

**Justyna Marta Jarczyk**

AUTOREFERAT

2019

1. IMIONA I NAZWISKO: Justyna Marta Jarczyk

2. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

- 29.06.1999 – dyplom magistra matematyki uzyskany na Wydziale Matematyki, Fizyki i Techniki w Wyższej Szkole Pedagogicznej im. Tadeusza Kotarbińskiego w Zielonej Górze, na podstawie pracy magisterskiej *Charakteryzacja norm przestrzeni  $L^p$* , napisanej pod kierunkiem prof. dra hab. Janusza Matkowskiego;
- 16.05.2007 – dyplom doktora nauk matematycznych uzyskany na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego, na podstawie rozprawy doktorskiej *Niezmienniczość średnich quasi-arytmetycznych ważonych*, napisanej pod kierunkiem prof. dra hab. Janusza Matkowskiego.

3. ZATRUDNIENIE W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- 1999–2001 – asystent w Instytucie Matematyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Zielonej Górze;
- 2001–2009 – asystent w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Zielonogórskiego;
- od 2009 – adiunkt na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego.

## Spis treści

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4. Osiągnięcie naukowe .....                                                     | 4  |
| A) tytuł osiągnięcia naukowego .....                                             | 4  |
| B) wykaz prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego .....                    | 4  |
| C) omówienie wyników wyżej wymienionych publikacji .....                         | 5  |
| 4.1 Wprowadzenie .....                                                           | 5  |
| 4.2 Uogólniony problem Matkowskiego-Sutô .....                                   | 13 |
| 4.2.1 Podnoszenie regularności generatorów .....                                 | 14 |
| 4.2.2 Postać rozwiązań lokalnych .....                                           | 15 |
| 4.2.3 Twierdzenie o przedłużaniu i rozwiązanie problemu .....                    | 19 |
| 4.2.4 Zastosowanie do badania średnich sprzężonych .....                         | 22 |
| 4.3 Iteracje par średnich .....                                                  | 26 |
| 4.3.1 Pierwiastki iteracyjne par ważonych średnich<br>quasi-arytmetycznych ..... | 27 |
| 4.3.2 Algorytm Gaussa dla par średnich zależnych od parametru ....               | 29 |
| 4.4 Łączenie średnich .....                                                      | 34 |
| 4.4.1 Postawienie i rozwiązanie problemu .....                                   | 34 |
| 4.4.2 Problem odwrotny .....                                                     | 38 |
| 4.4.3 Iterowane łączenie średnich .....                                          | 40 |
| 5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych .....                      | 44 |
| A) wykaz prac niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego .....                 | 44 |
| B) omówienie wyników wyżej wymienionych publikacji .....                         | 45 |
| Literatura .....                                                                 | 58 |

#### 4 OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE

##### A) TYTUŁ OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

**Średnie:**

**pewne równania funkcyjne z nimi związane,  
iterowanie ich par i operacja łączenia**

##### B) WYKAZ PRAC WCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO (w kolejności omawiania):

- [H1] J. Jarczyk, *Regularity theorem for a functional equation involving means*, Publ. Math. Debrecen 75 (2009), 123-135.
- [H2] J. Jarczyk, *On an equation involving weighted quasi-arithmetic means*, Acta Math. Hungar. 129 (2010), 96-111.
- [H3] J. Jarczyk, *Determination of conjugate means by reducing to the generalized Matkowski-Sutô equation*, Acta Math. Hungar. 139 (2013), 1-10.
- [H4] D. Głazowska, J. Jarczyk, W. Jarczyk, *A square iterative roots of some mean-type mappings*, J. Difference Equ. Appl. 24 (2018), 729-735.
- [H5] J. Jarczyk, *Parametrized means and limit properties of their Gaussian iterations*, Appl. Math. Comput. 261 (2015), 81-89.
- [H6] J. Jarczyk, W. Jarczyk, *Joining means*, Publ. Math. Debrecen 91 (2017), 235-246.
- [H7] J. Jarczyk, *Iterated joining means*, Aequationes Math. 93 (2019), 109-120.

## C) OMÓWIENIE WYNIKÓW WYŻEJ WYMIENIONYCH PUBLIKACJI

## 4.1 WPROWADZENIE

Głównym pojęciem, któremu poświęciłam większość badań prowadzonych w minionych latach, jest pojęcie średniej. Jego idea wydaje się być jedną z najstarszych i najbardziej naturalnych w matematyce. Mając danych  $p$  wielkości  $x_1, \dots, x_p$  intuicyjnie poszukujemy ich wartości średniej  $M(x_1, \dots, x_p)$  wśród liczb leżących pomiędzy najmniejszą i największą z nich:

$$\min \{x_1, \dots, x_p\} \leq M(x_1, \dots, x_p) \leq \max \{x_1, \dots, x_p\}. \quad (1)$$

Warunek ten, podany w roku 1821 przez Cauchy'ego w traktacie [23], jest prawdopodobnie najstarszą formalną definicją średniej. Oczywiście już znacznie wcześniej, bo jeszcze w starożytności, posługiwano się co najmniej trzema konkretnymi średnimi: arytmetyczną  $A$  o wzorze

$$A(x_1, \dots, x_p) = \frac{x_1 + \dots + x_p}{p},$$

geometryczną  $G$ , określoną równością

$$G(x_1, \dots, x_p) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_p)^{\frac{1}{p}}$$

i harmoniczną  $H$ , obliczaną za pomocą wzoru

$$H(x_1, \dots, x_p) = \frac{p}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_p}}.$$

Współcześnie, wzorując się na idei Cauchy'ego, przez *średnią  $M$  ( $p$  zmiennych) na przedziale  $I \subset \mathbb{R}$*  rozumiemy funkcję  $M : I^p \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającą nierówności (1) dla wszystkich  $x_1, \dots, x_p \in I$ . Średnia  $A$  jest zwykle rozpatrywana na przedziale  $\mathbb{R}$ , podczas gdy średnie  $G$  i  $H$  na przedziale  $(0, +\infty)$ . Zauważmy, że jeśli  $M : I^p \rightarrow \mathbb{R}$  jest dowolną średnią, to

$$M(x, \dots, x) = x, \quad x \in I,$$

oraz  $M(I^p) = I$ .

W autoreferacie, a także w omawianych tu pracach, zakładamy, że  $p = 2$ . Rozpatruję więc tylko średnie dwóch zmiennych, co upraszcza rozważania, wypowiedzi rezultatów i rachunki, a z drugiej strony nie ogranicza różnorodności pojawiających się problemów.

Znanych jest wiele klas średnich. Poniżej opiszę kilka najważniejszych, szczególnie tych, które są generowane przez pewne funkcje rzeczywiste jednej zmiennej

i/lub parametry liczbowe. W dalszym ciągu, mając dany przedział  $I \subset \mathbb{R}$ , symbolem  $\mathcal{CM}(I)$  będziemy oznaczać klasę wszystkich ciągłych ściśle monotonicznych funkcji odwzorowujących przedział  $I$  w zbiór  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych.

Średnie quasi-arytmetyczne stanowią naturalne uogólnienie średniej arytmetycznej. Zostały wprowadzone na przełomie lat 20. i 30. minionego wieku niezależnie przez szereg matematyków: Knoppa [76], Chisini [24], Kołmogorowa [77], Nagumo [104] i de Finettiego [47]. Średnią  $M : I^2 \rightarrow I$  nazywamy *quasi-arytmetyczną*, gdy istnieje taka funkcja  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ , że

$$M(x, y) = \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right)$$

dla wszystkich  $x, y \in I$ . Zamiast  $M$  piszemy wtedy  $A^\varphi$ . Każda taka funkcja nazywa się *generatorem średniej  $M$* . Klasyczne średnie  $A, G$  i  $H$  są quasi-arytmetyczne. Ich generatorami są, odpowiednio, funkcje  $\varphi$  o wzorach  $\varphi(x) = x$ ,  $\varphi(x) = \log x$  i  $\varphi(x) = 1/x$ . Inny ważny przykład średniej quasi-arytmetycznej, to średnia Höldera  $H_p$  na przedziale  $(0, +\infty)$ , gdzie  $p \in \mathbb{R}$ , zwana też średnią potęgową, o wzorze

$$H_p(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{x^p + y^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{gdy } p \neq 0, \\ \sqrt{xy}, & \text{gdy } p = 0. \end{cases}$$

Jej generator  $\varphi_p : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest określany równością

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} x^p, & \text{gdy } p \neq 0, \\ \log x, & \text{gdy } p = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Tym samym  $H_1$  jest średnią arytmetyczną na przedziale  $(0, +\infty)$ , a  $H_0$  i  $H_{-1}$  to średnie, odpowiednio, geometryczna i harmoniczna. Spośród licznych pozycji literatury, poświęconych w całości lub choć częściowo, średnim quasi-arytmetycznym wymienimy w kolejności chronologicznej niektóre: klasyczną książkę Hardy'ego, Littlewooda i Pólyi [60], monografię Aczéla [1], Aczéla i Dhombresy [3] oraz książkę Bullena [18], a także prace Sutô [118] i [119], Mikusińskiego [103], Jecklina [71], [72], Knastera [75] i Rylla-Nardzewskiego [116], a z nowszych Matkowskiego [84], Daróczygo, Maksy i Pálesa [38], Daróczygo i Pálesa [40], Pasteczki [111]- [114] oraz Pálesa i Pasteczki [106], [108], [109].

Uwzględniając fakt, że „udział” poszczególnych zmiennych średniej nie musi być taki sam, dochodzimy do pojęcia ważonej średniej quasi-arytmetycznej. Mając daną funkcję  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  i liczbę  $p \in (0, 1)$  definiujemy średnią  $A_p^\varphi : I^2 \rightarrow I$ , przyjmując

$$A_p^\varphi(x, y) = \varphi^{-1} (p\varphi(x) + (1 - p)\varphi(y))$$

dla wszystkich  $x, y \in I$ . Nazywamy ją *ważoną średnią quasi-arytmetyczną generowaną przez  $\varphi$  z wagą  $p$* . Różnym problemom związanym z ważonymi średnimi quasi-arytmetycznymi poświęcone są między innymi fragmenty książek [60] Hardy'ego,

Littlewooda i Pólyi i [1] Aczéla, a także liczne prace, wśród nich [57] Głazowskiej, W. Jarczyka i Matkowskiego, [41] i [42] Daróczyego i Pálesa, [33] Daróczyego, Hajdu i Ng, [83] Maksy i Pálesa, [74] Kahliga i Matkowskiego, [107] Pálesa i Pasteczki, oraz prace [P2] J. Jarczyk i Matkowskiego, [P4] J. Jarczyk oraz [P15] Chudziaka, Głazowskiej, J. Jarczyk i W. Jarczyka.

Klasa ważonych średnich quasi-arytmetycznych jest jedną z najważniejszych i najlepiej zbadanych w teorii średnich. Poświęciłam jej najwięcej miejsca w swoich dotychczasowych badaniach. Kolejną ważną klasą jest rodzina średnich Bajraktarevicia, będąca istotnym rozszerzeniem klasy ważonych średnich quasi-arytmetycznych. Wprowadzona została na przełomie lat 50. i 60. ubiegłego wieku przez Bajraktarevicia w pracach [8]- [10]. Mając dany przedział  $I \subset \mathbb{R}$ , funkcje  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  i  $\omega : I \rightarrow (0, +\infty)$  oraz liczbę  $p \in (0, 1)$  definiujemy (ważoną) *średnią Bajraktarevicia*  $B_p^{\varphi, \omega}$  na przedziale  $I$  przyjmując

$$B_p^{\varphi, \omega}(x, y) = \varphi^{-1} \left( \frac{p\omega(x)\varphi(x) + (1-p)\omega(y)\varphi(y)}{p\omega(x) + (1-p)\omega(y)} \right) \quad (3)$$

dla wszystkich  $x, y \in I$ . Zauważmy, że jeśli  $\omega$  jest funkcją stałą:  $\omega(x) = c \in (0, +\infty)$  dla każdego  $x \in I$ , to  $B_p^{\varphi, c} = A_p^{\varphi}$ . Tak więc każda ważona średnia quasi-arytmetyczna jest średnią Bajraktarevicia. Inna uwaga dotyczy sposobu definiowania średnich Bajraktarevicia. Otóż przyjmując  $f := \varphi\omega$  i  $g := \omega$  w równości (3) widzimy, że

$$B_p^{\varphi, \omega}(x, y) = \left( \frac{f}{g} \right)^{-1} \left( \frac{pf(x) + (1-p)f(y)}{pg(x) + (1-p)g(y)} \right) =: B_p^{[f, g]}(x, y).$$

Ostatnia równość bywa używana jako inna, równoważna, definicja średniej Bajraktarevicia. Zakładamy przy tym, że  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : I \rightarrow (0, +\infty)$  są takimi funkcjami, że  $f/g \in \mathcal{CM}(I)$ . Wśród ważnych publikacji dotyczących tej klasy średnich należy wymienić prace [2] Aczéla i Daróczyego, [105] Pálesa, [46] Domsty i Matkowskiego, [83] Maksy i Pálesa, [96] Matkowskiego, [110] Pálesa i Zakarii, a także [P8] J. Jarczyk. Wspomnę jeszcze, że intensywnie były i są badane szczególne przypadki średnich Bajraktarevicia, a mianowicie *średnie Beckenbacha-Giniego*, generowane przez funkcję  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  o wzorze  $\varphi(x) = x$ , a więc średnie postaci

$$\frac{px\omega(x) + (1-p)y\omega(y)}{p\omega(x) + (1-p)\omega(y)}$$

(por. prace [52] Giniego i [13] Beckenbacha) oraz *średnie Giniego*  $G^{r, s}$  na przedziale  $(0, +\infty)$ , zadane równością

$$G^{r, s}(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{x^r + y^r}{x^s + y^s} \right)^{\frac{1}{r-s}}, & \text{gdy } r \neq s, \\ \exp \left( \frac{x^s \log x + y^s \log y}{x^s + y^s} \right) & \text{gdy } r = s. \end{cases}$$

Innym ważnym (i zachęcającym do dalszych badań) rozszerzeniem klasy ważnych średnich quasi-arytmetycznych są *średnie Matkowskiego* postaci

$$(\varphi + \psi)^{-1}(\varphi(x) + \psi(y)),$$

gdzie  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  są funkcjami tego samego rodzaju monotoniczności. Wprowadzone przez Matkowskiego w pracy [89] w roku 2003 doczekały się pierwszych istotnych wyników dopiero pięć lat później (zob. artykuły [102] Matkowskiego i Volkmana oraz [4] Bajaka i Pálesa). Kolejne badania Matkowskiego zaowocowały pracami [93], [95], [98], [99]. Praca [100] Matkowskiego i Pálesa zawiera ważną charakteryzację średnich Matkowskiego.

Ostatnia rodzina średnich, o której tu wspomnę, to klasa średnich Cauchy'ego. Ustalmy przedział  $I \subset \mathbb{R}$  i takie różniczkowalne funkcje  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , że pochodna  $g'$  nie zeruje się, a funkcja  $f'/g'$  jest różnowartościowa. Z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej wynika, że wzór

$$D^{f,g}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{f'}{g'}\right)^{-1} \left(\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right), & \text{gdy } x \neq y, \\ x, & \text{gdy } x = y, \end{cases}$$

definiuje funkcję  $D^{f,g} : I^2 \rightarrow I$ , która jest średnią na przedziale  $I$ . Nazywamy ją *średnią Cauchy'ego generowaną przez funkcje  $f$  i  $g$* . Warto zauważyć, że jeśli także pochodna  $f'$  nie zeruje się, to  $D^{f,g} = D^{g,f}$ . Ważne badania średnich Cauchy'ego zostały przedstawione w pracach [82] Losoncziego, [90] Matkowskiego i [55] Głazowskiej.

Więcej wyników przyniosło badanie *średnich Lagrange'a*, które są średnimi Cauchy'ego, w których generator  $g$  jest funkcją identycznościową. Tak więc średnia Lagrange'a  $L^f$ , generowana przez funkcję  $f$ , ma postać

$$L^f(x, y) = \begin{cases} (f')^{-1} \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right), & \text{gdy } x \neq y, \\ x, & \text{gdy } x = y. \end{cases}$$

Wśród publikacji poświęconych średnim Lagrange'a wymienimy prace [14] Berrone i Moro, [91] i [94] Matkowskiego, [53] i [54] Głazowskiej oraz [58] Głazowskiej i Matkowskiego.

Na koniec krótkiego przeglądu najważniejszych klas średnich wspomnijmy o jeszcze innym szczególnym przypadku średnich Cauchy'ego, jaki stanowią *średnie Stolarsky'ego*. Wprowadzone przez niego w pracy [120] w roku 1975 mogą być krótko określone następująco. Mając dane takie liczby  $p, q \in \mathbb{R}$ , że  $p^2 + q^2 > 0$  definiujemy średnią  $E_{p,q}$  wzorem

$$E_{p,q} = \begin{cases} D^{\varphi_p, \varphi_q}, & \text{gdy } p \neq q, \\ D^{\varphi_p \varphi_0, \varphi_q}, & \text{gdy } p = q, \end{cases}$$



gdzie funkcje  $\varphi_p, p \in \mathbb{R}$ , określone są wzorami (2). Ponadto przyjmujemy, że  $E_{0,0} = G$ . Wykorzystując określenie średniej Cauchy'ego można zapisać jawną postać średniej Stolarsky'ego  $E_{p,q}$  w zależności od wartości parametrów  $p$  i  $q$  (zob. str. 45). Odnotujmy jedynie kilka z artykułów poświęconych średnim Stolarsky'ego: [P1] Błaśińskiej-Lesk (poprzednie nazwisko habilitantki), Głazowskiej i Matkowskiego, [6] i [7] Bajáka i Pálesa oraz [121] Gh. Toadera, Costin i S. Toader.

Wprowadzenie zakończymy przeglądem najważniejszych problemów badanych dotąd w teorii średnich i krótkim opisem aktualnego stanu wiedzy ich dotyczącej.

**(i) Niezmienniczość średnich.** Prosty, bezpośredni rachunek dowodzi klasycznej równości

$$G(A(x, y), H(x, y)) = G(x, y)$$

dla wszystkich  $x, y \in (0, +\infty)$ , wyrażającej niezmienniczość średniej geometrycznej  $G$  względem pary  $(A, H)$  średnich arytmetycznej i harmoniczej. To punkt wyjścia do następującej definicji. Mając dane średnie  $M$  i  $N$  na przedziale  $I$  mówimy, że *średnia  $K$  na  $I$  jest niezmiennicza względem pary  $(M, N)$* , gdy równość

$$K(M(x, y), N(x, y)) = K(x, y)$$

zachodzi dla wszystkich  $x, y \in I$ . Problem wyznaczania (w różnych klasach średnich) par  $(M, N)$ , względem których niezmiennicza jest zadana średnia  $K$  jest badany począwszy od prac [118] i [119] Sutô z roku 1914. Szczególnie intensywny jest tu jednak okres minionych 20 lat. W roku 1998 w pracy [84] Matkowski, nie znając wyników Sutô, zapytał o wszystkie takie pary  $(\varphi, \psi)$  funkcji z rodziny  $\mathcal{CM}(I)$ , że średnia arytmetyczna  $A$  jest niezmiennicza względem pary średnich quasi-arytmetycznych  $(A^\varphi, A^\psi)$ :

$$A(A^\varphi(x, y), A^\psi(x, y)) = A(x, y), \quad x, y \in I.$$

Zauważmy, że problem ten jest równoważny znalezieniu wszystkich par  $(\varphi, \psi)$  spełniających równanie funkcyjne

$$\varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right) + \psi^{-1} \left( \frac{\psi(x) + \psi(y)}{2} \right) = x + y. \quad (4)$$

Rok później, w pracy [85] rozwiązał ten problem pod założeniem, że choć jedna z funkcji  $\varphi, \psi$  jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły. Tuż po tym matematycy węgierscy z Uniwersytetu w Debreczynie, z Daróczyem i Pálesem na czele, odkryli dwie prace Sutô z roku 1914, w których powyższy problem został rozwiązany pod założeniem wysokiej klasy regularności generatorów  $\varphi$  i  $\psi$ . Od tego momentu jest on nazywany problemem Matkowskiego-Sutô. W kolejnych latach systematycznie osłabiano założenia regularnościowe, pod którymi poszukiwane było rozwiązanie (por. prace [37] i [39]). Ostatecznie problem został rozwiązany pod założeniem jedynie ciągłości przez Daróczyego i Pálesa w pracy [40] w roku 2002.

Problem niezmienniczości był i nadal jest badany w licznych klasach średnich. Spośród tych najważniejszych, zawierających ogólne rozwiązanie w danej klasie średnich, wymienimy następujące: praca [80] Lehmera z roku 1971 - w klasie średnich Höldera (por. też [73] Kahliga i Matkowskiego), artykuł [P4] J. Jarczyk z roku 2007 - w klasie ważonych średnich quasi-arytmetycznych, praca [5] Bajáka i Pálesa z roku 2009 - w klasie średnich Giniego oraz praca [6] z roku 2010 tych samych autorów - w klasie średnich Stolarsky'ego. Lista publikacji zawierających wyniki częściowe, czy to ze względu na postać równania niezmienniczości, czy to założenia regularnościowe, jest znacznie dłuższa. Problemowi niezmienniczości średnich całkowicie została poświęcona praca [P13] J. Jarczyk i W. Jarczyka, gdzie można znaleźć znacznie więcej informacji i danych bibliograficznych.

