przypisaniem list* do grafu G . Jeżeli $|L(v)| = k$ dla każdego $v \in V$, to L nazywamy *przypisaniem k -list* do grafu G . Graf z przypisanymi listami L oznaczamy $(G; L)$. Niech dany będzie graf z przypisanymi listami $(G; L)$. Dwóch graczy Alice i Bob naprzemian kolorują wierzchołki grafu G , Alice rozpoczyna grę. Niepokolorowany wierzchołek v może zostać pokolorowany kolorem i tylko, gdy $i \in L(v)$ oraz v nie ma sąsiada pokolorowanego kolorem i . Alice wygrywa grę, gdy wszystkie wierzchołki grafu zostaną pokolorowane, w przeciwnym razie grę wygrywa Bob. Powyższą grę nazywamy *grą kolorującą z listy*. Najmniejszą liczbę k , dla której Alice ma strategię wygrywającą na grafie G z przypisanymi k -listami nazywamy *rozgrywaną liczbą wybieralności* grafu G i oznaczamy przez $ch_g(G)$.

W pracy [P11] scharakteryzowano wszystkie grafy z rozgrywaną liczbą wybieralności równą 2. Pokazano, że $ch_g(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G = \{kP_4 \cup tC_4 \cup H\}$, gdzie $k \geq 0, t \in \{0, 1\}$ i H jest lasem gwiazd nieparzystego rzędu. Ponadto w pracy [P11] badano zależności pomiędzy rozgrywaną liczbą wybieralności a rozgrywaną liczbą chromatyczną i liczbą wybieralności.

Dynamiczne kolorowanie grafów ([P12]) *Dynamiczne kolorowanie* grafów możemy zdefiniować przez dwuosobową grę. Dwóch graczy, nazywanych *Prezenter* i *Malarz*, grają naprzemiennie. Prezenter stopniowo pokazuje strukturę grafu, wskazując Malarzowi wierzchołek do pokolorowania. Prezenter może także odkolorować pokolorowany wierzchołek i wskazać go ponownie do pokolorowania. Zadaniem Malarza, który nie zna struktury grafu ani kolejności w jakiej kolorowane będą wierzchołki, jest minimalizowanie liczby kolorów. Celem Prezentera jest zmuszenie Malarza do użycia, jak największej liczby kolorów. Dynamiczne kolorowanie jest naturalnym uogólnieniem kolorowania grafów on-line.

W pracy [P12] badano efektywność dynamicznego kolorowania dla pewnych klas grafów. Wprowadzono dynamiczną liczbę chromatyczną i zdefiniowano algorytm *Dynamic-Fit* dynamicznego kolorowania grafów. Podano twierdzenie charakteryzujące grafy, które wymuszają kolorowanie drzew algorytmem *Dynamic-Fit* za pomocą k -kolorów. Z tego twierdzenia wynika, że można w czasie wielomianowym sprawdzić, czy dane drzewo jest dynamicznie k -kolorowalne algorytmem *Dynamic-Fit*. Podano konstrukcję i własności grafów, na których można wymusić aby algorytm *Dynamic-Fit* użył na każdym wierzchołku grafu innego koloru. Ponadto podano ograniczenia i dokładne wartości dynamicznej liczby chromatycznej dla algorytmu *Dynamic-Fit* dla wybranych produktów grafów.

Gry kolorujące ([P13]) W pracy [P13] kontynuowano badania, rozpoczęte w pracach [H8, H9], nad grą niewłaściwie kolorującą i jednostronną grą kolorującą na grafach należących do $\mathcal{H}_k$ dla $k \geq 4$. W pracy [P13] wykorzystano metody dowodzenia i strategii gry wprowadzonej w pracach [H8, H9]. Łącząc wyniki uzyskane w pracach [H8, H9] z wynikami pracy [P13] uogólniono twierdzenie 26 dla dowolnego k , pokazano, że $\chi_g^d(\mathcal{H}_k) \leq k + 2 - d$ dla $k \geq 2$ i $0 \leq d \leq k - 1$. Ponadto pokazano, że ograniczenie to można poprawić dla dużych k , $\chi_g^d(\mathcal{H}_k) \leq k + 1 - d$ dla $k \geq 6$, $0 \leq d \leq k - 2$. Graf krawędziowy lasu o maksymalnym stopniu co najwyżej k należy do klasy $\mathcal{H}_k$, zatem z powyższego twierdzenia otrzymano nowe wyniki dla niewłaściwego rozgrywanego indeksu chromatycznego lasów. Niech ${}^{(d)}\chi'_g(G)$ oznacza d -niewłaściwy rozgrywany indeks chromatyczny grafu G . Udowodniono, że ${}^{(d)}\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 2 - d$ dla dowolnego lasu T oraz pokazano, że wynik ten można poprawić dla lasów z dużym maksymalnym stopniem. Otrzymane wyniki poprawiają górne ograniczenia dla niewłaściwego indeksu chromatycznego lasów otrzymane przez by Dunn [26]. Dunn w pracy [26] udowodnił następujące twierdzenia dla lasów.