**(ii) Iterowanie odwzorowań zbudowanych ze średnich: ich iteraty całkowite i ułamkowe.** Rozpocznijmy od klasycznego algorytmu Gaussa. Korzystając z pewnych pomysłów Lagrange'a (por. [79]) Gauss zauważył (zob. jego traktat [49], a także [50]), że biorąc dowolne liczby  $x, y \in (0, +\infty)$ , przyjmując  $x_1 = x$  i  $y_1 = y$ , a następnie, rekurencyjnie,

$$x_{n+1} = A(x_n, y_n) \quad \text{ i } \quad y_{n+1} = G(x_n, y_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

definiujemy ciągi  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zbieżne do tej samej granicy  $A \otimes G(x, y)$ . Okazało się, że funkcja  $A \otimes G$  jest średnią na przedziale  $(0, +\infty)$ , spełniającą warunek

$$A \otimes G(A(x, y), G(x, y)) = A \otimes G(x, y), \quad x, y \in (0, +\infty),$$

a więc niezmienniczą ze względu na parę  $(A, G)$ . Gauss nazwał ją *średnią arytmetyczno-geometryczną* (*medium arithmetico-geometricum*). Interesujące, że wartości średniej  $A \otimes G$  wylicza się poprzez całkę eliptyczną:

$$A \otimes G(x, y) = \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 \cos^2 t + y^2 \sin^2 t} dt \right)^{-1}$$

dla wszystkich  $x, y \in (0, +\infty)$  (por. [49], [16] i [40]). Posługując się iteracjami odwzorowania  $(A, G) : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)^2$ , zbieżność ciągów rekurencyjnych (5) można zapisać w postaci

$$(A, G)^n \rightarrow (A \otimes G, A \otimes G).$$

W ciągu minionych 50 lat powyższy algorytm Gaussa został uogólniony na bardzo szeroką klasę ciągłych ścisłych średnich przez liczną grupę matematyków. Swoje wkład odnotowali tu Lehmer w pracy [80] w roku 71, Schoenberg w [117] w roku 1982, Foster i Philips w artykule [48] dwa lata później. Ostatecznie tak zwany uogólniony algorytm Gaussa został w dużej mierze opracowany w monografii [16] J.M. Borweina i P.B. Borweina w roku 1987, a następnie ponownie udowodniony przez

Matkowskiego w pracy [87]. Kolejne uogólnienia pojawiły się w pracach [88], [97] i [101]. Algorytm Gaussa dla średnich zależnych od parametru został opisany w artykule [H5] J. Jarczyk. Tematyka iteracji Gaussa jest stale żywotna i intensywnie badana o czym świadczą najnowsze prace [115] i [101].

Za początek badań iteracji ułamkowych par średnich można uznać pracę Matkowskiego [88], w której rozpatrywane były półpotoki par ważonych średnich quasi-arytmetycznych. Problem zanurzania pary średnich w półpotok był badany przez W. Jarczyka i Matkowskiego w dość szerokiej klasie średnich jednorodnych (zob. [70]). Z kolei ostatnie badania Głazowskiej, J. Jarczyk i W. Jarczyk przyniosły znalezienie postaci wszystkich par ważonych średnich quasi-arytmetycznych mających pierwiastek iteracyjny drugiego stopnia (zob. [H4]), a także postaci par zanurzalnych w półpotoki par takich średnich (zob. [56]).

**(iii) Problem równości i porównywania.** Oba problemy w naturalny sposób pojawiają się w klasach średnich zadanych za pomocą generatorów funkcyjnych i parametrów. Opiszemy je na przykładzie klasy ważonych średnich quasi-arytmetycznych. Problem równości takich średnich polega na scharakteryzowaniu par  $(f, g)$  funkcji z klasy  $\mathcal{CM}(I)$  i par  $(p, q)$  liczb z przedziału  $(0, 1)$ , dla których spełniona jest równość

$$A_p^f = A_q^g.$$

W pełnej ogólności problem został rozwiązany przez Maksę i Pálesa w pracy [83] w roku 2010, choć w szczególnym przypadku średnich quasi-arytmetycznych (przypadek  $p = q = 1/2$ ) odpowiedź była już znana w książce [60] w roku 1934 (por. też prace [76] i [40], a także monografię [1]). Ogólniejszy problem porównywania ważonych średnich quasi-arytmetycznych, sprowadzający się do scharakteryzowania nierówności

$$A_p^f \leq A_q^g$$

został rozwiązany w pracy [83].

**(iv) Średnie sprzężone.** Pojęcie to wprowadził Daróczy w roku 1999 w pracy [26], zainspirowany pomysłem Matkowskiego przedstawionym rok wcześniej w [84]. Mając daną średnią  $L$  na przedziale  $I$ , średnią  $M : I^2 \rightarrow I$  nazwano wtedy  $L$ -sprzężoną, gdy istnieje taka funkcja  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ , że

$$M(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(L(x, y))), \quad x, y \in I.$$

Dwa lata później, w pracy [39], Daróczy i Páles uogólnili tę definicję wprowadzając do powyższego warunku parametry. Średnią  $M$  nazwali  $L$ -sprzężoną, gdy jest postaci

$$M(x, y) = \varphi^{-1}(p\varphi(x) + q\varphi(y) + (1 - p - q)\varphi(L(x, y))), \quad x, y \in I,$$

z pewną funkcją  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  i liczbami  $p, q \in (0, 1]$ . Średnią  $M$  oznaczamy wtedy  $L_{p,q}^\varphi$ . Zauważmy, że przyjmując tu  $p = q = 1$  otrzymujemy poprzedni warunek.

Dla średnich sprzężonych badano wiele szczegółowych problemów: dla przykładu w pracy [27] jest to niezmienniczość, w [28] problemy równości i porównywania, a w pracy [59] Hajdu udowodniła twierdzenie o przedłużeniu, pozwalające przenieść informacje o średniej spełniającej stosowne równanie z podprzedziału na cały przedział. Interesujące jest też, że problem niezmienniczości dla pewnych średnich jest szczególnym przypadkiem problemu równości dla średnich sprzężonych (por., na przykład, prace [11], [31] i [97]). W tematykę średnich sprzężonych wpisuje się też praca [H3] J. Jarczyk, w której równanie  $L_{p,q}^\varphi = A_\nu^\psi$ , gdzie  $L = A_\mu^\varphi$ , zostało całkowicie rozwiązane bez żadnych założeń regularnościowych o generatorach  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ .

**(v) Twierdzenia o przedłużaniu.** Wyznaczając postać średnich spełniających pewne warunki, na przykład równanie niezmienniczości, często otrzymujemy informację jedynie na pewnym podprzedziale. Twierdzenia o przedłużaniu pozwalają przenieść ją na cały przedział. Większość z nich pojawiła się przy badaniu niezmienniczości w klasie ważonych średnich quasi-arytmetycznych, a także pewnych ich wariantów i uogólnień. Wymieńmy tu prace [19] i [20] Buraia, [33] Daróczyego, Hajdu i Che Tat Ng, [38] Daróczyego, Maksy i Pálesa, [59] Hajdu oraz [P4] i [H2] J. Jarczyk.

**(vi) Podnoszenie regularności generatorów średnich spełniających pewne równania.** Rozwiązując problemy niezmienniczości w klasach średnich opisanych przy pomocy generatorów funkcyjnych, a także pewne jego uogólnienia, dochodzi się do zagadnienia wyznaczenia wszystkich par  $(\varphi, \psi)$  funkcji z klasy  $\mathcal{CM}(I)$  spełniających odpowiednie równanie funkcyjne. Najprostrzym przykładem jest tu równanie (4) bezpośrednio związane z problemem Matkowski-Sutô, a więc wyrażające niezmienniczość średniej arytmetycznej ze względu na parę  $(A^\varphi, A^\psi)$ . Jednym z najważniejszych kroków w procedurze rozwiązywania tych równań jest wykazanie, że generatory, a priori ciągłe, są odpowiednio wysokiej klasy regularności. Wiedząc to, oryginalny problem sprowadza się do rozwiązania stosownego równania różniczkowego lub skorzystania z odpowiedniego twierdzenia pochodzącego z monografii Járaia [61]. Wśród artykułów zawierających opisy podnoszenia regularności generatorów wymienimy prace [40], [41] i [42] Daróczyego i Pálesa, a także [P4] i [H1] J. Jarczyk.

**(vii) Łączenie średnich.** Jest to problem, który, jak się wydaje, po raz pierwszy pojawił się w pracy [35] Daróczyego, J. Jarczyk i W. Jarczyka. Mając dany przedział  $I$  i jego punkt wewnętrzny  $\xi$  określmy przedziały  $I_\xi$  i  ${}_\xi I$  równościami

$$I_\xi = \{x \in I : x \leq \xi\} \quad \text{ i } \quad {}_\xi I = \{x \in I : \xi \leq x\}.$$

Problem łączenia średnich  $M$  i  $N$ , odpowiednio na przedziałach  $I_\xi$  i  ${}_\xi I$ , polega na wyznaczeniu takich średnich  $M \oplus N$  na przedziale  $I$ , że

$$M \oplus N|_{I_\xi \times I_\xi} = M \quad \text{ i } \quad M \oplus N|_{{}_\xi I \times {}_\xi I} = N.$$

Oprócz artykułu [35] ten nowy problem badany był dotąd w pracach [H6] i [H7].

Prace wchodzące w skład mojego osiągnięcia naukowego związane są z problemami (ii), (iv)-(vii).

## 4.2 UOGÓLNIONY PROBLEM MATKOWSKIEGO-SUTÔ

Ustalmy przedział  $I \subset \mathbb{R}$  o różnych końcach. Omówimy tu wyniki dotyczące równania funkcyjnego

$$r\varphi^{-1}(p\varphi(x) + (1-p)\varphi(y)) + (1-r)\psi^{-1}(q\psi(x) + (1-q)\psi(y)) = sx + (1-s)y, \quad (6)$$

gdzie  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  i  $p, q \in (0, 1)$  są ustalonymi liczbami, a  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  funkcjami niewiadomymi. Uogólnia ono szereg równań badanych wcześniej. Przede wszystkim zauważmy, że problem niezmienniczości w klasie ważonych średnich quasi-arytmetycznych, czyli równanie

$$A_r^x \circ (A_p^\alpha, A_q^\beta) = A_r^x \quad (7)$$

gdzie  $p, q, r \in (0, 1)$ , przez proste podstawienie  $\varphi = \alpha \circ \chi^{-1}$ ,  $\psi = \beta \circ \chi^{-1}$  sprowadza się do równania

$$A_r \circ (A_p^\varphi, A_q^\psi) = A_r, \quad (8)$$

które jest szczególnym przypadkiem równania (6), gdzie należy przyjąć  $s = r$ . Dla  $p = q = r = 1/2$  równanie (8) przyjmuje postać (4) i opisuje klasyczny problem Matkowskiego-Sutô (zob. [84] i [85]), którego ostateczne rozwiązanie podali Daróczy i Páles w artykule [40] w roku 2002. W pełnej ogólności równanie (8), a więc także (7), zostało rozwiązane przez habilitantkę w pracy [P4] w roku 2007. Pod założeniem różniczkowalności generatorów w sposób ciągły rozwiązanie zostało podane przez Buraia w pracy [19]. Inny szczególny przypadek równania (6) to równanie

$$A_r \circ (A_p^\varphi, A_p^\psi) = A_p, \quad (9)$$

gdzie  $r \in \mathbb{R}$  i  $p \in (0, 1)$ , powstałe przez przyjęcie  $s = q = p$  w (6). Jego rozwiązania zostały znalezione przez Daróczygo i Pálesa w roku 2003 pod założeniem, że generatory  $\varphi$  i  $\psi$  mają nieznikające ciągle pochodne (zob. [41]). Dla  $p = 1/2$  równanie (9) ma postać

$$rA^\varphi + (1-r)A^\psi = A.$$

Jego rozwiązanie odpowiada na pytanie kiedy średnia arytmetyczna jest kombinacją afiniczną średnich quasi-arytmetycznych. Równanie to, pod silniejszymi założeniami regularnościowymi zostało rozwiązane przez Głazowską, W. Jarczyka i Matkowskiego w roku 2002 (zob. [57]). Na koniec odnotujmy kolejny szczególny przypadek równania

(6) powstały przez wzięcie  $p = 1/2$ . Ten przypadek badany był przez Daróczyego i Dascál w pracy [30], a także przez Dascál w [44].

Poniżej, w paragrafach 4.2.1-4.2.3, opiszemy rozwiązanie równania (6) bez żadnych założeń regularnościowych pochodzące z prac [H1] i [H2]. Otrzymane twierdzenie uogólnia zasygnalizowane powyżej rezultaty prac [84], [40], [19], [P4], [57], [43], [30], [44]. W paragrafie 4.2.4 przedstawimy zastosowanie otrzymanego twierdzenia do rozwiązania pewnego problemu z zakresu średnich sprzężonych.

#### 4.2.1 PODNOSZENIE REGULARNOŚCI GENERATORÓW

Problem ten został rozwiązany przez następujący rezultat.

**Twierdzenie 1.** ([H1, Theorem]) *Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ ,  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  i  $p, q \in (0, 1)$ . Jeśli para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (6), to istnieje taki nietrywialny przedział  $I_0 \subset I$ , że funkcje  $\varphi|_{I_0}$  i  $\psi|_{I_0}$  są nieskończenie wiele razy różniczkowalne, a ich pierwsze pochodne nie zerują się.*

Metoda dowodu jest istotną modyfikacją tej użytej w pracy [P4] do rozwiązania problemu niezmienniczości w klasie ważonych średnich quasi-arytmetycznych, a wykorzystującej pomysły Daróczyego i Pálesa z pracy [40], pomocne w rozwiązywaniu problemu Matkowskiego-Sutô. Jej zasadniczym elementem jest poniższy lemat.

**Lemat 2.** ([H1, Lemma 3]) *Niech  $J \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $p, q \in (0, 1)$  i niech  $f, g : J \rightarrow (0, +\infty)$ . Załóżmy, że para  $(f, g)$  spełnia równanie*

$$\begin{aligned} f(pu + (1-p)v)[s(1-q)g(v) - (1-s)qg(u)] \\ = rp(1-q)f(u)g(v) - r(1-p)qf(v)g(u). \end{aligned} \quad (10)$$

*Jeśli funkcja  $f$  jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, a funkcja  $g$  jest pierwszej klasy Baire'a, to  $f$  i  $g$  są nieskończenie wiele razy różniczkowalne na pewnym nietrywialnym podprzedziale przedziału  $J$ .*

W pierwszym kroku dość długiego i nietrywialnego dowodu tego lematu, stosując twierdzenie 8.6 z monografii [61] Járaia i wykorzystując postać równania, dowodzimy ciągłości funkcji  $f$  i  $g$  na pewnym podprzedziale przedziału  $J$ . Następnie, korzystając z twierdzenia 11.6 książki [61], stwierdzamy, że funkcja  $f$  jest lokalnie Lipschitzowska, a stąd, wobec twierdzenia Rademachera, jest różniczkowalna prawie wszędzie (w sensie Lebesgue'a) na pewnym przedziale nietrywialnym. Odwołując się ponownie do książki [61], tym razem do twierdzenia 15.2, dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  wykazujemy istnienie przedziału, na którym funkcja  $f$  jest  $n$ -krotnie różniczkowalna. Ponieważ okazuje się, że przedział ten nie zależy od  $n$ , więc  $f$  ma w jego punktach pochodne wszystkich rzędów. W konsekwencji także funkcja  $g$  ma tę własność.

### 4.2.2 POSTAĆ ROZWIĄZAŃ LOKALNYCH

Poniższe twierdzenie podaje postać lokalnych rozwiązań równania (6). W dalszym ciągu będziemy stosować następującą notację: mając dany zbiór  $X$  mówimy, że funkcje  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  są równoważne, gdy istnieją takie liczby  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $b \in \mathbb{R}$ , że

$$g(x) = af(x) + b, \quad x \in X;$$

piszemy wtedy

$$f(x) \sim g(x), \quad x \in X,$$

lub  $f \sim g$ .

**Twierdzenie 3.** ([H2, Theorem 2]) *Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ ,  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  i  $p, q \in (0, 1)$ . Załóżmy, że para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (6). Wtedy istnieje taki nietrywialny przedział  $I_1 \subset I$ , że zachodzi jeden z następujących warunków:*

(i)  $s = p = q \neq 1/2$  oraz

$$\varphi(x) \sim x, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim x, \quad x \in I_1;$$

(ii)  $s = p = q = 1/2$  i albo

$$\varphi(x) \sim x, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim x, \quad x \in I_1,$$

albo  $r = 1/2$  i istnieje takie  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , że

$$\varphi(x) \sim e^{tx}, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim e^{-tx}, \quad x \in I_1,$$

albo  $r = 2$  i istnieje takie  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I_1$ , że

$$\varphi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|}, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim \log |x - x_0|, \quad x \in I_1,$$

albo  $r = -1$  i istnieje takie  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I_1$ , że

$$\varphi(x) \sim \log |x - x_0|, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|}, \quad x \in I_1;$$

(iii)  $p \neq q$ ,  $r = \frac{s-q}{p-q}$  i albo

$$\varphi(x) \sim x, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim x, \quad x \in I_1,$$

albo  $p + q \neq 1$ ,  $s = \frac{pq}{p+q-1}$  i istnieje takie  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I_1$ , że

$$\varphi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|}, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|}, \quad x \in I_1,$$

albo  $p = 1/2$ ,  $s = \frac{q^2}{q^2 + (1-q)^2}$  i istnieje takie  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I_1$ , że

$$\varphi(x) \sim \log |x - x_0|, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|}, \quad x \in I_1,$$

albo  $q = 1/2$ ,  $s = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$  i istnieje takie  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I_1$ , że

$$\varphi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|}, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim \log |x - x_0|, \quad x \in I_1,$$

albo  $p + q = 1$ ,  $s = 1/2$  i istnieje takie  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , że

$$\varphi(x) \sim e^{tx}, \quad x \in I_1, \quad i \quad \psi(x) \sim e^{-tx}, \quad x \in I_1.$$

Na odwrót: wszystkie pary  $(\varphi, \psi)$  wymienione powyżej spełniają równanie (6).

Naszkicujemy teraz dowód Twierdzenia 3. Załóżmy, że para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (6). Wobec Twierdzenia 1 istnieje taki nietrywialny przedział  $I_0 \subset I$ , że funkcje  $\varphi|_{I_0}$  i  $\psi|_{I_0}$  są nieskończenie wiele razy różniczkowalne, a ich pierwsze pochodne nie zerują się. Różniczkując względem  $x$  funkcje stojące po obu stronach równości (6) i biorąc  $y = x$  stwierdzamy, że

$$s = rp + (1 - r)q. \quad (11)$$

Następnie, definiując funkcje  $f, g : \varphi(I_0) \rightarrow \mathbb{R}$  wzorami

$$f(u) = \varphi'(\varphi^{-1}(u)) \quad i \quad g(u) = \psi'(\varphi^{-1}(u)), \quad (12)$$

sprawdzamy, że para  $(f, g)$  spełnia równanie (10). Kolejnym krokiem dowodu Twierdzenia 3 jest następujący rezultat opisujący lokalne rozwiązania równania (10).

**Twierdzenie 4.** ([H2, Theorem 4]) *Niech  $J \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  i  $p, q \in (0, 1)$ , przy czym  $p \neq q$ . Niech  $f : J \rightarrow (0, +\infty)$  będzie funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a, a  $g : J \rightarrow (0, +\infty)$  funkcją pierwszej klasy Baire'a. Załóżmy, że para  $(f, g)$  spełnia równanie (10). Wtedy istnieje taki nietrywialny przedział  $J_0 \subset J$ , że zachodzi jeden z następujących warunków:*

A. *Funkcje  $f|_{J_0}$  i  $g|_{J_0}$  są stałe.*

B. *Istnieją takie liczby  $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  i  $c \in (0, +\infty)$ , że*

$$au + b \in (0, +\infty), \quad f(u) = (au + b)^\alpha \quad i \quad g(u) = c(au + b)^\beta, \quad u \in J_0,$$

*i albo*

$$(\alpha, \beta) = (-1, -2) \quad i \quad q = \frac{1}{2}, \quad s = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2},$$

*albo*

$$(\alpha, \beta) = (-1, -1) \quad i \quad p + q \neq 1, \quad s = \frac{pq}{p + q - 1},$$



albo

$$(\alpha, \beta) = (1, -1) \quad i \quad p + q = 1, \quad s = \frac{1}{2}.$$

C.  $p = \frac{1}{2}$ ,  $s = \frac{q^2}{q^2 + (1-q)^2}$  i istnieją takie liczby  $a, c \in (0, +\infty)$  i  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , że

$$f(u) = ae^{\alpha u} \quad i \quad g(u) = ce^{\frac{1}{2}\alpha u}, \quad u \in J_0.$$

Porzućmy na chwilę szkic dowodu Twierdzenia 3, żeby pokrótce przedstawić rozumowanie uzasadniające Twierdzenie 4. Przydatny tu jest poniższy lemat, który pozwala rozwiązywać równanie z jedną funkcją niewiadomą w miejsce równania (10) z dwoma funkcjami niewiadomymi.

**Lemat 5.** ([H2, Lemma 3]) *Niech  $J \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  i  $p, q \in (0, 1)$  i niech  $f, g : J \rightarrow (0, +\infty)$  będą funkcjami ciągłymi. Jeśli para  $(f, g)$  spełnia równanie (10), to istnieje taki nietrywialny przedział  $J_0 \subset J$ , że funkcja o wzorze*

$$f(u)^{p(s-q)-rp(1-q)} g(u)^{r(1-p)q-(1-s)q} \quad (13)$$

jest stała na  $J_0$ . Ponadto, albo  $s = p = q$  i  $f$  spełnia równanie

$$f(pu + (1-p)v) \left[ f(u)^{\frac{r}{1-r}} - f(v)^{\frac{r}{1-r}} \right] = r \left[ f(u)^{\frac{1}{1-r}} - f(v)^{\frac{1}{1-r}} \right]$$

na  $J_0$ , albo  $s \neq p$ ,  $p \neq q$  i  $f$  spełnia równanie

$$\begin{aligned} f(pu + (1-p)v) & \left[ s(1-q)f(v)^{\frac{p(1-p)(s-q)}{q(1-q)(s-p)}} - (1-s)qf(u)^{\frac{p(1-p)(s-q)}{q(1-q)(s-p)}} \right] \\ & = rp(1-q)f(u)f(v)^{\frac{p(1-p)(s-q)}{q(1-q)(s-p)}} - r(1-p)qf(v)f(u)^{\frac{p(1-p)(s-q)}{q(1-q)(s-p)}} \end{aligned} \quad (14)$$

na przedziale  $J_0$ .

Pierwsza teza jest prostą konsekwencją zróżniczkowania względem  $u$  funkcji stojących po obu stronach równości (10) i przyjęcia  $v = u$ . Biorąc pod uwagę stałość funkcji o wzorze (13) na pewnym przedziale  $J_0$ , wyliczając postać funkcji  $g|_{J_0}$ , wstawiając ją do równości (10) i korzystając z równości (11) otrzymujemy drugą tezę.

Dowodząc Twierdzenia 4 założymy, że nie zachodzi warunek A. Korzystając z Lematów 2 i 5 znajdujemy nietrywialny przedział  $J_0 \subset J$ , na którym funkcje  $f$  i  $g$  są nieskończenie wiele razy różniczkowalne, funkcja o wzorze (13) jest stała, a funkcja  $f$  spełnia równanie (14) i ma niezerującą się pierwszą pochodną. Dwukrotnie różniczkując względem  $u$  funkcje stojące po obu stronach równości (14) i przyjmując  $v = u$ , po pewnych rachunkach stwierdzamy, że funkcja  $f$  spełnia na przedziale  $J_0$  równanie różniczkowe

$$f''(u)f(u) = df'(u)^2$$

z pewną liczbą  $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Załóżmy, że  $d = 1$ . Wtedy

$$f(u) = ae^{\alpha u}, \quad u \in J_0,$$

dla pewnych  $a \in (0, +\infty)$  i  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a wobec Lematu 5

$$g(u) = ce^{\beta u}, \quad u \in J_0,$$

dla pewnych  $c \in (0, +\infty)$  i  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wstawiając postaci funkcji  $f$  i  $g$  do równości (10) i biorąc pod uwagę równość (11) dochodzimy do warunku C. Załóżmy teraz, że  $d \neq 1$ . Wtedy istnieją takie  $a, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $b \in \mathbb{R}$ , że  $au + b > 0$  oraz

$$f(u) = (au + b)^\alpha, \quad u \in J_0,$$

i, wobec Lematu 5,

$$g(u) = c(au + b)^\beta, \quad u \in J_0,$$

dla pewnych  $c \in (0, +\infty)$  i  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wstawiając postaci funkcji  $f$  i  $g$  do równości (10), a następnie różniczkując pięciokrotnie funkcje stojące po obu stronach otrzymanej równości, otrzymujemy układ pięciu algebraicznych równań z niewiadomymi  $\alpha, \beta, s, r, p, q$ . Opuszczamy tu jego skomplikowaną postać. Dodając do niego równanie (11) i rozwiązując otrzymany układ przy użyciu programu *Mathematica 4.1*, otrzymujemy warunek B.

Powróćmy do rozumowania prowadzącego do tezy Twierdzenia 3. Ponieważ  $A_p^{-\varphi} = A_p^\varphi$  i  $A_q^{-\psi} = A_q^\psi$ , więc możemy założyć, że funkcje  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  są ściśle rosnące. Przypomnijmy, że na mocy Twierdzenia 1 są one nieskończenie wiele razy różniczkowalne na przedziale  $I_0 \subset I$  i mają dodatnie pierwsze pochodne. Jeśli  $p = q$ , to, wobec równości (11), mamy  $s = p = q$ . Wtedy, na podstawie wyników pracy [43] Daróczyego i Pálesa, stwierdzamy, że zachodzi jeden z warunków (i) i (ii). Załóżmy więc, że  $p \neq q$ , co (por. (11)) pociąga równość  $r = \frac{s-q}{p-q}$ . Wzory (12) definiują nieskończenie wiele razy różniczkowalne funkcje  $f, g : \varphi(I_0) \rightarrow (0, +\infty)$ , przy czym, jak wiemy, para  $(f, g)$  spełnia równanie (10). Korzystając z Twierdzenia 4 wyznaczamy możliwe postaci funkcji  $f$  i  $g$  na pewnym, nietrywialnym przedziale  $J_1 \subset \varphi(I_0)$ , a także związki pomiędzy parametrami  $r, s, p, q$  opisane w warunkach A, B i C. Pierwsza z równości (12), definiująca funkcję  $f$ , prowadzi do równania różniczkowego

$$\varphi'(x) = f(\varphi(x))$$

spełnionego na przedziale  $I_1 := \varphi^{-1}(J_1)$ . Rozwiązując je znajdujemy postaci funkcji  $\varphi$  na przedziale  $I_1$ , a następnie, posługując się drugą z równości (12), także postaci funkcji  $\psi$  na  $I_1$ .

### 4.2.3 TWIERDZENIE O PRZEDŁUŻANIU I ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Następujący wynik pozwala przenieść informacje, które przynosi Twierdzenie 3, na przedział  $I$  i, co za tym idzie, znaleźć wszystkie rozwiązania równania (6), które w języku średnich można zapisać w postaci

$$A_r \circ (A_p^\varphi, A_q^\psi) = A_s. \quad (15)$$

Tu i w głównym rezultacie paragrafu 4.3 (por. Twierdzenie 7) kluczowe są poniższe warunki (a)-(e), opisujące możliwe postaci generatorów  $\varphi$  i  $\psi$  w odpowiednim podprzedziale przedziału  $I$ , a także związki pomiędzy parametrami  $r, s, p, q$ .

$$(a) \quad \varphi(x) \sim x \quad i \quad \psi(x) \sim x;$$

$$(b) \quad \varphi(x) \sim e^{tx} \quad i \quad \psi(x) \sim e^{-tx} \text{ dla pewnej liczby } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ oraz } s = r = 1/2 \text{ i } p + q = 1;$$

$$(c) \quad \varphi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|} \quad i \quad \psi(x) \sim \log |x - x_0| \text{ dla pewnej liczby } x_0 \in \mathbb{R} \text{ oraz } s = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}, r = \frac{1}{p^2 + (1-p)^2} \text{ i } q = 1/2;$$

$$(d) \quad \varphi(x) \sim \log |x - x_0| \quad i \quad \psi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|} \text{ dla pewnej liczby } x_0 \in \mathbb{R} \text{ oraz } s = \frac{q^2}{q^2 + (1-q)^2}, r = \frac{-2q(1-q)}{q^2 + (1-q)^2} \text{ i } p = 1/2;$$

$$(e) \quad \varphi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|} \quad i \quad \psi(x) \sim \sqrt{|x - x_0|} \text{ dla pewnej liczby } x_0 \in \mathbb{R} \text{ oraz } p \neq q, p + q = 1, s = \frac{pq}{p+q-1}, r = \frac{s-q}{p-q}.$$

**Twierdzenie 6.** ([H2, Theorem 3]) *Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ ,  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  i  $p, q \in (0, 1)$ . Załóżmy, że para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (6). Jeśli warunek (a) lub (b) zachodzi na nietrywialnym przedziale  $I_1 \subset I$ , to zachodzi na przedziale  $I$ . Jeśli jeden z warunków (c)-(e) zachodzi na nietrywialnym przedziale  $I_1 \subset I$  z pewnym punktem  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I_1$ , to zachodzi na przedziale  $I$ , przy czym  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \text{int} I$ .*

Naszukujemy dowód, który w dużym stopniu jest rachunkowy. Oznaczmy przez  $I_1$  maksymalny przedział otwarty, na którym zachodzi jeden z warunków (a)-(e) i nie zawierający punktu  $x_0$ , gdy jest to warunek (c), (d) lub (e). Biorąc pod uwagę definicję relacji  $\sim$  i zastępując funkcje  $\varphi$  i  $\psi$  funkcjami  $\alpha\varphi + \beta$  i  $\gamma\psi + \delta$ , gdzie  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $\beta, \delta \in \mathbb{R}$  są odpowiednio dobrane, możemy założyć, że znak „ $\sim$ ” w rozpatrywanym warunku jest zastąpiony znakiem „ $=$ ”. Oznaczmy przez  $a$  lewy, a przez  $b$  prawy koniec przedziału  $I_1$ . Główna część dowodu polega na wykazaniu równości  $I_1 = \text{int} I$ . Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy  $a \in \text{int} I$  lub  $b \in \text{int} I$ . Rozpatrzmy pierwszy przypadek. Weźmy dowolną liczbę  $b^* \in (a, b)$ . Wobec ciągłości i ścisłej monotoniczności funkcji  $\varphi$  i  $\psi$  istnieje taka liczba dodatnia  $\varepsilon$ , że  $(a - \varepsilon, a] \subset I$ ,  $(b^* - \varepsilon, b^*] \subset I_1$  oraz

$$p\varphi(x) + (1-p)\varphi(y) \in \varphi(I_1) \quad i \quad q\psi(x) + (1-q)\psi(y) \in \psi(I_1) \quad (16)$$

dla wszystkich  $x \in (a - \varepsilon, a]$  i  $y \in (b^* - \varepsilon, b^*]$ . W kolejnych krokach staramy się otrzymać sprzeczność zakładając kolejne warunki (a)-(e). Rozpatrzmy dla przykładu przypadki (a) i (c).

W pierwszym z nich zakładamy, że  $\varphi(x) = \psi(x) = x$  dla każdego  $x \in I_1$ . Jeśli  $p = q$ , to ze związku (11) wynika, że  $s = p = q$ , a więc równanie (6) przybiera postać (9); dla równania (9) problem przedłużania może być rozwiązany przy pomocy Theorem 3 z pracy [32] Daróczyego i Hajdu (por. też [43]). Możemy więc założyć, że  $p \neq q$ . Wtedy równość (11) daje  $r = \frac{s-q}{p-q}$ . Wykorzystując teraz ten związek, a także równość (6), po pewnych rachunkach stwierdzamy, że

$$rp\varphi(x) + (1-r)q\psi(x) = sx \quad \text{ i } \quad (s-p)(s-q)(\varphi(x) - \psi(x)) = 0$$

dla każdego  $x \in (a - \varepsilon, a]$ . Wnosimy stąd, że

$$\varphi(x) = \psi(x) = x, \quad x \in (a - \varepsilon, a],$$

co przeczy maksymalności przedziału  $I_1$ .

Rozpatrzmy teraz przypadek (c) i założmy, że

$$\varphi(x) = \sqrt{|x - x_0|} \quad \text{ i } \quad \psi(x) = \log |x - x_0|, \quad x \in I_1.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $x_0 = 0$ ,  $I_1 \subset (0, +\infty)$  i  $\varepsilon < a$ . Z Twierdzenia 3 wynika, że albo

$$s = p = q = \frac{1}{2} \quad \text{ i } \quad r = 2,$$

albo

$$p \neq q, \quad r = \frac{s-q}{p-q}, \quad s = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2} \quad \text{ i } \quad q = \frac{1}{2}.$$

W pierwszym przypadku równanie (6) przyjmuje postać

$$2\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) - \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = \frac{x+y}{2}.$$

Oznacza to, że dla wszystkich  $x \in (a - \varepsilon, a]$  i  $y \in (b^* - \varepsilon, b^*]$  mamy

$$x - \varphi(x)^2 = 2\left(\varphi(x) - e^{\frac{\psi(x)}{2}}\right)\sqrt{y},$$

a więc

$$\varphi(x) = \sqrt{x} \quad \text{ i } \quad \psi(x) = \log x, \quad x \in (a - \varepsilon, a], \quad (17)$$

wbrew maksymalności przedziału  $I_1$ . W drugim przypadku równanie (6) przybiera postać

$$\varphi^{-1}(p\varphi(x) + (1-p)\varphi(y)) - 2p(1-p)\psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = p^2x + (1-p)^2y,$$

co dla wszelkich  $x \in (a - \varepsilon, a]$  i  $y \in (b^* - \varepsilon, b^*]$  daje

$$p^2 (x - \varphi(x)^2) = 2p(1 - p) \left( \varphi(x) - e^{\frac{\psi(x)}{2}} \right) \sqrt{y},$$

skąd ponownie otrzymujemy warunek (17).

Twierdzenia 3 i 6 pozwalają sformułować wynik wyznaczający wszystkie rozwiązania równania (6).

**Twierdzenie 7.** ([H2, Theorem 1]) *Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ ,  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  i  $p, q \in (0, 1)$ . Para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (6) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$s = rp + (1 - r)q$$

*i jeden z warunków (a)-(e) zachodzi w przedziale  $I$ , przy czym  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \text{int} I$  w przypadku warunków (c)-(e).*

Wyniki tego rozdziału podsumujemy wymieniając wszystkie ważne średnie quasi-arytmetyczne generowane przez funkcje opisane w Twierdzeniu 7.

1<sup>o</sup> ważne średnie arytmetyczne  $A_p$ :

$$A_p(x, y) = px + (1 - p)y;$$

2<sup>o</sup> średnie  $S_{p,t}$  o wzorze:

$$S_{p,t}(x, y) = \frac{1}{t} \log (pe^{tx} + (1 - p)e^{ty}),$$

gdzie  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

3<sup>o</sup> ważne średnie potęgowe  $R_{p,\xi}^+$  i  $R_{p,\xi}^-$  o środku  $\xi$ , dane wzorami:

$$R_{p,\xi}^+(x, y) = \xi + \left( p\sqrt{x - \xi} + (1 - p)\sqrt{y - \xi} \right)^2,$$

oraz

$$R_{p,\xi}^-(x, y) = \xi - \left( p\sqrt{\xi - x} + (1 - p)\sqrt{\xi - y} \right)^2,$$

gdzie  $\xi \in \mathbb{R} \setminus I$  leży na lewo od przedziału  $I$  w pierwszym przypadku i na prawo od przedziału  $I$  w drugim przypadku;

4<sup>o</sup> ważne średnie geometryczne  $G_{p,\xi}^+$  i  $G_{p,\xi}^-$  o środku  $\xi$ , dane wzorami:

$$G_{p,\xi}^+(x, y) = \xi + (x - \xi)^p (y - \xi)^{1-p},$$

oraz

$$G_{p,\xi}^-(x,y) = \xi - (\xi - x)^p (\xi - y)^{1-p},$$

gdzie  $\xi \in \mathbb{R} \setminus I$  leży na lewo od przedziału  $I$  w pierwszym przypadku i na prawo od przedziału  $I$  w drugim przypadku.

Zatem wszystkie pary średnich spełniających równanie (9) to:  $(A_p, A_q)$ ,  $(S_{p,t}, S_{q,t})$ ,  $(R_{p,\xi}^\varepsilon, G_{q,\xi}^\varepsilon)$ ,  $(G_{p,\xi}^\varepsilon, R_{q,\xi}^\varepsilon)$  i  $(R_{p,\xi}^\varepsilon, R_{q,\xi}^\varepsilon)$ , gdzie  $\varepsilon \in \{+, -\}$ .

#### 4.2.4 ZASTOSOWANIE DO BADANIA ŚREDNICH SPRĘŻONYCH

Twierdzenie 7 pozwoliło rozwiązać następujący problem równości: wyznaczyć wszystkie ważne średnie quasi-arytmetyczne  $A_\mu^\gamma := L$  na przedziale  $I \subset \mathbb{R}$ , dla których średnia  $L$ -sprężona generowana przez funkcję  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  i parametry  $p, q \in (0, 1]$ , czyli średnia  $L_{p,q}^\varphi$  o wzorze

$$L_{p,q}^\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(p\varphi(x) + q\varphi(y) + (1-p-q)\varphi(L(x,y))),$$

jest ważoną średnią quasi-arytmetyczną. Innymi słowy, należy znaleźć wszystkie takie funkcje  $\varphi, \psi, \gamma \in \mathcal{CM}(I)$  i liczby  $p, q \in (0, 1]$ ,  $\mu, \nu \in (0, 1)$ , że trójka  $(\varphi, \psi, \gamma)$  spełnia równanie

$$\varphi^{-1}(p\varphi(x) + q\varphi(y) + (1-p-q)\varphi(A_\mu^\gamma(x,y))) = A_\nu^\psi(x,y),$$

lub, równoważnie,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(p\varphi(x) + q\varphi(y) + (1-p-q)\varphi(\gamma^{-1}(\mu\gamma(x) + (1-\mu)\gamma(y)))) \\ = \psi^{-1}(\nu\psi(x) + (1-\nu)\psi(y)). \end{aligned} \quad (18)$$

Na początku założmy, że  $\gamma = \text{id}|_I$ . Równanie (18) przyjmuje wtedy postać

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(p\varphi(x) + q\varphi(y) + (1-p-q)\varphi(\mu x + (1-\mu)y)) \\ = \psi^{-1}(\nu\psi(x) + (1-\nu)\psi(y)). \end{aligned} \quad (19)$$

Jak pokazuje poniższy lemat badanie równania (19) można sprowadzić do równania (6).

**Lemat 8.** ([H3, Proposition 1]) *Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ ,  $p, q \in (0, 1]$  i  $\mu, \nu \in (0, 1)$ . Para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (19) wtedy i tylko wtedy, gdy para  $(f, g)$ , gdzie*

$$f = \varphi^{-1} \quad i \quad g = \psi \circ \varphi^{-1}, \quad (20)$$

*spełnia równanie*

$$rf^{-1}(\mu f(u) + (1-\mu)f(v)) + (1-r)g^{-1}(\nu g(u) + (1-\nu)g(v)) = su + (1-s)v, \quad (21)$$

gdzie  $s = \frac{p}{p+q}$  i  $r = \frac{p+q-1}{p+q}$ .

Jego dowód sprowadza się do prostego przeliczenia.

W przypadku, gdy  $p + q = 1$ , równanie (19) przybiera postać

$$\varphi^{-1}(p\varphi(x) + (1-p)\varphi(y)) = \psi^{-1}(\nu\psi(x) + (1-\nu)\psi(y)),$$

czyli wyraża równość dwóch ważonych średnich quasi-arytmetycznych. Jego rozwiązanie podali Maksa i Páles w pracy [83]:

Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  i  $p, \nu \in (0, 1)$ . Równość  $A_p^\varphi = A_\nu^\psi$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $p = \nu$  i  $\varphi(x) \sim \psi(x)$ ,  $x \in I$ .

W związku z powyższym w dalszym ciągu będziemy zakładać, że  $p + q \neq 1$ . Pod tym założeniem podamy teraz wszystkie rozwiązanie równania (19).

**Twierdzenie 9.** ([H3, Theorem 1]) Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ ,  $p, q \in (0, 1]$ ,  $p + q \neq 1$  i  $\mu, \nu \in (0, 1)$ . Para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (19) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nu = p + (1 - p - q)\mu \tag{22}$$

i zachodzi jeden z następujących warunków:

$$(i) \quad \varphi(x) \sim x, \quad x \in I, \quad i \quad \psi(x) \sim x, \quad x \in I;$$

$$(ii) \quad p = q = 1, \quad \mu + \nu = 1 \quad i \quad istnieje \quad takie \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus I, \quad że$$

$$\varphi(x) \sim \log |x - x_0|, \quad x \in I, \quad i \quad \psi(x) \sim \frac{1}{|x - x_0|}, \quad x \in I;$$

$$(iii) \quad (1 - p - q)^2 = 4pq, \quad \mu = 1/2 \quad i \quad istnieje \quad takie \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad że$$

$$\varphi(x) \sim e^{tx}, \quad x \in I, \quad i \quad \psi(x) \sim e^{\frac{t}{2}x}, \quad x \in I.$$

Prześledźmy pokrótce dowód. Zakładając, że para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (19) i korzystając z Lematu 8 widzimy, że para  $(f, g)$ , określona równościami (20), spełnia równanie (21). Zastosujemy Twierdzenie 7. Wtedy

$$\frac{p}{p+q} = s = r\mu + (1-r)\nu = \frac{p+q-1}{p+q}\mu + \frac{1}{p+q}\nu,$$

skąd wynika równość (22). Rozpatrzmy z kolei pięć możliwych postaci funkcji  $f$  i  $g$  opisanych w warunkach (a)-(e) tezy Twierdzenia 7. Przyjmijmy  $J := \varphi(I)$ .

(a) Warunki  $f(u) \sim u$ ,  $u \in J$ , i  $g(u) \sim u$ ,  $u \in J$ , oraz równości (20) dowodzą, że  $\varphi(x) \sim x$ ,  $x \in I$ , i  $\psi(x) \sim x$ ,  $x \in I$ , co daje tezę (i).