Twierdzenie 32 ([26]) *Niech T będzie lasem. Jeżeli $d \geq 1$, to ${}^{(d)}\chi'_g(T) \leq \Delta(T) + 1$.*

Twierdzenie 33 ([26]) *Niech T będzie lasem. Jeżeli $d \geq 3$, to ${}^{(d)}\chi'_g(T) \leq \Delta(T)$.*

Powyższe wyniki poprawiono w następujący sposób:

Twierdzenie 34 ([P13], Thm. 10) *Niech T będzie lasem i $\Delta(T) \neq 3$. Jeżeli $d \geq 1$, to ${}^{(d)}\chi'_g(T) \leq \Delta(T)$.*

Twierdzenie 35 ([P13], Thm. 11) *Niech T będzie lasem o maksymalnym stopniu co najmniej 5. Jeżeli $d \geq 2$, to ${}^{(d)}\chi'_g(T) \leq \Delta(T) - 1$.*

Twierdzenie 36 ([P13], Thm. 12) *Niech T będzie lasem. Jeżeli $d \geq 3$, to ${}^{(d)}\chi'_g(T) \leq \Delta(T) - 1$.*

Tęczowa spójność w grafach zorientowanych ([P14]) Niech G będzie grafem, w którym pokolorowane są krawędzie. Drogę nazywamy *tęczową*, jeżeli droga nie ma dwóch krawędzi tego samego koloru. Mówimy, że graf G jest *tęczowo spójny*, jeżeli dowolne dwa wierzchołki połączone są tęczową drogą. Idea tęczowej spójności w grafach wprowadzona została przez Chartrand *et al.* w [22]. Liczbą tęczowej spójności spójnego grafu G , oznaczaną przez $rc(G)$, nazywamy najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do pokolorowania grafu tak, aby był tęczowo spójny. Złożoność obliczeniowa tęczowej spójności badana była przez Chakraborty *et al.* w [20], gdzie udowodniono, że problem wyznaczenia $rc(G)$ jest NP-trudny. W literaturze badana była liczba tęczowej spójności dla pewnych szczególnych klas grafów. Ponadto zostały też wprowadzone parametry podobne do tęczowej spójności takie, jak silna tęczowa spójność, tęczowa k -spójność, wierzchołkowa tęczowa spójność. Zebrane wyniki dotyczące tych parametrów można znaleźć w pracy przeglądowej Li *et al.* [48].

W pracy [P14] rozszerzono pojęcie tęczowej spójności na grafy zorientowane. Łatwo zauważyć, że liczba tęczowej spójności n -wierzchołkowego grafu G wynosi co najwyżej $n - 1$ (każdą krawędź drzewa rozpinającego grafu G kolorujemy innym kolorem), liczba tęczowej spójności grafu zorientowanego może być równa liczbie jej wierzchołków. W pracy [P14] podano charakteryzację grafów zorientowanych z liczbą tęczowej spójności równą liczbie wierzchołków grafu. Udowodniono, że liczba tęczowej spójności turnieju T może być równa dowolnej liczbie całkowitej należącej do przedziału $[2, |V(T)| - 1]$. Ponadto pokazano, że jeżeli średnica turnieju wynosi d , to liczba tęczowej spójności wynosi co najwyżej $d + 2$.

References

- [1] L. Addario-Berry, R.J. Kang, T. Müller, *Acyclic dominating partitions*, J. Graph Theory 64 (2010) 292–311.