(b) Mamy

$$\frac{p}{p+q} = s = \frac{1}{2} \quad i \quad \frac{p+q-1}{p+q} = r = \frac{1}{2},$$

skąd  $p = q = 1$  i, wobec równości (22),  $\mu + \nu = 1$ . Ponadto

$$f(u) \sim e^{tu}, \quad u \in J, \quad \text{ i } \quad g(u) \sim e^{-tu}, \quad u \in J,$$

z pewną liczbą  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pierwszy z warunków oznacza istnienie takich liczb  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $x_0 \in \mathbb{R}$ , że

$$f(u) = ce^{tu} + x_0, \quad u \in J.$$

Oczywiście  $x_0 \notin f(J)$ , czyli  $x_0 \notin I$ . Ponadto

$$\varphi(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{t} \log \frac{x - x_0}{c} = \frac{1}{t} (\log |x - x_0| - \log |c|), \quad x \in I,$$

a więc  $\varphi(x) \sim \log |x - x_0|$ ,  $x \in I$ , i, w konsekwencji,

$$\psi(x) = g(\varphi(x)) \sim e^{-t \frac{1}{t} \log \frac{|x - x_0|}{|c|}} \sim \frac{|c|}{|x - x_0|} \sim \frac{1}{|x - x_0|}, \quad x \in I.$$

Zatem spełniona jest teza (ii).

(c) Pokażemy, że ten przypadek nie może zajść. Przypuśćmy, że zachodzi. Wtedy  $\nu = 1/2$  i istnieje taka liczba  $u_0 \in \mathbb{R} \setminus J$ , że

$$f(u) \sim \sqrt{|u - u_0|}, \quad u \in J, \quad \text{ i } \quad g(u) = \log |u - u_0|, \quad u \in J.$$

Zatem

$$f(u) = c\sqrt{|u - u_0|} + x_0, \quad u \in J,$$

z pewnym  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Ponieważ  $u_0 \notin J$ , więc  $x_0 \neq f(J)$ , czyli  $x_0 \notin I$ . Wtedy

$$\varphi(x) = \left( \frac{x - x_0}{c} \right)^2 + s_0, \quad x \in I, \quad \text{ lub } \quad \varphi(x) = - \left( \frac{x - x_0}{c} \right)^2 + s_0, \quad x \in I,$$

a zatem

$$\varphi(x) \sim (x - x_0)^2, \quad x \in I,$$

i, w konsekwencji,

$$\psi(x) = g(\varphi(x)) \sim \log |x - x_0|, \quad x \in I.$$

Dla uproszczenia założmy, że  $x_0 = 0$  i  $I \subset (0, +\infty)$ . Wstawiając postaci funkcji  $\varphi$  i  $\psi$  do równości (19), po pewnych rachunkach stwierdzamy, że

$$px^2 + qy^2 + (1 - p - q)(\mu x + (1 - \mu)y)^2 = xy, \quad x, y \in I.$$

Porównując współczynniki stojące przy odpowiednich potęgach zmiennych otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} p + (1 - p - q)\mu^2 = 0, \\ q + (1 - p - q)(1 - \mu)^2 = 0, \\ 2(1 - p - q)\mu(1 - \mu) = 1. \end{cases}$$



Ponieważ  $p > 0$  i  $\mu \neq 0$ , więc z pierwszego równania wynika, że  $p + q > 1$ . Z kolei, ponieważ  $\mu \in (0, 1)$ , trzecie równanie pociąga nierówność  $p + q < 1$ . W konsekwencji przypadek (c) nie może zachodzić. Podobnie wykazujemy, że nie może zajść przypadek (e).

(d) Teraz

$$\frac{p}{p+q} = \frac{\nu^2}{\nu^2 + (1-\nu)^2} \quad \text{i} \quad \frac{p+q-1}{p+q} = \frac{-2\nu(1-\nu)}{\nu^2 + (1-\nu)^2},$$

skąd otrzymujemy  $(p+q-1)^2 = 4pq$ . Ponadto istnieje takie  $u_0 \in \mathbb{R} \setminus J$ , że

$$f(u) \sim \log |u - u_0|, \quad u \in J, \quad \text{i} \quad g(u) = \sqrt{|u - u_0|}, \quad u \in J.$$

Wtedy

$$\varphi(x) = f^{-1}(x) \sim e^{tx}, \quad x \in I,$$

dla pewnego  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  oraz

$$\psi(x) = g(\varphi(x)) \sim \sqrt{e^{tx}} \sim e^{\frac{t}{2}x}, \quad x \in I,$$

co dowodzi tezy (iii).

Tłumacząc Twierdzenie 9 na język średnich otrzymujemy następujący wynik.

**Wniosek 10.** ([H3, Corollary 1]) *Ważona sprzężona średnia arytmetyczna, generowana przez ciągłą ściśle rosnącą funkcję, jest średnią quasi-arytmetyczną ważoną przez  $\nu \in (0, 1)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednej z następujących postaci:*

(i)  $\nu x + (1 - \nu)y$  (ważona średnia arytmetyczna);

(ii)  $\frac{(x-x_0)(y-x_0)}{(1-\nu)(x-x_0)+\nu(y-x_0)} + x_0$  dla pewnego  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I$  (ważona średnia harmoniczna, o środku  $x_0$ );

(iii)  $\frac{1}{\beta} \log (\nu e^{\beta x} + (1 - \nu)e^{\beta y})$  dla pewnego  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Jak wiemy, równanie (18), opisujące oryginalny problem przedstawiony na początku tej części, można łatwo sprowadzić do równania (19): para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (18) wtedy i tylko wtedy, gdy para  $(\varphi \circ \gamma^{-1}, \psi \circ \gamma^{-1})$  jest rozwiązaniem równania (19). Poniższy wniosek z Twierdzenia 9 opisuje rozwiązania tego pierwszego.

**Wniosek 11.** ([H3, Theorem 2]) *Niech  $\varphi, \psi, \gamma \in \mathcal{CM}(I)$ ,  $p, q \in (0, 1]$ ,  $p + q \neq 1$  i  $\mu, \nu \in (0, 1)$ . Trójka  $(\varphi, \psi, \gamma)$  spełnia równanie (18) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość (22) i jeden z następujących warunków:*

$$(i) \varphi(x) \sim \gamma(x), \quad x \in I, \quad i \quad \psi(x) \sim \gamma(x), \quad x \in I;$$

$$(ii) p = q = 1, \mu + \nu = 1 \text{ i istnieje takie } y_0 \in \mathbb{R} \setminus \gamma(I), \text{ że}$$

$$\varphi(x) \sim \log |\gamma(x) - y_0|, \quad x \in I, \quad i \quad \psi(x) \sim \frac{1}{|\gamma(x) - y_0|}, \quad x \in I;$$

$$(iii) (1 - p - q)^2 = 4pq, \mu = 1/2 \text{ i istnieje takie } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ że}$$

$$\varphi(x) \sim e^{t\gamma(x)}, \quad x \in I, \quad i \quad \psi(x) \sim e^{\frac{t}{2}\gamma(x)}, \quad x \in I.$$

### 4.3 ITERACJE PAR ŚREDNICH

Jeśli  $M$  i  $N$  są średnimi na przedziale  $I$ , to para  $(M, N)$  odwzorowuje kwadrat  $I^2$  w siebie. Możemy więc ją iterować, pytać o pierwiastki iteracyjne, wreszcie zanurzać w półpotoki. Myśląc o tych pojęciach w przypadku ogólnym, ustalmy na chwilę przekształcenie  $\phi$  zbioru  $X$ . Jego iteraty  $\phi^n : X \rightarrow X$  określamy rekurencyjnie przyjmując

$$\phi^0 = \text{id}|_X \quad i \quad \phi^{n+1} = \phi \circ \phi^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Z kolei, mając daną liczbę naturalną  $n \geq 2$ , szukamy pierwiastków iteracyjnych stopnia  $n$  funkcji  $\phi$ , czyli takich funkcji  $h : X \rightarrow X$ , że  $h^n = \phi$ . Wreszcie możemy rozważać problem zanurzania funkcji  $\phi$  w półpotok. Polega on na znalezieniu rozwiązań  $\Phi : (0, +\infty) \times X \rightarrow X$  klasycznego równania translacji

$$\Phi(s + t, x) = \Phi(t, \Phi(s, x)),$$

czyli  $\Phi(s + t, \cdot) = \phi(t, \cdot) \circ \phi(s, \cdot)$ , spełniającego warunek początkowy  $\Phi(1, \cdot) = \phi$ . Zauważmy, że wtedy

$$\Phi(1/n, \cdot)^n = \Phi(1, \cdot) = \phi, \quad n \in \mathbb{N},$$

a więc, w szczególności, każda funkcja zanurzalna w półpotok ma pierwiastki iteracyjne wszystkich rzędów.

Poniżej przedstawiamy rozwiązania dwóch problemów tego typu w przypadku, gdy wyjściowa funkcja  $\phi$  to para średnich na tym samym przedziale. Pochodzą one z prac [H4] i [H5].

### 4.3.1 PIERWIASTKI ITERACYJNE PAR WAŻONYCH ŚREDNICH QUASI-ARYTMETYCZNYCH

Opiszemy tu jeszcze jedno, nieco zaskakujące, zastosowanie Twierdzenia 7. Przy jego użyciu wyznaczamy wszystkie pary ważonych średnich quasi-arytmetycznych na przedziale  $I$ , które mają pierwiastki iteracyjne stopnia 2, będące także parami ważonych średnich quasi-arytmetycznych.

Poniższe twierdzenie zawiera opis wszystkich funkcji  $f, g, \varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  i liczb  $s, t, \mu, \nu \in (0, 1)$  spełniających równanie

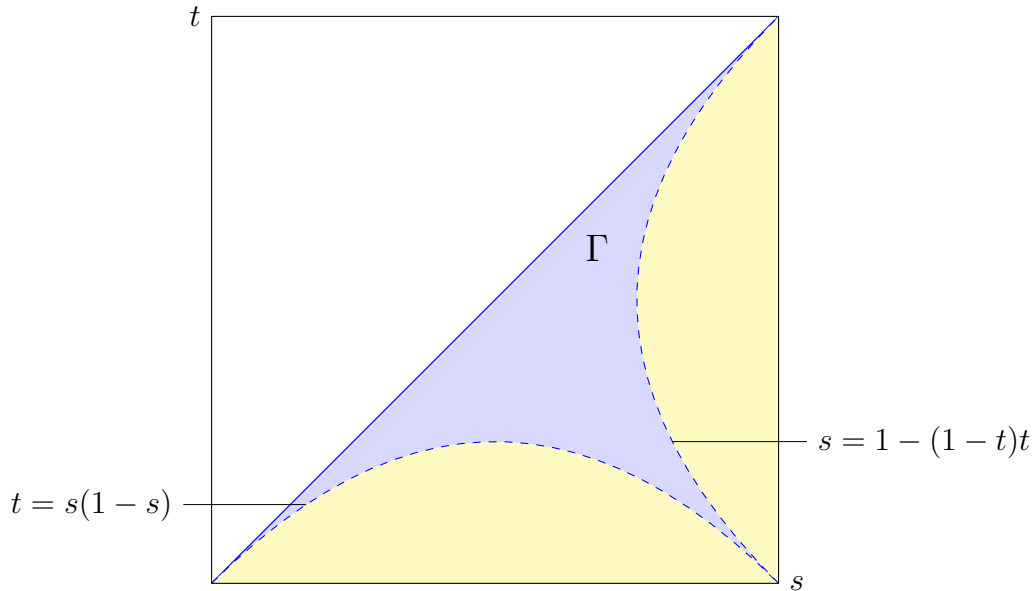
$$(A_\mu^\varphi, A_\nu^\psi) \circ (A_\mu^\varphi, A_\nu^\psi) = (A_s^f, A_t^g). \quad (23)$$

Kluczowe okazują się tu następujące dwa zbiory par parametrów:

$$\Delta = \{(s, t) \in (0, 1)^2 : s \geq t\}$$

oraz

$$\Gamma = \{(s, t) \in \Delta : t > s(1 - s) \text{ i } 1 - s > (1 - t)t\}.$$



**Twierdzenie 12.** ([H4, Theorem 2.2]) *Niech  $f, g, \varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  i  $s, t, \mu, \nu \in (0, 1)$ . Para  $(A_\mu^\varphi, A_\nu^\psi)$  jest kwadratowym pierwiastkiem iteracyjnym odwzorowania  $(A_s^f, A_t^g)$  wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f \sim g, \quad \varphi \sim f, \quad \psi \sim g \quad (24)$$

i zachodzi jeden z poniższych przypadków:

(i)  $(s, t) \in \Gamma$  oraz

$$\mu = \frac{s + \sqrt{s-t}}{1 + \sqrt{s-t}} \quad i \quad \nu = \frac{t}{1 + \sqrt{s-t}}, \quad (25)$$

lub

$$\mu = \frac{s - \sqrt{s-t}}{1 - \sqrt{s-t}} \quad i \quad \nu = \frac{t}{1 - \sqrt{s-t}}; \quad (26)$$

(ii)  $(s, t) \in \Delta \setminus \Gamma$  i spełniony jest warunek (25).

Skupimy się na roli Twierdzenia 7 w dowodzie powyższego rezultatu, opuszczając większość szczegółów rachunkowych. Kluczowy jest tu następujący fakt.

**Lemat 13.** ([H4, Proposition 2.3]) *Niech  $f, g, \varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  i  $s, t, \mu, \nu \in (0, 1)$ . Równanie (23) jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy równości*

$$\frac{1}{\mu} A_s^{f \circ \varphi^{-1}}(u, w) + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) A_\nu^{\psi \circ \varphi^{-1}}(u, w) = \mu u + (1 - \mu)w \quad (27)$$

oraz

$$\frac{1}{1 - \nu} A_t^{g \circ \psi^{-1}}(u, w) + \left(1 - \frac{1}{1 - \nu}\right) A_\mu^{\varphi \circ \psi^{-1}}(u, w) = \nu u + (1 - \nu)w \quad (28)$$

zachodzą dla  $u$  i  $w$  należących odpowiednio do przedziałów  $\varphi(I)$  i  $\psi(I)$ .

Jest to prosta konsekwencja tego, że równanie (23) jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} A_\mu^\varphi(A_\mu^\varphi(x, y), A_\nu^\psi(x, y)) = A_s^f(x, y), \\ A_\nu^\psi(A_\mu^\varphi(x, y), A_\nu^\psi(x, y)) = A_t^g(x, y) \end{cases}$$

oraz prostych rachunków uwzględniających podstawienia  $u = \varphi(x)$  i  $w = \varphi(y)$ .

Chcąc uzasadnić tezę Twierdzenia 12 załóżmy, że  $(A_\mu^\varphi, A_\nu^\psi)$  jest kwadratowym pierwiastkiem iteracyjnym pary  $(A_s^f, A_t^g)$ . Zastosujemy Twierdzenie 7 do obu równań (27) i (28). Jego pierwsza teza, po pewnych przekształceniach, prowadzi do równości

$$s = \mu\mu + (1 - \mu)\nu \quad i \quad t = \nu\mu + (1 - \nu)\nu.$$

Wynika z nich, że  $s - t = (\mu - \nu)^2 \geq 0$ , skąd  $(s, t) \in \Delta$ . Ponadto, wyliczając  $\mu$  i  $\nu$  w zależności od parametrów  $s$  i  $t$ , widzimy, że zachodzi jeden z warunków (25) i (26). Ponieważ  $\mu, \nu \in (0, 1)$ , więc warunek (26) pociąga nierówność  $s - \sqrt{s-t} > 0$

i  $t < 1 - \sqrt{s - t}$ , skąd mamy  $(s, t) \in \Gamma$ . Zatem zachodzi jeden z warunków (i) i (ii) tezy Twierdzenia 12. Z kolei, dowodząc związków (24) korzystamy z drugiej tezy Twierdzenia 7. Generatory  $f \circ \varphi^{-1}$ ,  $\psi \circ \varphi^{-1}$  i parametry, występujące w równaniu (27), spełniają więc jeden z warunków (a)-(e), o których mowa w tym twierdzeniu. Podobna informacja dotyczy też generatorów  $g \circ \psi^{-1}$ ,  $\varphi \circ \psi^{-1}$  i parametrów z równania (28). Okazuje się jednak, że większość przypadków jest niemożliwa: na przykład, gdyby dla równania (27) zachodził przypadek (b) to mielibyśmy  $1/\mu = 1/2$  i  $\mu = 1/2$ , co jest niemożliwe, a gdyby zachodził przypadek (d), to okazałoby się, że liczba  $1/\mu$  jest ujemna; wreszcie gdyby dla każdej z par  $(f \circ \varphi^{-1}, \psi \circ \varphi^{-1})$  i  $(g \circ \psi^{-1}, \varphi \circ \psi^{-1})$  zachodził jeden (niekoniecznie ten sam) z przypadków (c) i (e), to otrzymane informacje o postaci funkcji  $\psi \circ \varphi^{-1}$  i  $\varphi \circ \psi^{-1}$  przeczyłyby temu, że funkcje te są wzajemnie odwrotne. W konsekwencji dla choć jednego z równań (27) i (28) zachodzi przypadek (a), skąd bez większego trudu wnosimy, że  $f \sim \varphi$ ,  $\psi \sim \varphi$ , a także  $g \sim \varphi$ , co daje warunek (24). Sprawdzenie, że wyznaczone pary  $(A_\mu^\varphi, A_\nu^\psi)$  są kwadratowymi pierwiastkami iteracyjnymi odwzorowania  $(A_s^f, A_t^g)$  nie nastęrcza trudności.

Odnотujemy jeszcze następujące dwa wnioski. Oznaczmy przez  $\mathcal{WQA}(I)$  klasę par ważonych średnich quasi-arytmetycznych na przedziale  $I$ .

**Wniosek 14.** ([H4, Corollary 3.2]) *Niech  $f, g \in \mathcal{CM}(I)$  i  $s, t \in (0, 1)$ . Para  $(A_s^f, A_t^g)$  ma kwadratowy pierwiastek iteracyjny w klasie  $\mathcal{WQA}(I)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f \sim g$  i  $(s, t) \in \Delta$ .*

Kolejny wniosek dotyczy problemu jednoznaczności pierwiastków kwadratowych w rozpatrywanej klasie.

**Wniosek 15.** ([H4, Corollary 3.3]) *Niech  $f, g \in \mathcal{CM}(I)$  i  $s, t \in (0, 1)$ . Para  $(A_s^f, A_t^g)$  ma:*

- (i) *dokładnie jeden kwadratowy pierwiastek iteracyjny w klasie  $\mathcal{WQA}(I)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f \sim g$  i  $(s, t) \in \Delta \setminus \text{int}\Gamma$ ;*
- (ii) *dokładnie dwa kwadratowe pierwiastki iteracyjne w klasie  $\mathcal{WQA}(I)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f \sim g$  i  $(s, t) \in \text{int}\Gamma$ .*

Na koniec odnotujemy tylko, że, przy użyciu Twierdzenia 12, Głazowska, J. Jarczyk i W. Jarczyk scharakteryzowali pary  $(A_s^f, A_t^g)$  zanurzalne w półpotok złożony z par należących do klasy  $\mathcal{WQA}(I)$  i opisali postać takich półpotoków (zob. [56]).

#### 4.3.2 ALGORYTM GAUSSA DLA PAR ŚREDNICH ZALEŻNYCH OD PARAMETRU

W tej części wprowadzimy pojęcie średniej zależnej od parametru, definiujemy iteracje Gaussa takich średnich i badamy ich graniczne zachowanie. Wyniki pochodzą z pracy [H5] i uogólniają te dotyczące klasycznego algorytmu Gaussa (por. paragraf

4.1, punkt (ii)). Dla przejrzystości ograniczymy się do par średnich dwóch zmiennych. Odnosimy jednak, że w pracy [H5] rozpatrywana jest sytuacja ogólna, gdy iterujemy ciąg  $(M_1, \dots, M_p)$  średnich  $p$ -zmiennych.

Ustalmy przedział  $I \subset \mathbb{R}$  i niepusty zbiór  $\Omega$ . Funkcję  $M : I^2 \times \Omega \rightarrow I$  nazywamy *średnią z parametrem*, gdy dla każdego parametru  $\omega \in \Omega$  funkcja  $M(\cdot, \omega)$  jest średnią na przedziale  $I$ . Mówimy, że jest ona *ciągłą*, gdy dla wszystkich  $\omega \in \Omega$  średnia  $M(\cdot, \omega)$  jest ciągła. Para  $(M, N)$  średnich z parametrem  $M, N : I^2 \times \Omega \rightarrow I$  odwzorowuje produkt  $I^2 \times \Omega$  w  $I^2$ , nie może więc być iterowana w zwykły sposób. Użyjemy jednak innego pojęcia, mianowicie pojęcia iteracji funkcji zależnej od parametru, wprowadzonego przez Barona i Kuczmę w pracy [12]. Poniżej przypominamy je pokrótce.

Niech  $X$  i  $\Omega$  będą zbiorami, a  $f : X \times \Omega \rightarrow X$  dowolną funkcją. Przyjmijmy  $\Omega^\infty := \Omega^\mathbb{N}$  i określmy iteraty  $f^n : X \times \Omega^\infty \rightarrow X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , rekurencyjnie, za pomocą równości

$$f^1(x, \omega) := f(x, \omega_1)$$

oraz

$$f^{n+1}(x, \omega) := f(f^n(x, \omega), \omega_{n+1})$$

postulowanych dla wszystkich  $x \in X$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^\infty$  i  $n \in \mathbb{N}$ . Pojęcie to ma wiele oczekiwanych, choć niekoniecznie oczywistych własności. W szczególności,

$$f^{n+1}(x, \omega) := f^n(f^1(x, \omega_1), (\omega_2, \omega_3, \dots))$$

dla wszystkich  $x \in I$ ,  $\omega \in \Omega^\infty$  i  $n \in \mathbb{N}$ . Można też dowieść (zob. [H5, Lemma 2.2]), że jeśli  $X$  i  $\Omega$  są przestrzeniami topologicznymi, a  $f : X \times \Omega \rightarrow X$  jest funkcją ciągłą, to dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  iterata  $f^n : X \times \Omega^\infty \rightarrow X$  też jest ciągła. (W zbiorze  $\Omega^\infty$  rozpatrujemy oczywiście topologię produktową Tichonowa.)

Iteraty  $(M, N)^i : I^2 \times \Omega^\infty \rightarrow I^2$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , pary  $(M, N)$  średnich z parametrem, mają postać

$$(M, N)^i = (M_i, N_i),$$

gdzie  $M_i, N_i : I^2 \times \Omega^\infty \rightarrow I$  są średnimi z parametrem, rekurencyjnie określone wzorami

$$M_1(x, y, \omega) = M(x, y, \omega_1) \quad \text{ i } \quad N_1(x, y, \omega) = N(x, y, \omega_1)$$

oraz

$$\begin{aligned} M_{i+1}(x, y, \omega) &= M(M_i(x, y, \omega), N_i(x, y, \omega), \omega_{i+1}), \\ N_{i+1}(x, y, \omega) &= N(M_i(x, y, \omega), N_i(x, y, \omega), \omega_{i+1}) \end{aligned}$$

dla wszystkich  $x, y \in I$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^\infty$  i  $n \in \mathbb{N}$ . Ponadto, dla każdego  $i \in \mathbb{N}$  definiujemy średnie  $K_i^-, K_i^+ : I^2 \times \Omega^\infty \rightarrow I$  wzorami

$$K_i^-(x, y, \omega) = \min \{M_i(x, y, \omega), N_i(x, y, \omega)\}$$

oraz

$$K_i^+(x, y, \omega) = \max \{M_i(x, y, \omega), N_i(x, y, \omega)\}.$$

Następujący przykład jest prostą ilustracją iterowania par średnich z parametrem.

**Przykład 16.** ([H5, Example 2.3]) W roli  $\Omega$  weźmy przedział  $(0, 1)$ . Ustalmy liczbę  $\omega \in (0, 1)$ . Rozpatrzmy parę  $(M, N)$ , gdzie  $M : I^2 \times (0, 1) \rightarrow I$  i  $N : I^2 \times (0, 1) \rightarrow I$  są średnimi z parametrem określonymi odpowiednio równościami

$$M(x, y, \omega) := \omega x + (1 - \omega)y \quad \text{ i } \quad N(x, y, \omega) := (1 - \omega)x + \omega y.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że dla każdego  $i \in \mathbb{N}$  średnie  $M_i$  i  $N_i$ , czyli składowe  $i$ -tej iteraty  $(M, N)^i$  mają odpowiednio postać

$$M_i(x, y, \omega) := \lambda_i x + (1 - \lambda_i)y \quad \text{ i } \quad N_i(x, y, \omega) := (1 - \lambda_i)x + \lambda_i y, \quad (29)$$

gdzie ciąg  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  określamy rekurencyjnie wzorami

$$\lambda_1 := \omega_1 \quad \text{ i } \quad \lambda_{i+1} := \omega_{i+1}\lambda_i + (1 - \omega_{i+1})(1 - \lambda_i), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Poniżej formułujemy wyniki, które rozszerzają tak zwany uogólniony algorytm Gaussa udowodniony przez Matkowskiego w pracach [87], [92] i [97] (por. też paragraf 4.1, punkt (ii)) na średnie z parametrem. Badamy w ten sposób rodzaj deterministycznego iterowanego układu funkcyjnego (*iterated function system*).

Rozpocznijmy od odpowiednika Twierdzenia 4.3 z pracy Matkowskiego [97].

**Twierdzenie 17.** ([H5, Theorem 3.1]) *Niech  $M, N : I^2 \times \Omega \rightarrow I$  będą średnimi z parametrem. Załóżmy, że ciąg  $((M, N)^i)_{i \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny punktowo do odwzorowania  $(K_1, K_2) : I^2 \times \Omega^\infty \rightarrow I^2$ . Wtedy  $K_1$  i  $K_2$  są średnimi niezmienniczymi względem pary  $(M, N)$ :*

$$K_i(M(x, y, \omega_1), N(x, y, \omega_1), (\omega_2, \omega_3, \dots)) = K_i(x, y, \omega), \quad i = 1, 2,$$

*dla wszystkich  $x, y \in I$  i  $\omega \in \Omega^\infty$ . Jeśli ponadto  $K_1 = K_2$ , to  $K := K_1 : I^2 \times \Omega^\infty \rightarrow I$  jest jedyną średnią  $(M, N)$ -niezmienniczą.*

Uzasadniając ten rezultat naśladowałam prosty i dość oczywisty dowód wspomnianego powyżej twierdzenia Matkowskiego. Istotna różnica bierze się głównie z większej komplikacji operacji iterowania funkcji z parametrem.

Założenie zbieżności punktowej ciągu iterat  $(M, N)^i$  jest dość krępujące i, na ogół, trudne do sprawdzenia. Kolejny wynik pokazuje, że założenie ciągłości średnich  $M$  i  $N$ , choć nie gwarantuje tej zbieżności, to pozwala otrzymać tezę, zbliżoną do oczekiwanej.

**Twierdzenie 18.** ([H5, Theorem 3.3]) *Niech  $M, N : I^2 \times \Omega \rightarrow I$  będą ciągłymi średnimi z parametrem. Wtedy*

(i) *dla każdego  $i \in \mathbb{N}$  funkcje  $M_i, N_i, K_i^-$  i  $K_i^+$  są ciągłymi średnimi z parametrem;*

(ii)  $K_i^- \leq K_{i+1}^- \leq K_{i+1}^+ \leq K_i^+$  *dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ ;*

(iii) *dla każdego  $\omega \in \Omega^\infty$  funkcja  $K^-(\cdot, \omega) := \lim_{i \rightarrow \infty} K_i^-(\cdot, \omega)$  jest półciągła z dołu, funkcja  $K^+(\cdot, \omega) := \lim_{i \rightarrow \infty} K_i^+(\cdot, \omega)$  jest półciągła z góry, przy czym  $K^- \leq K^+$ ;*

(iv)  $K^-$  i  $K^+$  są  $(M, N)$ -niezmienniczymi średnimi z parametrem:

$$K^-(M(x, y, \omega_1), N(x, y, \omega_1), (\omega_2, \omega_3 \dots)) = K^-(x, y, \omega)$$

oraz

$$K^+(M(x, y, \omega_1), N(x, y, \omega_1), (\omega_2, \omega_3 \dots)) = K^+(x, y, \omega)$$

dla wszystkich  $x, y \in I$  i  $\omega \in \Omega^\infty$ ;

(v) *jeśli  $K^- = K^+$ , to  $K := K^-$  jest ciągłą średnią z parametrem oraz  $K = \lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \lim_{i \rightarrow \infty} N_i$ ;*

(vi)  $(M, N)$ -niezmiennicza średnia z parametrem jest jedyna wtedy i tylko wtedy, gdy  $K^- = K^+$ ; jest nią wtedy średnia  $K := K^-$ .

W klasycznym algorytmie Gaussa, a także tym uogólnionym, pod założeniem ciągłości średnich  $M$  i  $N$  dowodzi się równości  $K^- = K^+$  (por. pracę [87]), co daje jednoznaczność średniej  $(M, N)$ -niezmienniczej. Sytuacja jest więc klarowna, żeby nie powiedzieć elegancka. Tym ciekawsze, że dla średnich z parametrem tak być nie musi, co pokazuje poniższy przykład.

**Przykład 19.** ([H5, Example 3.4]) Niech  $M, N : I^2 \times (0, 1) \rightarrow I$  będą średnimi z parametrem, rozpatrywanymi w Przykładzie 16. Ustalmy liczbę  $\lambda_0 \in (0, 1/2)$  i ściśle rosnący ciąg  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  liczb z przedziału  $(0, 1)$ , zbieżny do  $\lambda_0$ . Określmy ciąg  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$  przyjmując

$$\omega_1 := \lambda_1 \quad \text{ i } \quad \omega_{i+1} := \frac{1 - \lambda_i - \lambda_{i+1}}{1 - 2\lambda_i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Wtedy  $\omega \in (0, 1)^\mathbb{N}$  i zachodzą równości (30), a wobec wzorów (29) mamy

$$\min \{M_i(x, y, \omega), N_i(x, y, \omega)\} = \begin{cases} (1 - \lambda_i)x + \lambda_i y, & \text{gdy } x \leq y, \\ \lambda_i x + (1 - \lambda_i)y, & \text{gdy } x > y, \end{cases}$$



oraz

$$\max \{M_i(x, y, \omega), N_i(x, y, \omega)\} = \begin{cases} \lambda_i x + (1 - \lambda_i) y, & \text{gdy } x \leq y, \\ (1 - \lambda_i) x + \lambda_i y, & \text{gdy } x > y, \end{cases}$$

dla wszystkich  $x, y \in I$  i  $i \in \mathbb{N}$ . Zatem

$$K^-(x, y, \omega) = \begin{cases} (1 - \lambda_0) x + \lambda_0 y, & \text{gdy } x \leq y, \\ \lambda_0 x + (1 - \lambda_0) y, & \text{gdy } x > y, \end{cases}$$

oraz

$$K^+(x, y, \omega) = \begin{cases} \lambda_0 x + (1 - \lambda_0) y, & \text{gdy } x \leq y, \\ (1 - \lambda_0) x + \lambda_0 y, & \text{gdy } x \geq y, \end{cases}$$

dla wszystkich  $x, y \in I$ . Tym samym nierówność  $K^- \leq K^+$  nie staje się tu równością.

Sytuacja taka, jak powyżej, nie może zajść, gdy zbiór parametrów  $\Omega$  jest zwartą przestrzenią topologiczną. Mówi o tym poniższe twierdzenie, które uważam za najwartościowszy rezultat pracy [H5].

**Twierdzenie 20.** ([H5, Theorem 3.5]) *Niech  $\Omega$  będzie zwartą przestrzenią topologiczną, a  $M, N : I^2 \times \Omega \rightarrow I$  średnimi z parametrem. Załóżmy, że funkcje  $M$  i  $N$  są ciągłe<sup>1</sup> oraz spełniony jest następujący warunek:*

$$\begin{aligned} &\text{jeśli } \min \{M(x, y, \omega), N(x, y, \omega)\} = \min \{x, y\} \\ &\text{oraz } \max \{M(x, y, \omega), N(x, y, \omega)\} = \max \{x, y\}, \text{ to } x = y \end{aligned} \quad (31)$$

dla wszystkich  $x, y \in I$  i  $\omega \in \Omega$ . Wtedy

(i) *istnieje taka średnia  $K : I^2 \times \Omega^\infty \rightarrow I$ , że  $\lim_{i \rightarrow \infty} (M, N)^i = (K, K)$  niemal jednostajnie;*

(ii) *funkcja  $K$  jest ciągła;*

(iii)  *$K$  jest jedyną  $(M, N)$ -niezmienniczą średnią z parametrem.*

Rezygnujemy tu z podawania dowodu (a nawet jego szkicu) ponieważ jest dość „techniczny”. Dowód kluczowej tezy (i) polega na wykazaniu równości  $K^- = K^+$  i biegnie *a contrario*. Wykorzystując założenie zwartości zbioru  $\Omega$ , po pewnych raczej drobiazgowych rozumowaniach, dochodzimy do sprzeczności z warunkiem (31). Nawiasem mówiąc warunek ten, wprowadzony przez Matkowskiego w pracy [97], jest ogólniejszy od bardziej czytelnego założenia ścisłości średnich  $M$  i  $N$ , czyli założenia

$$\min\{x, y\} < M(x, y, \omega) < \max\{x, y\}$$

oraz

$$\min\{x, y\} < N(x, y, \omega) < \max\{x, y\}$$

dla wszystkich różnych  $x, y \in I$  i  $\omega \in \Omega$ .

Paragraf ten zakończymy pewnymi uwagami.

<sup>1</sup>Tu zakładamy ciągłość funkcji  $M$  i  $N$  ze względu na zmienną  $(x, y, \omega)$ , a więc na ogół coś więcej niż ciągłość średnich  $M$  i  $N$ , rozumianej jako ciągłość funkcji  $M(\cdot, \omega)$  i  $N(\cdot, \omega)$  dla każdego  $\omega \in \Omega$ .

**Uwaga 21.** ([H5, Remark 4.1]) Przykład 19 pokazuje, że założenie zwartości zbioru  $\Omega$  jest istotne dla prawdziwości Twierdzenia 20.

**Uwaga 22.** ([H5, Corollary 4.2]) W przypadku, gdy zbiór  $\Omega$  jest skończony, a  $M, N : I^2 \times \Omega \rightarrow I$  są ciągłymi średnimi z parametrem, spełniającymi warunek (31), to zachodzi teza Twierdzenia 20. Tym samym wynik ten uogólnia rezultat pracy Matkowskiego [97].

**Uwaga 23.** ([H5, Remark 4.4]) Ciągłość średnich z parametrem, występujących w Twierdzeniu 20, w szczególności pociąga ich ciągłą zależność od parametru  $\omega$ . Jak wiemy, w przypadku skończonego zbioru  $\Omega$ , wystarczy zakładać ciągłość funkcji  $M(\cdot, \omega)$  i  $N(\cdot, \omega)$  dla każdego  $\omega \in \Omega$ . Interesujące jest jednak to, że Twierdzenie 20 gwarantuje wtedy także ciągłą zależność średniej  $K$  od parametru, choć zbiór  $\Omega^\infty$  jest nieprzeliczalny, jeśli tylko  $\#\Omega \geq 2$ .

**Problem 24.** ([H5, Problem 4.5]) Niech  $\Omega$  będzie przestrzenią topologiczną i niech  $M : I^2 \times \Omega \rightarrow I$  będzie ciągłą średnią z parametrem, ciągłą także ze względu na parametr. Czy funkcja  $M$  jest ciągła?

#### 4.4 ŁĄCZENIE ŚREDNICH

W tej części wprowadzamy i badamy pojęcie łączenia średnich. Działanie to, dwóm średnim na przedziałach przyległych, przyporządkowuje pewną szczególną średnią (a właściwie całą rodzinę średnich) na sumie mnogościowej tych przedziałów. Wyniki tu przedstawione pochodzą z prac [H6] i [H7]. Pojęcie łączenia średnich po raz pierwszy pojawiło się w pracy [35] Daróczyego, J. Jarczyk i W. Jarczyka. Wkrótce potem okazało się jednak, że dalsze badania wymagają pewnej modyfikacji tego pojęcia. Definicje, które pojawiają się poniżej są właśnie z tej zmodyfikowanej wersji, przedstawionej w pracach [H6] i [H7].

##### 4.4.1 POSTAWIENIE I ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Ustalmy przedział  $I \subset \mathbb{R}$  o różnych końcach, jego punkt wewnętrzny  $\xi$  i przyjmijmy

$$I_\xi := \{x \in I : x \leq \xi\}, \quad {}_\xi I := \{x \in I : \xi \leq x\}$$

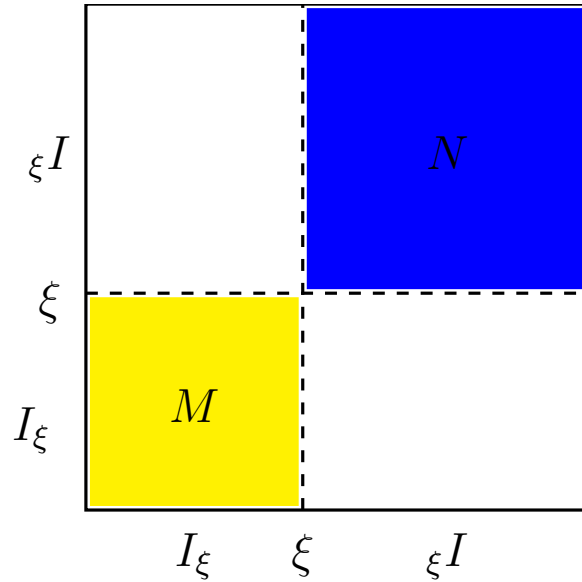
oraz

$$I_\xi^\circ := \{x \in I : x < \xi\}, \quad {}_\xi I^\circ := \{x \in I : \xi < x\}.$$

Mając dane średnie  $M$  na przedziale  $I_\xi$  i  $N$  na przedziale  ${}_\xi I$ , szukamy takiej średniej  $M \oplus N$  na przedziale  $I$ , że

$$M \oplus N|_{I_\xi \times I_\xi} = M \quad \text{ i } \quad M \oplus N|_{{}_\xi I \times {}_\xi I} = N.$$

Każdą taką średnią  $M \oplus N$  nazywamy *połączeniem średnich*  $M$  i  $N$ .



Jeśli  $K$  jest średnią na przedziale  $I$ , to wzór

$$M \oplus N(x, y) = \begin{cases} M(x, y), & \text{gdy } (x, y) \in I_\xi \times I_\xi, \\ K(x, y), & \text{gdy } (x, y) \in I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ \cup {}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ, \\ N(x, y), & \text{gdy } (x, y) \in {}_\xi I \times {}_\xi I, \end{cases}$$

definiuje połączenie średnich  $M$  i  $N$ . Zauważmy jednak, że jego wartości na prostokątach  $I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ$  i  ${}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ$  na ogół nie mają żadnego związku z wartościami średnich  $M$  i  $N$ . W dalszym ciągu interesować się będziemy tylko takimi połączeniami  $M \oplus N$ , które w tych prostokątach w jakiś sposób „pamiętają” wartości średnich  $M$  i  $N$  odpowiednio na odcinkach  $I_\xi \times \{\xi\}$ ,  $\{\xi\} \times I_\xi$  i  ${}_\xi I \times \{\xi\}$ ,  $\{\xi\} \times {}_\xi I$ . Wartości te definiują funkcje  $h_1, h_2 : I \rightarrow I$  określone wzorami

$$h_1(x) = \begin{cases} M(x, \xi), & \text{gdy } x \in I_\xi, \\ N(x, \xi), & \text{gdy } x \in {}_\xi I, \end{cases}$$

oraz

$$h_2(y) = \begin{cases} M(\xi, y), & \text{gdy } y \in I_\xi, \\ N(\xi, y), & \text{gdy } y \in {}_\xi I. \end{cases}$$

Nazywamy je *funkcjami brzegowymi dla pary*  $(M, N)$ . W dalszych rozważaniach odgrywają one kluczową rolę.

W dalszym ciągu, mając dane funkcje  $f : I_\xi \rightarrow I_\xi$  i  $g : {}_\xi I \times {}_\xi I$  spełniające równość  $f(\xi) = g(\xi)$ , symbolem  $f \cup g$  będziemy oznaczać przekształcenie przedziału  $I$  określone wzorem

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \in I_\xi, \\ g(x), & \text{gdy } x \in {}_\xi I. \end{cases}$$

Ponadto definiujemy *produkt*  $h_1 \times h_2 : I^2 \rightarrow I^2$ , przyjmując

$$(h_1 \times h_2)(x, y) := (h_1(x), h_2(y)).$$

Funkcję wielowartościową

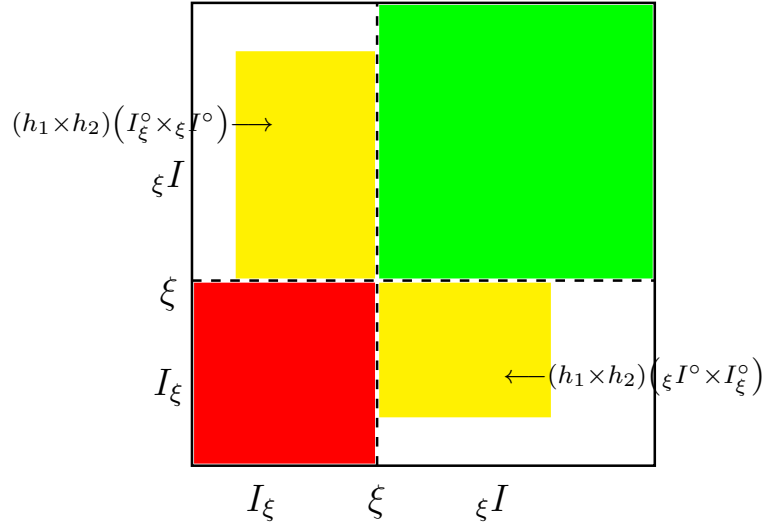
$$\mathbf{K} : (h_1 \times h_2) (I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ \cup {}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ) \rightarrow 2^I$$

nazywamy *łącznikiem dla pary*  $(M, N)$ , gdy

$$(h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{{}_\xi I})^{-1} (\mathbf{K}((h_1 \times h_2)(x, y))) \cap [x, y] \neq \emptyset, \quad (x, y) \in I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ,$$

oraz

$$(h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{{}_\xi I})^{-1} (\mathbf{K}((h_1 \times h_2)(x, y))) \cap [y, x] \neq \emptyset, \quad (x, y) \in {}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ.$$



Zauważmy, że wszystkie wartości dowolnego łącznika są zbiorami niepustymi. Każda para  $(M, N)$  ma wiele łączników. Niektóre z nich są trywialne, na przykład te, których wszystkie wartości zawierają punkt  $\xi$ . Przykłady mniej trywialnych, choć jednowartościowych łączników, można znaleźć w pracy [H6] (por. także pracę [35]). Przedstawimy pokrótce pierwszy z nich.

**Przykład 25.** ([H6, Example 1]) Zakładając, że funkcje brzegowe  $h_1, h_2 : I \rightarrow I$  są ciągłe i ściśle rosnące, nie jest trudno sprawdzić, że wzór

$$\mathbf{K}(x, y) = \{K(x, y)\}, \quad (32)$$

gdzie

$$K(x, y) = h_1(x) + h_2(y) - \xi, \quad (x, y) \in I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ \cup {}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ,$$

definiuje jednowartościowy łącznik dla pary  $(M, N)$ .