-
- [2] N. Alon, P. Erdős, R. Holzman, M. Krivelevich, *On k -saturated graphs with restrictions on the degrees*, J. Graph Theory 23 (1996) 1–20.
 - [3] K. Amin, J.R. Faudree, R.J. Gould, *The edge spectrum of K_4 -saturated graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comp. 81 (2012) 233–242.
 - [4] S.D. Andres, *Spieltheoretische Kantenfärbungsprobleme auf Wäldern und verwandte Strukturen* (Germany), Diplomarbeit, Universität zu Köln, 2003.
 - [5] S.D. Andres, *The game chromatic index of forests of maximum degree $\Delta \geq 5$* Discrete Applied Math. 154 (2006) 1317–1323.
 - [6] C. Barefoot, K. Casey, D. Fisher, K. Fraughnaugh and F. Harary, *Size in maximal triangle-free graphs and minimal graphs of diameter 2*, Discrete Math. 138 (1995) 93–99.
 - [7] E.T. Baskoro, T. Vetrík, L. Yulianti, *Ramsey $(K_{1,2}, C_4)$ -minimal graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 30 (2010) 637–649.
 - [8] E.T. Baskoro, L. Yulianti, H. Assiyatun, *Ramsey $(K_{1,2}, C_4)$ -minimal graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comp. 65 (2008) 79–90.
 - [9] H.L. Bodlaender, *On the complexity of some colorings games*, Internat. J. Found. Comput. Sci. 2 (1991) 133–147.
 - [10] P. Boiron, E. Sopena, L. Vignal, *Acyclic improper colourings of graphs with bounded degree*, DIMACS Series in Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 49 (1999) 1–9.
 - [11] O.V. Borodin, *On acyclic colorings of planar graphs*, Discrete Math. 25 (1979) 211–236.
 - [12] M. Borowiecka-Olszewska, M. Hałuszczak, *On Ramsey $(K_{1,2}, \mathcal{G})$ -minimal graphs*, Discrete Math. 303 (2013) 1843–1855.
 - [13] M. Borowiecki, P. Mihók, *On graphs with a local hereditary properties*, Discrete Math. 236 (2001) 53–58.
 - [14] R.C. Brigham, R.D. Dutton, S.T. Hedetniemi, *Security in graphs*, Discrete Appl. Math. 155 (2007) 1708–1714.

-
- [15] S.A. Burr, P. Erdős, R.J. Faudree, C.C. Rousseau, R.H. Schelp, *Ramsey-minimal Graphs for Star-forests*, Discrete Math. 33 (1981) 227–237.
 - [16] S.A. Burr, P. Erdős, R.J. Faudree, R.H. Schelp, *A class of Ramsey-finite graphs*, Congr. Numer. 21 (1978) 171–180.
 - [17] S.A. Burr, P. Erdős, L. Lovász, *On Graphs of Ramsey Type*, Ars Combin. 1 (1976) 167–190.
 - [18] M.I. Burstein, *Every 4-valent graph has an acyclic 5-coloring*, Soobšč. Akad. Gruzin. SSR 93 (1979) 21–24 (in Russian).
 - [19] L. Cai, X. Zhu, *Game chromatic index of k -degenerate graphs*, J. Graph Theory 36 (2001) 144–155.
 - [20] S. Chakraborty, E. Fischer, A. Matsliah, R. Yuster, *Hardness and algorithms for rainbow connectivity*, J. Comb. Optim. 21 (2011) 330–347.
 - [21] W. H. Chan, G. Nong, *The game chromatic index of some trees of maximum degree 4*, Discrete Appl. Math. 170 (2014) 1–6.
 - [22] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang. *Rainbow connection in graphs*, Math. Bohem. 133 (2008) 85–98.
 - [23] C.Y. Chou, W. Wang, X. Zhu, *Relaxed game chromatic number of graphs*, Discrete Math. 262 (2003) 89–98.
 - [24] R. Diestel, Graph Theory (Springer-Verlag New York, Inc., 1997).
 - [25] D.A. Duffus, D. Hanson, *Minimal k -saturated and color critical graphs of prescribed minimum degree*, J. Graph Theory 10 (1986) 55–67.
 - [26] C. Dunn, *The relaxed game chromatic index of k -degenerated graphs*, Discrete Math. 307 (2007) 1767–1775.
 - [27] J. Edmonds, *Paths, trees, and flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 449–467.
 - [28] P.L. Erdős, U. Faigle, W. Hochstättler, W. Kern, *Note on the game chromatic index of trees*, Theor. Comput. Sci. 313 (2004) 371–376.
 - [29] P. Erdős, A. Hajnal, J.W. Moon, *A problem in graph theory*, Amer. Math. Monthly 71 (1964) 1107–1110.