Drugi z przykładów dotyczy łączenia ważonych średnich quasi-arytmetycznych. Ustalmy funkcje  $\varphi \in \mathcal{CM}(I_\xi)$  i  $\psi \in \mathcal{CM}({}_\xi I)$  zerujące się w punkcie  $\xi$  oraz liczby  $p, q \in (0, 1)$ . Niech  $M := A_p^\varphi$  i  $N := A_q^\psi$ . Wtedy

$$h_1(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(p\varphi(x)), & \text{gdy } x \in I_\xi, \\ \psi^{-1}(q\psi(x)), & \text{gdy } x \in {}_\xi I, \end{cases}$$

oraz

$$h_2(y) = \begin{cases} \varphi^{-1}((1-p)\varphi(y)), & \text{gdy } y \in I_\xi, \\ \psi^{-1}((1-q)\psi(y)), & \text{gdy } y \in {}_\xi I. \end{cases}$$

Dla każdej pary  $(x, y) \in (h_1 \times h_2)(I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ)$  przyjmijmy

$$K(x, y) = \begin{cases} \varphi^{-1}(p(\varphi(x) + \psi(y))), & \text{gdy } \varphi(x) + \psi(y) < 0, \\ \psi^{-1}(q(\varphi(x) + \psi(y))), & \text{gdy } \varphi(x) + \psi(y) \geq 0. \end{cases}$$

Podobnie, dla wszystkich  $(x, y) \in (h_1 \times h_2)({}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ)$  niech

$$K(x, y) = \begin{cases} \varphi^{-1}((1-p)(\psi(x) + \varphi(y))), & \text{gdy } \psi(x) + \varphi(y) < 0, \\ \psi^{-1}(q(\psi(x) + \varphi(y))), & \text{gdy } \psi(x) + \varphi(y) \geq 0. \end{cases}$$

Wielowartościowa funkcja  $\mathbf{K}$ , określona równością (32), jest wtedy łącznikiem dla pary  $(M, N) = (A_p^\varphi, A_q^\psi)$ .

W Przykładzie 34 w paragrafie 4.4.3 opisana jest konstrukcja tak zwanego  $p$ -łącznika, który, pod założeniem, że funkcje brzegowe  $h_1$  i  $h_2$  są ciągłe i rosnące (niekoniecznie ściśle), a  $p = 1$ , jest łącznikiem o wartościach będących nietrywialnymi przedziałami.

Poniższe twierdzenie opisuje dość ogólną procedurę łączenia średnich.

**Twierdzenie 26.** ([H6, Theorem 1]) *Jeśli  $\mathbf{K}$  jest łącznikiem dla pary  $(M, N)$ , to wszystkie wartości funkcji wielowartościowej  $M \oplus_{\mathbf{K}} N$  o wzorze*

$$\begin{cases} \{M(x, y)\}, & \text{gdy } (x, y) \in I_\xi \times I_\xi, \\ (h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{{}_\xi I})^{-1}(\mathbf{K}(h_1 \times h_2)(x, y)) \cap [x, y], & \text{gdy } (x, y) \in I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ, \\ (h_2|_{{}_\xi I} \cup h_1|_{I_\xi})^{-1}(\mathbf{K}(h_1 \times h_2)(x, y)) \cap [y, x], & \text{gdy } (x, y) \in {}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ, \\ \{N(x, y)\}, & \text{gdy } (x, y) \in {}_\xi I \times {}_\xi I, \end{cases}$$

są niepuste, a każda jej selekcja jest średnią na przedziale  $I$ , będącą przedłużeniem średnich  $M$  i  $N$ .

Każdą średnią  $M \oplus_{\mathbf{K}} N$ , będącą selekcją funkcji wielowartościowej  $\mathbf{K}$  określonej w Twierdzeniu 26, nazywamy *brzegowym  $\mathbf{K}$ -połączeniem średnich  $M$  i  $N$* .

#### 4.4.2 PROBLEM ODWROTNY

Poniżej formułujemy twierdzenie zawierające pozytywną odpowiedź na następujące pytanie:

*Czy dowolna średnia  $L$  na przedziale  $I$  jest brzegowym  $\mathbf{K}$ -połączeniem średnich  $L|_{I_\xi \times I_\xi}$  i  $L|_{\xi I \times \xi I}$  otrzymanym przy użyciu łącznika  $\mathbf{K}$  z jak najmniejszymi wartościami?*

Definiując średnie  $M := L|_{I_\xi \times I_\xi}$  i  $N := L|_{\xi I \times \xi I}$ , określmy funkcje brzegowe  $h_1 : I \rightarrow I$  i  $h_2 : I \rightarrow I$  równościami

$$h_1(x) = \begin{cases} M(x, \xi), & \text{gdy } x \in I_\xi, \\ N(x, \xi), & \text{gdy } x \in \xi I, \end{cases}$$

oraz

$$h_2(y) = \begin{cases} M(\xi, y), & \text{gdy } y \in I_\xi, \\ N(\xi, y), & \text{gdy } y \in \xi I. \end{cases}$$

Wzór

$$(u, v) \sim (x, y) : \Longleftrightarrow h_1(u) = h_1(x) \text{ i } h_2(v) = h_2(y)$$

definiuje relację równoważności  $\sim$  w zbiorze  $I_\xi^\circ \times \xi I^\circ \cup \xi I^\circ \times I_\xi^\circ$ . Oznaczmy przez  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  klasę równoważności punktu  $(x_0, y_0) \in I_\xi^\circ \times \xi I^\circ \cup \xi I^\circ \times I_\xi^\circ$ .

**Twierdzenie 27.** ([H6, Theorem 2]) *Funkcja wielowartościowa  $\mathbf{K}_0 : (h_1 \times h_2)(I_\xi^\circ \times \xi I^\circ \cup \xi I^\circ \times I_\xi^\circ) \rightarrow 2^I \setminus \{\emptyset\}$ , określona równościami*

$$\mathbf{K}_0(h_1(x), h_2(y)) = (h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{\xi I})(L((\mathbf{x}, \mathbf{y}))), \quad (x, y) \in I_\xi^\circ \times \xi I^\circ,$$

oraz

$$\mathbf{K}_0(h_1(x), h_2(y)) = (h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{\xi I})(L((\mathbf{x}, \mathbf{y}))), \quad (x, y) \in \xi I^\circ \times I_\xi^\circ,$$

ma następujące własności:

(i)  $\mathbf{K}_0$  jest łącznikiem dla pary  $(M, N)$ , gdzie  $M := L|_{I_\xi \times I_\xi}$ ,  $N := L|_{\xi I \times \xi I}$ , i spełnia warunek

$$L((\mathbf{x}, \mathbf{y})) \subset (M \oplus_{\mathbf{K}_0} N)(x, y), \quad (x, y) \in I_\xi^\circ \times \xi I^\circ \cup \xi I^\circ \times I_\xi^\circ,$$

oraz

(ii) jeśli  $\mathbf{K}$  jest łącznikiem dla pary  $(M, N)$  i spełnia warunek

$$L((\mathbf{x}, \mathbf{y})) \subset (M \oplus_{\mathbf{K}} N)(x, y), \quad (x, y) \in I_\xi^\circ \times \xi I^\circ \cup \xi I^\circ \times I_\xi^\circ, \quad (33)$$

to  $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}$ .

W szczególności: średnia  $L$  jest  $\mathbf{K}_0$ -połączeniem średnich  $M$  i  $N$ , a  $\mathbf{K}_0$  jest najmniejszym (w sensie inkluzji) łącznikiem dla pary  $(M, N)$ , spełniającym warunek (33).

Funkcję wielowartościową  $K_0$ , wprowadzoną w Twierdzeniu 27, nazywamy  $\xi$ -rekurencyjnym łącznikiem dla średniej  $L$ .

Ostatnie twierdzenie tej części pozwoli nam odpowiedzieć na następujące interesujące pytanie:

*Pod jakimi założeniami o średniej jej  $\xi$ -rekonstrukcyjny łącznik jest funkcją jedno-wartościową?*

Przydatne tu będzie następujące pojęcie. Mówimy, że średnia  $L$  zachowuje  $\xi$ -brzegi, gdy z równości  $L(u_1, \xi) = L(u_2, \xi)$  i  $L(\xi, v_1) = L(\xi, v_2)$  wynika, że

$$\begin{aligned} L(\min\{L(u_1, v_1), \xi\}, \max\{L(u_1, v_1), \xi\}) &= \\ &= L(\min\{L(u_2, v_2), \xi\}, \max\{L(u_2, v_2), \xi\}) \end{aligned}$$

o ile  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ$  oraz

$$\begin{aligned} L(\max\{L(u_1, v_1), \xi\}, \min\{L(u_1, v_1), \xi\}) &= \\ &= L(\max\{L(u_2, v_2), \xi\}, \min\{L(u_2, v_2), \xi\}) \end{aligned}$$

w przypadku, gdy  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in {}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ$ .

**Uwaga 28.** ([H6, Remark 1]) W przypadku, gdy średnia  $L$  jest symetryczna:

$$L(x, y) = L(y, x), \quad (x, y) \in I^2,$$

warunek definiujący zachowywanie  $\xi$ -brzegów przyjmuje następującą prostszą postać: z równości  $L(u_1, \xi) = L(u_2, \xi)$  i  $L(\xi, v_1) = L(\xi, v_2)$  wynika, że

$$L(L(u_1, v_1), \xi) = L(L(u_2, v_2), \xi)$$

dla wszystkich  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in I_\xi^\circ \times {}_\xi I^\circ$  i  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in {}_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ$ .

Nie wszystkie średnie zachowują brzegi. Średnia kontrharmoniczna  $L : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$ , o wzorze

$$L(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y},$$

nie zachowuje 1-brzegów (zob. [H6, Example 4]).

**Uwaga 29.** ([H6, Remark 2]) Jeśli funkcje brzegowe  $L(\cdot, \xi)$  i  $L(\xi, \cdot)$  są różnowartościowe, to średnia  $L$  zachowuje  $\xi$ -brzegi.

Różnowartościowość funkcji brzegowych nie jest warunkiem koniecznym zachowywania brzegów, co pokazuje przykład średniej  $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ , która zachowuje 0-brzegi (zob. [H6, Example 3]).

**Twierdzenie 30.** ([H6, Theorem 3])  $\xi$ -rekonstrukcyjny łącznik dla średniej  $L$  jest funkcją jednowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy średnia  $L$  zachowuje  $\xi$ -brzegi.

Bezpośrednio z Twierdzenie 30 i Uwagi 29 wynika, że jeśli funkcje brzegowe  $L(\cdot, \xi)$  i  $L(\xi, \cdot)$  są różnowartościowe, to  $\xi$ -rekonstrukcyjny łącznik średniej  $L$  jest funkcją jednowartościową.

#### 4.4.3 ITEROWANE ŁĄCZENIE ŚREDNICH

Łączenie średnich omawiane powyżej ma charakter globalny. Procedura łączenia odbywa się tam przy pomocy łącznika określonego na zbiorze  $(h_1 \times h_2)(I_\xi^\circ \times I_\xi^\circ \cup I_\xi^\circ \times I_\xi^\circ)$ . W tej części rozszerzymy ją na sytuację, w której łączenie odbywa się na zbiorach na ogół mniejszych. Zbiory te stanowią nieskończony ciąg zstępujący, a ich część wspólna, pod pewnymi założeniami, składa się tylko z punktu  $(\xi, \xi)$ . Z tą lokalną procedurą związany jest następujący prosty układ dynamiczny, opisany przez funkcje brzegowe  $h_1, h_2 : I \rightarrow I$  dla pary  $(M, N)$ .

Zauważmy, że funkcja  $h_1 \times h_2$  przekształca kwadrat  $I^2$  w siebie, a więc możemy ją iterować. Ponadto  $(h_1, h_2)(\xi, \xi) = (\xi, \xi)$  oraz

$$0 \leq \frac{h_1(x) - \xi}{x - \xi} \leq 1, \quad x \in I \setminus \{\xi\}, \quad \text{ i } \quad 0 \leq \frac{h_2(y) - \xi}{y - \xi} \leq 1, \quad y \in I \setminus \{\xi\}.$$

Pod założeniem zwartości przedziału  $I$  i ciągłości funkcji  $h_1, h_2$  możemy powiedzieć znacznie więcej o ciągu iteracyjnym  $((h_1 \times h_2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Twierdzenie 31.** ([H7, Theorem 3.1]) *Założmy, że przedział  $I$  jest zwarty, a funkcje  $h_1, h_2$  są ciągłe. Wtedy*

(i)  $(h_1^n(I))_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(h_2^n(I))_{n \in \mathbb{N}}$  są zstępującymi ciągami zwartych przedziałów zawierających punkt  $\xi$ ;

(ii)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} h_1^n(I) = [x_1^-, x_1^+]$  i  $\bigcap_{n=1}^{\infty} h_2^n(I) = [x_2^-, x_2^+]$ , gdzie

$$x_i^- = \inf \{x \in I : h_i(x) = x\} \quad \text{ i } \quad x_i^+ = \sup \{x \in I : h_i(x) = x\}, \quad i = 1, 2;$$

(iii)  $[x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+]$  jest atraktorem układu  $((h_1 \times h_2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ : dla każdego zbioru otwartego  $U \subset \mathbb{R}^2$  zawierającego prostokąt  $[x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+]$  istnieje taka liczba  $n_0 \in \mathbb{N}$ , że

$$(h_1 \times h_2)^n(I \times I) \subset U$$

dla każdego  $n \geq n_0$ .

Zwróćmy uwagę na to, że atraktor  $[x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+]$  może być istotnie duży, a nawet pokrywać się z kwadratem  $I^2$ . Tak jest, na przykład, gdy średnie  $M$  i  $N$  są określone odpowiednio wzorami

$$M(x, y) = \min \{x, y\} \quad \text{ i } \quad N(x, y) = \max \{x, y\}.$$

Wtedy  $h_1(x) = h_2(x) = x$  dla każdego  $x \in I$ , a więc  $\bigcap_{n=1}^{\infty} h_1^n(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} h_2^n(I) = I$ . Taka sytuacja nie może zajść, gdy  $\xi$  jest jedynym punktem stałym funkcji  $h_1$  i  $h_2$ .



**Twierdzenie 32.** ([H7, Theorem 3.2]) *Założmy, że przedział  $I$  jest zwarty, funkcje  $h_1, h_2$  są ciągłe, a  $\xi$  jest ich jedynym punktem stałym. Wtedy  $\bigcap_{n=1}^{\infty} h_1^n(I) = \{\xi\}$  i  $\bigcap_{n=1}^{\infty} h_2^n(I) = \{\xi\}$ , a więc*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_1 \times h_2)^n(x, y) = (\xi, \xi) \quad (34)$$

*jednostajnie w zbiorze  $I^2$ .*

**Uwaga 33.** ([H7, Remark 3.4]) *Jeśli średnie  $M$  i  $N$  są ściśle, czyli*

$$\min\{x, y\} < M(x, y) < \max\{x, y\}$$

*oraz*

$$\min\{x, y\} < N(x, y) < \max\{x, y\}$$

*dla wszystkich różnych  $x, y \in I$ , to  $\xi$  jest jedynym punktem stałym funkcji  $h_1$  i  $h_2$ .*

Uwaga 33 i Twierdzenie 32 gwarantują, że jeśli  $M$  i  $N$  są ciągłymi ścisłymi średnimi na przedziale zwartym, to równość (34) zachodzi jednostajnie w kwadracie  $I^2$ .

Dowody Twierdzeń 31 i 32 oraz Uwagi 33 są standardowe.

Ustalmy liczbę  $p \in \mathbb{N}$ . Funkcję wielowartościową  $\mathbf{K}$ , określoną na podzbiorze kwadratu  $I^2$  zawierającym zbiór  $(h_1 \times h_2)^p(I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ \cup_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ)$  i przyjmującą wartości w rodzinie  $2^I$ , nazywamy  *$p$ -łącznikiem dla pary  $(M, N)$* , gdy

$$((h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{I_\xi})^p)^{-1}(\mathbf{K}((h_1 \times h_2)^p(x, y))) \cap [x, y] \neq \emptyset, \quad (x, y) \in I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ,$$

oraz

$$((h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{I_\xi})^p)^{-1}(\mathbf{K}((h_1 \times h_2)^p(x, y))) \cap [y, x] \neq \emptyset, \quad (x, y) \in_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ.$$

Każdy  $p$ -łącznik, gdzie  $p \in \mathbb{N}$ , nazywamy *lokalnym łącznikiem*. Zauważmy, że pojęcie 1-łącznika pokrywa się w istocie z pojęciem łącznika wprowadzonym w paragrafie 4.4.1.

**Przykład 34.** ([H7, Example 4.1]) Można sprawdzić, że dla każdej liczby  $p \in \mathbb{N}$  wzory

$$\mathbf{K}(u, v) = h_1^p \left( \left[ \inf (h_1^p)^{-1}(\{u\}), \xi \right] \right) \cup h_2^p \left( \left[ \xi, \sup (h_2^p)^{-1}(\{v\}) \right] \right),$$

gdy  $(u, v) \in (h_1 \times h_2)^p(I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ)$ , oraz

$$\mathbf{K}(u, v) = h_2^p \left( \left[ \inf (h_2^p)^{-1}(\{v\}), \xi \right] \right) \cup h_1^p \left( \left[ \xi, \sup (h_1^p)^{-1}(\{u\}) \right] \right),$$

jeśli  $(u, v) \in (h_1 \times h_2)^p(I_\xi^\circ \times I_\xi^\circ)$ , definiują  $p$ -łącznik dla pary  $(M, N)$ . Można też zauważyć, że  $u, v \in \mathbf{K}(u, v)$  dla wszystkich  $(u, v) \in (h_1 \times h_2)^p(I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ \cup_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ)$ .

Poniższy rezultat zawiera prosty warunek dostateczny na to, żeby funkcja wielowartościowa była lokalnym łącznikiem dla danej pary średnich.

**Twierdzenie 35.** ([H7, Theorem 4.1]) *Niech  $p \in \mathbb{N}$ . Jeśli funkcje  $h_1, h_2$  są ciągłe, to każda funkcja wielowartościowa  $\mathbf{K} : (h_1 \times h_2)^p (I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ \cup_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ) \rightarrow 2^I$ , spełniająca warunek*

$$\mathbf{K}(u, v) \cap [\min\{u, v\}, \max\{u, v\}] \neq \emptyset$$

*dla wszystkich  $(u, v) \in (h_1 \times h_2)^p (I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ \cup_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ)$ , jest  $p$ -łącznikiem dla pary  $(M, N)$ .*

Odpowiednik Twierdzenia 26 dla lokalnych łączników ma następującą postać.

**Twierdzenie 36.** ([H7, Theorem 4.2]) *Niech  $p \in \mathbb{N}$ . Jeśli  $\mathbf{K}$  jest  $p$ -łącznikiem dla pary  $(M, N)$ , to wszystkie wartości funkcji wielowartościowej  $(M \oplus_{\mathbf{K}} N)_p$  o wzorze*

$$\begin{cases} \{M(x, y)\}, & \text{gdy } (x, y) \in I_\xi \times I_\xi, \\ ((h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{\xi I})^p)^{-1} (\mathbf{K}((h_1 \times h_2)^p(x, y))) \cap [x, y], & \text{gdy } (x, y) \in I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ, \\ ((h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{\xi I})^p)^{-1} (\mathbf{K}((h_1 \times h_2)^p(x, y))) \cap [y, x], & \text{gdy } (x, y) \in_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ, \\ \{N(x, y)\}, & \text{gdy } (x, y) \in_\xi I \times_\xi I, \end{cases}$$

*są niepuste, a każda jej selekcja jest średnią na przedziale  $I$ , będącą przedłużeniem średnich  $M$  i  $N$ .*

Każdą średnią  $(M \oplus_{\mathbf{K}} N)_p$ , będącą selekcją funkcji wielowartościowej  $\mathbf{K}$  określonej w Twierdzeniu 36, nazywamy *iterowanym brzegowym  $\mathbf{K}$ -połączeniem średnich  $M$  i  $N$  rzędu  $p$* .

Kolejne twierdzenie opisuje ważny związek między  $\mathbf{K}$ -połączeniami rzędów  $i$  i  $i+1$ .

**Twierdzenie 37.** ([H7, Theorem 4.3]) *Niech  $p \in \mathbb{N}$ . Załóżmy, że funkcje  $h_1$  i  $h_2$  przyjmują wartość  $\xi$  tylko w punkcie  $\xi$ . Jeśli  $\mathbf{K}$  jest  $p$ -łącznikiem dla pary  $(M, N)$ , to*

$$(h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{\xi I})^{-1} ((M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i((h_1 \times h_2)(x, y))) \subset (M \oplus_{\mathbf{K}} N)_{i+1}(x, y)$$

*dla wszystkich  $(x, y) \in I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ$  i  $i \geq p$  oraz*

$$(h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{\xi I})^{-1} ((M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i((h_1 \times h_2)(x, y))) \subset (M \oplus_{\mathbf{K}} N)_{i+1}(x, y)$$

*dla wszystkich  $(x, y) \in_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ$  i  $i \geq p$ .*

Założenie, że funkcje brzegowe przyjmują wartość  $\xi$  tylko w punkcie  $\xi$  jest spełnione, gdy średnie  $M$  i  $N$  są ściśle (zob. [H7, Remark 4.4]).