-
- [30] P. Erdős, R. Holzman, *On maximal triangle-free graphs*, J. Graph Theory 18 (1994) 585–594.
 - [31] U. Faigle, U. Kern, H.A. Kierstead, W.T. Trotter, *On the game chromatic number of some classes of graphs* Ars Combin. 35 (1993) 143–150.
 - [32] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, *Weak Saturation Numbers for Sparse Graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 33 (2013) 677–693.
 - [33] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, *Weakly Saturated Graphs*, manuskrypt.
 - [34] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, *Weak Saturation Numbers for Multiple Copies*, manuskrypt.
 - [35] D. Fronček, *Locally linear graphs*, Math. Slovaca 39 (1989) 3–6.
 - [36] D. Fronček, *Locally path-like graphs*, Čas. pro pěst. mat. 114 (1989) 176–180.
 - [37] Z. Füredi, Á. Seress, *Maximal triangle-free graphs with restrictions on the degree*, J. Graph Theory 18 (1994) 11–24.
 - [38] T. Gallai, *Neuer Beweis eines Tutte’schen Satzes*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8 (1963) 135–139.
 - [39] T. Gallai, *Kritische Graphen II*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8 (1963) 373–395.
 - [40] B. Grünbaum, *Acyclic coloring of planar graphs*, Israel J. Math. 14 (1973) 390–412.
 - [41] M. Hałuszczak, *On Ramsey $(K_{1,2}, K_n)$ -minimal graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 32 (2012) 331–339.
 - [42] W. He, J. Wu, X. Zhu, *Relaxed game chromatic number of trees and outerplanar graphs*, Discrete Math. 281 (2004) 209–219.
 - [43] A. Hoffmann, L. Volkmann, *On unique k -factors and unique $[1, k]$ -factors in graphs*, Discrete Math. 278 (2004) 127–138.
 - [44] A.V. Kostochka, *Upper bounds of chromatic functions of graphs*, Ph.D. Thesis, Novosibirsk, 1978 (in Russian).

-
- [45] A.V. Kostochka, C. Stocker, *Graphs with maximum degree 5 are acyclically 7-colorable*, Ars Math. Contemp. 4 (2011) 153–164.
 - [46] H.A. Kierstead, *A simple competitive graph colouring algorithm*, J. Combin. Theory (B) 78 (2000) 57–68
 - [47] I. Mengersen, J. Oeckermann, *Matching-star Ramsey Sets*, Discrete Applied Math. 95 (1999) 417–424.
 - [48] X. Li, Y. Shi, Y. Sun, *Rainbow Connections of Graphs: A survey*, Graphs Combin. 29 (2013) 1–38.
 - [49] T. Łuczak, *On Ramsey Minimal Graphs*, Electron. J. Combin. 1 (1994).
 - [50] Z. Ryjáček, B. Zelinka, *A locally disconnected graph with large number of edges*, Math. Slovaca 37 (1987) 195–198.
 - [51] S. Skulrattanakulchai, *Acyclic colorings of subcubic graphs*, Inform. Process. Lett. 92 (2004) 161–167.
 - [52] W.T. Tutte, *The factorization of linear graphs*, J. London Math. Soc. 22 (1947) 107–111.
 - [53] P. Turan, *An extremal problem in graph theory*, Mat. Fiz. Lapok 48 (1941) 436–452.
 - [54] Zs. Tuza, *Extremal Problems on Saturated Graphs and Hypergraphs*, Ars Combin. 25B (1988) 105–113.
 - [55] L. Volkmann, *The maximum size of graphs with a unique k -factor*, Combinatorica 24 (2004) 531–540.
 - [56] J. Wu, X. Zhu, *Relaxed game chromatic number of outer planar graphs*, Ars Combin. 81 (2006) 359–367.
 - [57] A. Yang, J. Yuan, *Partition the vertices of a graph into one independent set and one acyclic set*, Discrete Math. 306 (2006) 1207–1216.
 - [58] B. Zelinka, *Locally tree-like graphs*, Čas. pro pěst. mat. 108 (1983) 230–238.
 - [59] Y. Zhao, Li. Miao, S. Pang, W. Song, *Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree six*, Discrete Math. 325 (2014) 17–22.

- [60] X. Zhu, *The game coloring number of planar graphs*, J. Combin. Theory (B) 75 (1999) 245–258.

Elizbieta Sidorova