Stosując Twierdzenie 37 można zdefiniować taki ciąg  $((M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i)_{i \geq p}$  średnich na przedziale  $I$ , że dla każdego  $i \geq p$  średnia  $(M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i$  jest brzegowym  $\mathbf{K}$ -połączeniem rzędu  $i$  średnich  $M$  i  $N$ ,

$$(h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{\xi I}) ((M \oplus_{\mathbf{K}} N)_{i+1}(x, y)) = (M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i((h_1 \times h_2)(x, y)) \quad (35)$$

dla wszystkich  $(x, y) \in I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ$  oraz

$$(h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{\xi I}) ((M \oplus_{\mathbf{K}} N)_{i+1}(x, y)) = (M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i((h_1 \times h_2)(x, y)) \quad (36)$$

dla wszystkich  $(x, y) \in_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ$ . Ponadto, przyjmując  $L = (M \oplus_{\mathbf{K}} N)_p$ , stwierdzamy, że

$$(M \oplus_{\mathbf{K}} N)_{p+i}(x, y) \in \begin{cases} \left( (h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{\xi I})^i \right)^{-1} \left( L \left( (h_1 \times h_2)^i(x, y) \right) \right), & \text{gdy } (x, y) \in I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ, \\ \left( (h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{\xi I})^i \right)^{-1} \left( L \left( (h_1 \times h_2)^i(x, y) \right) \right), & \text{gdy } (x, y) \in_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ, \end{cases}$$

dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ . Wzory

$$\phi_{\mathbf{K}}^-(x, y) = \liminf_{i \rightarrow \infty} (M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i(x, y)$$

oraz

$$\phi_{\mathbf{K}}^+(x, y) = \limsup_{i \rightarrow \infty} (M \oplus_{\mathbf{K}} N)_i(x, y)$$

definiują średnie na  $I$  przedłużające  $M$  i  $N$ . Ich podstawowe własności opisuje ostatni z przedstawionych w tej części wyników.

**Twierdzenie 38.** ([H7, Theorem 5.1]) *Założmy, że funkcje  $h_1$  i  $h_2$  są ciągłe i przyjmują wartość  $\xi$  tylko w punkcie  $\xi$ . Funkcje  $\phi_{\mathbf{K}}^-|_{I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ}$  i  $\phi_{\mathbf{K}}^+|_{I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ}$  spełniają równanie funkcyjne*

$$\phi(h_1(x), h_2(y)) = h_{12}(\phi(x, y)), \quad (37)$$

gdzie  $h_{12} := h_1|_{I_\xi} \cup h_2|_{\xi I}$ , a funkcje  $\phi_{\mathbf{K}}^-|_{\xi I^\circ \times I_\xi^\circ}$  i  $\phi_{\mathbf{K}}^+|_{\xi I^\circ \times I_\xi^\circ}$  są rozwiązaniami równania

$$\phi(h_1(x), h_2(y)) = h_{21}(\phi(x, y)), \quad (38)$$

gdzie  $h_{21} := h_2|_{I_\xi} \cup h_1|_{\xi I}$ .

Zauważmy, że równania (37) i (38) wyrażają pólspżężoność funkcji  $h_1 \times h_2$  z funkcją  $h_{12}$  w prostokącie  $I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ$  i z funkcją  $h_{21}$  w prostokącie  $\xi I^\circ \times I_\xi^\circ$ . Wydaje się interesujące rozwiązać równanie (37) w klasie funkcji  $\phi : I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ \rightarrow I$  spełniających warunek

$$x \leq \phi(x, y) \leq y, \quad (x, y) \in I_\xi^\circ \times_\xi I^\circ,$$

oraz równanie (38) w klasie funkcji  $\phi : \xi I^\circ \times I_\xi^\circ \rightarrow I$  spełniających nierówności

$$y \leq \phi(x, y) \leq x, \quad (x, y) \in_\xi I^\circ \times I_\xi^\circ.$$

## 5 OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

### A) WYKAZ PRAC NIEWCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

- [P1] Justyna Błasińska-Lesk<sup>2</sup>, Dorota Głazowska, Janusz Matkowski, *An invariance of the geometric mean with respect to Stolarsky mean-type mappings*, Result. Math. 43 (2003), 42-55.
- [P2] Justyna Jarczyk and Janusz Matkowski, *Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Polon. Math. 88 (2006), 39-51.
- [P3] Justyna Jarczyk and Witold Jarczyk, *On a problem of N. Brillouët-Belluot*, Aequationes Math. 72 (2006), 198-200.
- [P4] Justyna Jarczyk, *Invariance of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators*, Publ. Math. Debrecen 71 (2007), 279-294.
- [P5] Justyna Jarczyk, *When Lagrangean and quasi-arithmetic means coincide*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 8 (2007), Art. 71.
- [P6] Justyna Jarczyk, *Invariance of quasi-arithmetic means with function weights*, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009), 134-140;
- [P7] Lin Li, Justyna Jarczyk, Witold Jarczyk and Weinian Zhang, *Iterative roots of mappings with a unique set-value point*, Publ. Math. Debrecen 75 (2009), 203-220;
- [P8] Justyna Jarczyk, *Invariance in a class of Bajraktarević means*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 2608-2619;
- [P9] Judita Dascăl, Justyna Jarczyk, *On conjugate means which are quasi-arithmetic*, Appl. Math. Comput. 219 2(2012), 475-481.
- [P10] Pál Burai and Justyna Jarczyk, *Conditional homogeneity and translitivity of Makó-Páles means*, Annales Univ. Sci. Budapest. 40 (2013), 159-172.
- [P11] Justyna Jarczyk, Janusz Matkowski, *Uniform convexity of paranormed generalizations of  $L^p$  spaces*, J. Convex Anal. 22 (2015), 117-144.
- [P12] Zoltan Daróczy, Justyna Jarczyk and Witold Jarczyk, *From a theorem of R. Ger and T. Kochanek to marginal joints of means*, Aequationes Math. 90 (2016), 211-233.
- [P13] Justyna Jarczyk and Witold Jarczyk, *Invariance of means*, Aequationes Math. 92 (2018) 801-872.

---

<sup>2</sup>moje poprzednie nazwisko

- [P14] Pál Burai and Justyna Jarczyk, *On symmetry of Makó-Páles means*, Annales Univ. Sci. Budapest., 47 (2018) 173-177.
- [P15] Jacek Chudziak, Dorota Głazowska, Justyna Jarczyk and Witold Jarczyk, *On weighted quasi-arithmetic means which are convex*, Math. Inequal. Appl. (2019), <http://files.ele-math.com/preprints/mia-6547-pre.pdf>

## B) OMÓWIENIE WYŻEJ WYMIENIONYCH PUBLIKACJI

Rozpocznę od problemu *niezmienniczości średnich*, którym zajmowałam się głównie przed uzyskaniem doktoratu. Wyniki prac [P2], [P4], [P6] i [P8] weszły w skład mojej rozprawy doktorskiej.

Na początek przypomnę główny wynik pracy [P1] napisanej przeze mnie (pod używanym wtedy nazwiskiem Błasińska-Lesk) wspólnie z Głazowską i Matkowskim. Dotyczy ona niezmienniczości średniej geometrycznej  $G$  względem pary średnich Stolarsky'ego. Dla dowolnych parametrów  $p, q \in \mathbb{R}$  średnią Stolarsky'ego  $E_{p,q}$  definiujemy na przedziale  $(0, +\infty)$  przyjmując  $E_{p,q}(x, x) = x$  dla każdego  $x \in (0, +\infty)$  oraz

$$E_{p,q}(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \frac{x^p - y^p}{x^q - y^q} \right)^{\frac{1}{p-q}}, & \text{gdy } p \neq q \text{ i } pq \neq 0, \\ \left( \frac{x^p - y^p}{p(\log x - \log y)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{gdy } p \neq q \text{ i } q = 0, \\ \left( \frac{x^q - y^q}{q(\log x - \log y)} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{gdy } p \neq q \text{ i } p = 0, \\ \exp \left( -\frac{1}{p} + \frac{x^p \log x - y^p \log y}{x^p - y^p} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{gdy } p = q \neq 0, \\ \sqrt{xy}, & \text{gdy } p = q = 0, \end{cases}$$

dla wszystkich różnych  $x, y \in (0, +\infty)$  (por. też str. 8). Niezmienniczość średniej  $G$  względem pary  $(E_{r,s}, E_{k,m})$  jest opisana równaniem

$$G \circ (E_{r,s}, E_{k,m}) = G.$$

Wszystkie pary  $(k, m)$  i  $(r, s)$ , dla których spełnione jest powyższe równanie, wymienione są w następującym rezultacie.

**Twierdzenie 39.** ([P1, Theorem 2]) *Niech  $k, m, r, s \in \mathbb{R}$ . Średnia geometryczna  $G$  jest niezmiennicza względem pary  $(E_{r,s}, E_{k,m})$  średnich Stolarsky'ego wtedy tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:*

- (i)  $k = m = r = s = 0$ ;
- (ii)  $k = -r \neq 0$  i  $m = s = 0$ ;
- (iii)  $k = m \neq 0$  i  $k = -r$ ;
- (iv)  $rk \neq 0$ ,  $r \neq s$ ,  $k \neq m$  oraz  
 $r = -s$  i  $k = -m$  lub  $k = -r$  i  $m = -s$  lub  $k = -s$  i  $m = -r$ .

Jak wiadomo (por., na przykład, [87]), średnia  $G$  jest wtedy jedyną ciągłą średnią niezmienniczą względem par średnich Stolarsky'ego opisanych w powyższym twierdzeniu. Jego dowód jest dość długi i, w przypadku gdy  $k \neq m$ , wymaga wyznaczenia pochodnych rzędu 8 funkcji

$$(0, +\infty) \setminus \{1\} \ni x \mapsto x \left( \frac{k}{m} \frac{x^m - 1}{x^k - 1} \right)^{\frac{1}{k-m}}.$$

Do obliczenia tych pochodnych oraz pewnych granic użyto pakietu *Mathematica 4.0*.

Prace [P2] i [P4] stanowią dwa kolejne etapy rozwiązania problemu Matkowskiego-Sutô dla ważonych średnich quasi-arytmetycznych, czyli problemu niezmienniczości w tej klasie średnich, opisanego równaniem (7). Jak wiemy problem ten przez proste podstawienie sprowadza się do badania równania (8), które może równoważnie być zapisane w postaci

$$r\varphi^{-1}(p\varphi(x) + (1-p)\varphi(y)) + (1-r)\psi^{-1}(q\psi(x) + (1-q)\psi(y)) = rx + (1-r)y. \quad (39)$$

Równanie to zostało rozwiązane w pracy [P2] napisanej przeze mnie wspólnie z Matkowskim, pod założeniem dwukrotnej różniczkowalności w sposób ciągły generatorów  $\varphi$  i  $\psi$  (zob. [P2, Theorem 1]). Kluczowym narzędziem użytym w tym rozumowaniu była następująca charakteryzacja warunkowej jednorodności ważonych średnich quasi-arytmetycznych, interesująca sama w sobie.

**Twierdzenie 40.** ([P2, Proposition 1]) *Niech  $I \subset (0, +\infty)$  będzie przedziałem i niech  $\sigma \in \mathcal{CM}(I)$  oraz  $q \in (0, 1)$ . Średnia  $A_q^\sigma$  jest warunkowo jednorodna:*

$$A_q^\sigma(sx, sy) = sA_q^\sigma(x, y)$$

*dla wszystkich  $x, y \in I$  i takich  $s \in (0, +\infty)$ , że  $sx, sy \in I$ , wtedy i tylko wtedy, gdy albo*

$$\sigma(x) \sim x^\eta, \quad x \in I,$$

*dla pewnego  $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , albo*

$$\sigma(x) \sim \log x, \quad x \in I.$$

W kolejnej pracy [P4] udało mi się opuścić kłopotliwe założenie dwukrotnej różniczkowalności w sposób ciągły generatorów  $\varphi$  i  $\psi$  i udowodnić następujący wynik zamykający sprawę niezmienniczości w klasie ważonych średnich quasi-arytmetycznych.

**Twierdzenie 41.** ([P4, Theorem 1]) *Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  i  $p, q, r \in (0, 1)$ . Para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (39) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$r(1-p) = (1-r)q$$

i albo

$$\varphi(x) \sim x, \quad x \in I, \quad \psi(x) \sim x, \quad x \in I,$$

albo  $r = 1/2$ ,  $p + q = 1$  oraz

$$\varphi(x) \sim e^{tx}, \quad x \in I, \quad \psi(x) \sim e^{-tx}, \quad x \in I,$$

dla pewnej liczby  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Interesujące jest to, że osłabienie założeń o generatorach  $\varphi$  i  $\psi$  nie powiększyło zbioru rozwiązań: teza Twierdzenia 41 jest taka sama, jak teza Theorem 1 z pracy [P2]. W dowodzie Twierdzenia 41 najważniejsze było podniesienie regularności generatorów. Udało się to zrobić przy użyciu dwóch nietrywialnych twierdzeń pochodzących z monografii [61] Járaia.

W artykule [P6] podjęłam temat uogólnienia problemu Matkowskiego-Sutô na przypadek wag funkcyjnych, dowodząc pewnych rezultatów dotyczących równania funkcyjnego

$$\begin{aligned} r(x, y)\varphi^{-1}(p(x, y)\varphi(x) + (1 - p(x, y))\varphi(y)) + \\ + (1 - r(x, y))\psi^{-1}(q(x, y)\psi(x) + (1 - q(x, y))\psi(y)) = \\ = r(x, y)x + (1 - r(x, y))y, \end{aligned} \quad (40)$$

gdzie  $p, q, r : I^2 \rightarrow (0, 1)$  są danymi funkcjami wagowymi, a  $I \subset \mathbb{R}$  przedziałem o różnych końcach. To jasne, że w przypadku, gdy funkcje  $p, q$  i  $r$  są stałe, równanie (40) staje się równaniem (39). Oczywiście trudno przypuszczać, by w tak ogólnej sytuacji można było udowodnić zadowalające rezultaty. Poniżej przytaczam twierdzenie, które jest jednak interesującym przykładem możliwych wyników.

**Twierdzenie 42.** ([P6, Theorem 2]) *Założmy, że funkcje  $p, q, r : I^2 \rightarrow (0, 1)$  są trzykrotnie różniczkowalne ze względu na pierwszą zmienną w każdym punkcie przekątnej  $\{(x, y) \in I^2 : x = y\}$ . Wtedy istnieją takie dwukrotnie różniczkowalne funkcje  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ , że funkcja  $\phi := \varphi''/\varphi'$  spełnia równanie Riccatiego*

$$(p(x, x) - q(x, x))\phi'(x) = \frac{1 - p(x, x) - q(x, x)}{1 - q(x, x)}\phi(x)^2 + a(x)\phi(x) + b(x), \quad (41)$$

ilekroć  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  są trzykrotnie różniczkowalnymi funkcjami o niezzerujących się pierwszych pochodnych i para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (40).

Wiadomo, że trudno o ogólne metody efektywnego wyznaczania rozwiązań równania Riccatiego. W pracy [P6] można znaleźć jednak kilka szczególnych przypadków, w których potrafimy to zrobić z równaniem (41). W konsekwencji można wyznaczyć funkcję  $\varphi$  i, ostatecznie, także  $\psi$ . Dla przykładu

(i) założenie  $p(x, x) = q(x, x)$ ,  $x \in I$ , prowadzi do algebraicznego równania kwadratowego (zob. [P6, Corollary 3]),

(ii) warunek  $p(x, x) + q(x, x) = 1$ ,  $x \in I$ , sprowadza równanie (41) do liniowego równania różniczkowego (zob. [P6, Corollary 4]).

Inne szczególne przypadki przedstawione są w [P6, Corollaries 5-8 i Theorem 3]. Z jednego z tych wniosków (por. [P6, Corollary 5]) wynika następująca obserwacja, mogąca w pierwszym momencie wydawać się nieco zaskakująca: w pewnych przypadkach wartości rozwiązania  $(\varphi, \psi)$  równania (40) w całym kwadracie  $I^2$  są jednoznacznie wyznaczone przez wartości funkcji  $p, q, r$  przyjmowane dowolnie blisko przekątnej  $\Delta$ .

Praca [P8] poświęcona została niezmienniczości średniej arytmetycznej  $A$  względem pary  $(B_{1/2}^{\varphi, s}, B_{1/2}^{\psi, s})$  średnich Bajraktarewicia, czyli, jak pamiętamy (por. str. 7), średnich  $B_s^\alpha := B_{1/2}^{\alpha, s}$  postaci

$$B_s^\alpha(x, y) = \alpha^{-1} \left( \frac{s(x)}{s(x) + s(y)} \alpha(x) + \frac{s(y)}{s(x) + s(y)} \alpha(y) \right),$$

gdzie  $\alpha \in \mathcal{CM}(I)$  i  $s : I \rightarrow (0, +\infty)$ . Średnia  $B_s^\alpha$  jest ważnym przykładem średniej quasi-arytmetycznej z wagą funkcyjną; waga ta jest określona wzorem

$$I^2 \ni (x, y) \mapsto \frac{s(x)}{s(x) + s(y)}.$$

Zauważmy, że niezmienniczość średniej  $A$  względem pary  $(B_s^\varphi, B_s^\psi)$  jest opisana przez równanie

$$A \circ (B_s^\varphi, B_s^\psi) = A$$

czyli

$$\begin{aligned} & \varphi^{-1} \left( \frac{s(x)}{s(x) + s(y)} \varphi(x) + \frac{s(y)}{s(x) + s(y)} \varphi(y) \right) + \\ & + \psi^{-1} \left( \frac{s(x)}{s(x) + s(y)} \psi(x) + \frac{s(y)}{s(x) + s(y)} \psi(y) \right) = x + y. \end{aligned} \tag{42}$$

Jest to szczególny przypadek równania (40), gdzie

$$r(x, y) = \frac{1}{2} \text{ i } p(x, y) = q(x, y) = \frac{s(x)}{s(x) + s(y)}, \quad x, y \in I.$$

W pracy [P8] równanie (42) zostało rozwiązane pod założeniem, że funkcja  $s : I \rightarrow (0, +\infty)$  spełnia równanie oscylatora harmonicznego

$$s''(x) = as(x),$$



a więc jest jednej z następujących postaci:

$$s(x) = c_1x + c_2,$$

lub

$$s(x) = c_1e^{\omega x} + c_2e^{-\omega x},$$

lub

$$s(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

Nietrudno przekonać się (por. [P8, Remark 3]), że wystarczy ograniczyć się do jednego z następujących przypadków:

- (a)  $I \subset (0, +\infty)$  i  $s(x) = x$ ,  $x \in I$ ;
- (b)  $I \subset \mathbb{R}$  i  $s(x) = e^x$ ,  $x \in I$ ;
- (c)  $I \subset (0, \frac{\pi}{2})$  i  $s(x) = \cos x$ ,  $x \in I$ .

Poniższy rezultat podaje wszystkie rozwiązania równania (42) pod założeniem odpowiednio wysokiej regularności.

**Twierdzenie 43.** ([P8, Theorem 3 i Theorem 4]) *Niech  $s : I \rightarrow (0, +\infty)$  i  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ .*

(i) *Jeśli zachodzi przypadek (a), a funkcje  $\varphi$  i  $\psi$  są czterokrotnie różniczkowalne, to para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (42) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \in I, \quad \text{ i } \quad \psi(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \in I.$$

(ii) *Jeśli zachodzi przypadek (b), a funkcje  $\varphi$  i  $\psi$  są czterokrotnie różniczkowalne, to para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (42) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\varphi(x) \sim e^{-2x}, \quad x \in I, \quad \text{ i } \quad \psi(x) \sim e^{-2x}, \quad x \in I.$$

(iii) *Jeśli zachodzi przypadek (c), a funkcje  $\varphi$  i  $\psi$  są sześciokrotnie różniczkowalne, to para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (42) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\varphi(x) \sim \operatorname{tg} x, \quad x \in I, \quad \text{ i } \quad \psi(x) \sim \operatorname{tg} x, \quad x \in I.$$

Wynik ten uogólnia rezultat Domsty i Matkowskiego z pracy [46], gdzie udowodniono tylko tezę (i). Nietrudno sprawdzić, że funkcje  $s, \varphi$  i  $\psi$  opisane w Twierdzeniu 43, generują średnią arytmetyczną. Oznacza to, że poza parą  $(A, A)$  nie znamy pary  $(B_s^\varphi, B_s^\psi)$ , względem której niezmiennicza jest średnia  $A$ .

Ukoronowaniem moich zainteresowań problemem niezmienniczości średnich jest obszerna praca przeglądowa [P13], napisana wspólnie z W. Jarczykiem. Zawiera omówienie najważniejszych rezultatów dotyczących iteracji Gaussa, klasycznego problemu Matkowskiego-Sutô oraz niezmienniczości w takich klasach, jak ważone średnie quasi-arytmetyczne, średnie Matkowskiego, średnie Makó-Pálesa, a także średnie

Bajraktarevicia oraz Cauchy’ego, w tym średnie Lagrange’a i Stolarsky’ego. Spis literatury tego artykułu zawiera ponad 150 pozycji.

Omówię teraz pokrótce dwie prace, w których głównym tematem są (ważone) średnie quasi-arytmetyczne, ale nie w związku z problemem niezmienniczości. Pierwsza część pracy [P12], powstałej we współpracy z Daróczym i W. Jarczykiem, poświęcona jest problemowi postawionemu przez Daróczyego w roku 2014 podczas *52nd International Symposium on Functional Equations* w Innsbrucku w Austrii (zob. [29]). Problem ten nawiązuje do następującego twierdzenia Gera i Kochanka z ich pracy [51].

*Niech  $M$  będzie ciągłą średnią na przedziale  $I$ , ściśle rosnącą ze względu na każdą zmienną. Jeśli istnieje niestałe rozwiązanie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  równania*

$$f(M(x, y)) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad (43)$$

*to średnia  $M$  jest quasi-arytmetyczna.*

Problem Daróczyego sprowadza się do pytania, czy w powyższym twierdzeniu założenie, że średnia  $M$  jest ciągła i ściśle rosnąca ze względu na każdą zmienną, jest istotne. Innymi słowy problem brzmi następująco.

*Niech  $M$  będzie średnią na przedziale  $I$ . Czy w przypadku, gdy  $M$  nie jest średnią quasi-arytmetyczną, każde rozwiązanie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  równania (43) jest stałe ?*

Negatywna odpowiedź została podana jeszcze w trakcie *52nd ISFE* (zob. [P12]). Średnia pokazująca to nie jest ścisła. Przykład ścisłej średniej, dla której każde rozwiązanie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  równania (43) jest stałe, mimo że średnia  $M$  nie jest quasi-arytmetyczna, został skonstruowany w pracy [P12]. Pokazujący to Example 1.4 stanowi tam punkt wyjścia do badania pojęcia łączenia średnich, badanego w pracach [H6] i [H7].

Kolejna praca, poświęcona średnim quasi-arytmetycznym (a priori ważonym), to artykuł [P15] powstały we współpracy z Chudziakiem, Głazowską i W. Jarczykiem. Dotyczy związków między wypukłością ważonej średniej quasi-arytmetycznej a wypukłością jej rosnących generatorów. Okazuje się, że wypukłość takiej średniej nie zależy ani od liczby zmiennych, ani od jej wag, a jedynie od jej generatora. W tym omówieniu wyjątkowo zaczniemy od średnich  $n$ -zmiennych.

Ustalmy przedział otwarty  $I \subset \mathbb{R}$  i liczbę  $n \in \mathbb{N}$ . Niech  $\Delta_n := \{(p_1, \dots, p_n) \in (0, 1)^n : p_1 + \dots + p_n = 1\}$ . Dla dowolnej funkcji  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  i punktu  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$  wzór

$$A_{\mathbf{p}}^{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(p_1\varphi(x_1) + \dots + p_n\varphi(x_n)),$$

gdzie  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , definiuje *średnią quasi-arytmetyczną generowaną przez  $\varphi$  i ważoną przez wektor  $\mathbf{p}$* . Problem równości takich średnich został ostatecznie rozwiązany przez Maksę i Pálesa w pracy [83]:

Niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  i  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta_n$ . Równość  $A_{\mathbf{p}}^{\varphi} = A_{\mathbf{q}}^{\psi}$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$  i  $\varphi \sim \psi$ .

W szczególności widzimy więc, że albo wszystkie rosnące generatory średniej  $A_{\mathbf{p}}^{\varphi}$  są wypukłe, albo żaden. Zapowiadana powyżej niezależność wypukłości takiej średniej zarówno od liczby jej zmiennych, jak i od jej wag jest opisana w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 44.** ([P15, Theorem 1]) Niech  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  będzie funkcją rosnącą. Wtedy następujące warunki są parami równoważne:

(i) istnieje liczba naturalna  $m \geq 2$  i taki wektor  $\mathbf{p} \in \Delta_m$ , że średnia  $A_{\mathbf{p}}^{\varphi}$  jest wypukła;

(ii) średnia  $A_{\mathbf{p}}^{\varphi}$  jest wypukła dla wszystkich liczb naturalnych  $m \geq 2$  i wektorów  $\mathbf{p} \in \Delta_m$ ;

(iii) istnieje liczba naturalna  $n \geq 2$  i taki wektor  $\mathbf{q} \in \Delta_n$ , że średnia  $A_{\mathbf{q}}^{\varphi^{-1}}$  jest wklęsła;

(iv) średnia  $A_{\mathbf{q}}^{\varphi^{-1}}$  jest wklęsła dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq 2$  i wektorów  $\mathbf{q} \in \Delta_n$ .

W dalszym ciągu wystarczy więc badać wypukłość średnich quasi-arytmetycznych dwóch zmiennych, czyli średnich  $A^{\varphi}$  o wzorze

$$A^{\varphi}(x_1, x_2) = \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} \right).$$

Zacytuję tu jeszcze dwa rezultaty opisujące związek między wypukłością średniej  $A^{\varphi}$  a wypukłością jej rosnącego generatora  $\varphi$ .

**Twierdzenie 45.** ([P15, Theorem 3]) Niech  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  będzie funkcją rosnącą. Jeśli średnia  $A^{\varphi}$  jest wypukła, to funkcja  $\varphi$  jest wypukła.

Poniższy przykład pokazuje, że implikacja odwrotna nie zachodzi.

**Przykład 46.** ([P15, Example 2]) Funkcja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o wzorze

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x < 0, \\ 2x, & \text{gdy } x \geq 0, \end{cases}$$

jest ciągła, ściśle rosnąca i wypukła. Prosty rachunek pokazuje, że

$$A^{\varphi}(x, 1) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & \text{gdy } x < -2, \\ \frac{x+2}{4}, & \text{gdy } -2 \leq x < 0, \\ \frac{x+1}{2}, & \text{gdy } x \geq 0. \end{cases}$$

Zatem funkcja  $A^{\varphi}(\cdot, 1)$ , a tym bardziej  $A^{\varphi}$ , nie jest wypukła.

Pod pewnymi założeniami wypukłość rosnącego generatora  $\varphi$  pociąga jednak wypukłość średniej  $A^\varphi$ .

**Twierdzenie 47.** ([P15, Theorem 3]) *Niech  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dwukrotnie różniczkowalną w sposób ciągły funkcją o dodatniej pierwszej pochodnej. Średnia  $A^\varphi$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy albo funkcja  $\varphi$  jest afiniczna, albo druga pochodna  $\varphi''$  jest dodatnia i funkcja  $[(\varphi')^2 / \varphi''] \circ \varphi^{-1}$  jest wklęsła.*

Dowody w pracy [P15] są elementarne, ale, jak sądzę, pomysłowe i, w żadnym razie, nie są oczywiste.

Prace [P10] i [P14], napisane wspólnie z Buraiem, dotyczą innej klasy średnich, istotnie szerszej od klasy ważonych średnich quasi-arytmetycznych, a mianowicie średnich Makó-Pálesa. Ustalmy przedział otwarty  $I \subset \mathbb{R}$ . Dla każdej funkcji  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  i borelowskiej miary probabilistycznej  $\mu$  na przedziale  $[0, 1]$  *średnią Makó-Pálesa*  $M_{\varphi, \mu} : I^2 \rightarrow I$  definiujemy wzorem

$$M_{\varphi, \mu}(x, y) = \varphi^{-1} \left( \int_0^1 \varphi(tx + (1-t)y) d\mu(t) \right).$$

Zauważmy, że jeśli  $p \in (0, 1)$  i  $\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ , gdzie  $\delta_0$  i  $\delta_1$  oznaczają miarę Diraca skupioną odpowiednio w 0 i 1, to  $M_{\varphi, \mu} = A_p^\varphi$ . Tak więc średnie Makó-Pálesa w naturalny sposób uogólniają ważne średnie quasi-arytmetyczne. Z drugiej strony, jeśli  $\mu$  jest miarą Lebesgue'a, a  $f$  jest dowolną pierwotną funkcji  $\varphi$ , to  $M_{\varphi, \mu} = L^f$ . Zatem klasa średnich Makó-Pálesa zawiera też wszystkie średnie Lagrange'a.

Rezultaty prac [P10] i [P14] zawierają charakteryzację trzech podstawowych własności średnich Makó-Pálesa. Średnią  $M$  na przedziale  $I$  nazywamy:

– *symetryczną*, gdy

$$M(x, y) = M(y, x)$$

dla wszystkich  $x, y \in I$ ;

– *warunkowo jednorodną*, gdy  $I \subset (0, +\infty)$  oraz

$$M(sx, sy) = sM(x, y)$$

dla wszystkich  $x, y \in I$  i takich  $s \in (0, +\infty)$ , że  $sx, sy \in I$ ;

– *warunkowo niezmienniczą ze względu na przesunięcia*, gdy

$$M(x + \lambda, y + \lambda) = M(x, y) + \lambda$$

dla wszystkich  $x, y \in I$  i takich  $\lambda \in \mathbb{R}$ , że  $x + \lambda, y + \lambda \in I$ .

**Twierdzenie 48.** ([P14, Theorem] i [P10, Theorem 3.1 i Theorem 4.1]) *Niech  $\mu$  będzie borelowską miarą probabilistyczną na przedziale  $[0, 1]$  i niech  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ .*

Wówczas

(i) średnia  $M_{\varphi,\mu}$  jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu(1 - A) = \mu(A)$$

dla wszystkich borelowskich podzbiorów  $A$  przedziału  $[0, 1]$  lub  $\varphi$  jest wielomianem stopnia  $n \in \mathbb{N}$  oraz

$$\int_0^1 t^k d\mu(t) = \int_0^1 (1 - t)^k d\mu(t), \quad k = 1, \dots, n;$$

(ii) jeśli  $I \subset (0, +\infty)$ , to średnia  $M_{\varphi,\mu}$  jest warunkowo jednorodna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu$  jest miarą Diraca lub istnieje taka liczba  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , że

$$\varphi(x) \sim x^p, \quad x \in I,$$

lub

$$\varphi(x) \sim \log x, \quad x \in I;$$

(iii) średnia  $M_{\varphi,\mu}$  jest warunkowo niezmiennicza ze względu na przesunięcia wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu$  jest miarą Diraca lub istnieje taka liczba  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , że

$$\varphi(x) \sim e^{px}, \quad x \in I,$$

lub

$$\varphi(x) \sim x, \quad x \in I.$$

Jako wniosek otrzymuje się w szczególności postać wszystkich warunkowo jednorodnych ważonych średnich quasi-arytmetycznych i warunkowo jednorodnych średnich Lagrange'a, a także charakteryzację warunkowej niezmienniczości względem przesunięć w obu klasach średnich. Zatem rezultaty opisane w Twierdzeniu 48 uogólniają wyniki prac [36] i [58].

W dowodzie tezy (i) korzysta się, między innymi, z twierdzenia aproksymacyjnego Weierstrassa, a także z rezultatu Pálesa charakteryzującego wielomiany poprzez równania funkcyjne. Z kolei dowodząc tez (ii) i (iii) rozwiązuje się pewien układ nieskończenie wielu geometrycznych równań różnicowych, a następnie stosuje twierdzenia o postaci ciągłych rozwiązań funkcyjnego równania Cauchy'ego na przedziale, a więc na obciętej dziedzinie.

Zagadnienia poruszane w pracach [P5] i [P9] dotyczą problemu równości. W pierwszej z nich jest to równość pomiędzy średnią Lagrange'a  $L_\varphi$  a średnią quasi-arytmetyczną  $A^\varphi$  lub  $A^\psi$ , przy czym  $L_\varphi$  oznacza tu średnią Lagrange'a  $L^\phi$  generowaną przez dowolną pierwotną  $\phi$  funkcji  $\varphi$ . Problem równości  $L_\varphi = A^\varphi$  jest opisany przez następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 49.** ([P5, Theorem 3.1]) *Niech  $I \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem i niech  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ . Wtedy następujące warunki są parami równoważne:*

- (i)  $L_\varphi = A^\varphi$ ;
- (ii)  $\varphi(x) \sim x$ ,  $x \in I$ ;
- (iii)  $L_\varphi = A^\varphi = A$ .

Przedstawione zostały dwa dowody: pierwszy polegający na sprowadzeniu problemu do zwyczajnego liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu, a drugi korzystający z postaci rozwiązań równania funkcyjnego Jensena. Ogólniejszy problem równości  $L_\varphi = A^\psi$  został rozwiązany pod dodatkowym założeniem o funkcjach  $\varphi$  i  $\psi$ .

Artykuł [P9], napisany wspólnie z Dascăl, dotyczy problemu równości  $K^\varphi = A^\psi$ , gdzie  $K^\varphi$  jest tak zwaną średnią sprzężoną, w tym przypadku postaci

$$K^\varphi(x, y) = \varphi^{-1} \left( \varphi(x) + \varphi(y) - \frac{1}{2} (\varphi(A_p(x, y)) + \varphi(A_q(x, y))) \right),$$

określoną na niepustym przedziale otwartym  $I$ . Innymi słowy chcemy rozwiązać równanie funkcyjne

$$\varphi^{-1} \left( \varphi(x) + \varphi(y) - \frac{1}{2} (\varphi(A_p(x, y)) + \varphi(A_q(x, y))) \right) = \psi^{-1} \left( \frac{\psi(x) + \psi(y)}{2} \right). \quad (44)$$

Odpowiedź jest zawarta w poniższym rezultacie, który, pod pewnymi założeniami regularnościowymi, podaje postać lokalnych rozwiązań równania (44).

**Twierdzenie 50.** ([P9, Theorem 1]) *Niech  $p, q \in (0, 1)$ , przy czym choć jedna z liczb  $p, q$  jest różna od  $1/2$ , i niech  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  będą funkcjami czterokrotnie różniczkowalnymi w sposób ciągły. Jeśli para  $(\varphi, \psi)$  spełnia równanie (44), to  $p+q = 1$  i istnieje taki nietrywialny przedział  $J \subset I$ , że*

$$\varphi(x) \sim x, \quad x \in J, \quad \text{ i } \quad \psi(x) \sim x, \quad x \in J.$$

Dowód polega na zredukowaniu równania (44) do równania różniczkowego postaci

$$h(x) [Ah'(x)^2 + Bh(x)^2h'(x) + Ch(x)^4] = 0$$

spełnionego przez funkcję  $h := \varphi''/\varphi'$ ; obliczanie pochodnych wyższych rzędów i przekształcanie otrzymanych równości zostało wykonane z użyciem pakietu *Mathematica* 4.0. Powyższe twierdzenie uzupełnia główny rezultat pracy [39] Daróczyego i Pálesa, gdzie rozwiązane zostało równanie

$$\varphi^{-1} \left( \varphi(x) + \varphi(y) - \varphi \left( \frac{x+y}{2} \right) \right) = \psi^{-1} \left( \frac{\psi(x) + \psi(y)}{2} \right).$$

Na koniec omówimy pozostałe prace [P3], [P7] i [P11]. Zagadnienia poruszane w nich nie należą do teorii średnich. Notka [P3], napisana wspólnie z W. Jarczykiem, zawiera negatywną odpowiedź na pytanie N. Brillouët-Bellout (zob. [17]) o istnienie ciągłych rozwiązań  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  równania

$$x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y)). \quad (45)$$

Głównym wynikiem jest tu następujące twierdzenie, udowodnione w całkowicie elementarny sposób.

**Twierdzenie 51.** ([P3, Theorem]) *Nie istnieje takie rozwiązanie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  równania (45), że zbiór*

$$\left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\} \quad (46)$$

*jest przedziałem.*

Zamieniając rolami zmienne  $x$  i  $y$  widzimy, że zbiór (46) pokrywa się ze zbiorem

$$\left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : x, y \in \mathbb{R}, x > y \right\},$$

który jest obrazem zbioru spójnego poprzez funkcję  $F : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$  o wzorze

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła, to tę samą własność ma funkcja  $F$  i, w konsekwencji, zbiór (46) jest przedziałem. Z Twierdzenia 51 wynika więc, że równanie (45) nie ma ciągłych rozwiązań określonych na zbiorze  $\mathbb{R}$ .

W pracy [P7], wspólnie z Lin Li, W. Jarczykiem i Weinianem Zhangiem, badamy istnienie kwadratowych pierwiastków iteracyjnych funkcji wielowartościowych, których dokładnie jedna wartość nie jest jednoelementowa. Przez kwadratowy pierwiastek iteracyjny funkcji wielowartościowej  $f : X \rightarrow 2^X$  rozumiemy dowolne  $g : X \rightarrow 2^X$  spełniające równość  $g^2 = f$ , gdzie funkcja wielowartościowa  $g^2$  jest określona wzorem

$$g^2(x) = \bigcup_{y \in g(x)} g(y).$$

Jest to próba przeniesienia klasycznego zagadnienia istnienia pierwiastków iteracyjnych funkcji jednowartościowych na najprostsze funkcje wielowartościowe.

Mając dany ustalony element  $c$  zbioru  $X$  oznaczmy przez  $\mathcal{F}_c(X)$  zbiór wszystkich tych funkcji wielowartościowych  $f : X \rightarrow 2^X$ , że  $\#f(c) > 1$  i  $\#f(x) = 1$  dla każdego  $x \in X \setminus \{c\}$ . Ograniczmy się do ściśle monotonicznych funkcji wielowartościowych.

W przypadku, gdy  $X \subset \mathbb{R}$ , multifunkcję  $f : X \rightarrow 2^X$  nazywamy *ściśle rosnącą* [*ściśle malejącą*], gdy  $\sup f(x_1) < \inf f(x_2)$  [ $\inf f(x_1) > \sup f(x_2)$ ] dla wszystkich  $x_1, x_2 \in X$  spełniających nierówność  $x_1 < x_2$ .

Ściśle malejące funkcje wielowartościowe na ogół nie mają regularnych ściśle monotonicznych pierwiastków kwadratowych.

**Twierdzenie 52.** ([P7, Theorem 3 i Theorem 4]) *Założmy, że  $X \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem i niech  $f \in \mathcal{F}_c(X)$  będzie ściśle malejącą funkcją wielowartościową. Jeśli  $f$  jest półciągła z góry na zbiorze  $X \setminus \{c\}$  lub  $c \in f(c)$ , to  $f$  nie ma kwadratowego pierwiastka, półciągłego z góry na  $X \setminus \{c\}$ .*

W przeciwieństwie do powyższej sytuacji ściśle rosnące funkcje wielowartościowe mają na ogół dużo pierwiastków kwadratowych. Procedurę otrzymywania ściśle monotonicznych, półciągłych z góry pierwiastków iteracyjnych szczegółowo opisują Theorem 5 i Theorem 6 z pracy [P7]. Opis ten wykorzystuje klasyczną konstrukcję podaną w pracy [78] przez Kuczmę dla przypadku jednowartościowego. Jego sformułowanie, a także dowody wspomnianych twierdzeń są dość zawile. Pokazuje to, że problemy istnienia i konstrukcji pierwiastków iteracyjnych funkcji wielowartościowych, nawet w najprostrzym przypadku, nie mają prostych i eleganckich rozwiązań. Nie zachęca to do dalszych badań tego zagadnienia, choć niewątpliwie jest ono ważne i należy się nad nim pochylić.

Ostatnia z przedstawianych prac, czyli artykuł [P11], powstał we współpracy z Matkowskim i dotyczy badania jednostajnej wypukłości przestrzeni paraunormowanych. Przypomnijmy niezbędne definicje.

Niech  $X$  będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Funkcję  $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy *paranormą* w przestrzeni  $X$ , gdy spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x) &= 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0, x \in X, \\ \mathbf{p}(-x) &= \mathbf{p}(x), x \in X, \\ \mathbf{p}(x+y) &\leq \mathbf{p}(x) + \mathbf{p}(y), x, y \in X \text{ (subaddytywność)}, \\ \text{jeśli } t_n &\rightarrow t, \mathbf{p}(x_n - x) \rightarrow 0, \text{ to } \mathbf{p}(t_n x_n - tx) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$  i dla wszystkich ciągów  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  liczb rzeczywistych i wszystkich ciągów  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementów zbioru  $X$ . Parę  $(X, \mathbf{p})$  nazywamy wtedy *przestrzenią paraunormowaną*. Mówimy, że jest ona *jednostajnie wypukła*, gdy dla wszystkich liczb  $r \in (0, +\infty)$  i  $\varepsilon \in (0, 2r)$  istnieje taka liczba  $\delta(r, \varepsilon) \in (0, r)$ , że

$$\text{jeśli } \mathbf{p}(x) \leq r, \mathbf{p}(y) \leq r \text{ i } \mathbf{p}(x-y) \geq \varepsilon, \text{ to } \mathbf{p}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq r - \delta(r, \varepsilon)$$

dla wszystkich  $x, y \in X$ . Funkcję  $\delta : \Delta \rightarrow (0, +\infty)$ , gdzie  $\Delta := \{(r, \varepsilon) \in (0, +\infty)^2 : \varepsilon < 2r\}$ , nazywamy *modułem wypukłości* przestrzeni  $(X, \mathbf{p})$ .



Najważniejsze rezultaty pracy [P11] dostarczają warunki dostateczne jednostajnej wypukłości przestrzeni całkowalnych funkcji prostych określonych na ustalonej przestrzeni z miarą. Ustalmy taką przestrzeń  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  i oznaczmy przez  $S$  przestrzeń liniową  $\mu$ -całkowalnych funkcji prostych  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dla każdej bijekcji  $\varphi$  przedziału  $[0, +\infty)$  zerującej się w zerze, określamy funkcjonal  $\mathbf{p}_\varphi : S \rightarrow [0, +\infty)$  przyjmując

$$\mathbf{p}_\varphi(x) = \varphi^{-1} \left( \int_{\Omega} \varphi \circ |x| \, d\mu \right).$$

Poniższe dwa twierdzenia opisują wspomniane warunki dostateczne jednostajnej wypukłości przestrzeni  $(S, \mathbf{p}_\varphi)$ .

**Twierdzenie 53.** ([P11, Theorem 2.3]) *Niech  $\varphi$  będzie taką rosnącą bijekcją przedziału  $[0, +\infty)$ , że  $\mathbf{p}_\varphi$  jest paranormą w przestrzeni  $S$ . Jeśli funkcja  $\varphi$  jest superkwadratowa:*

$$\varphi(r + s) + \varphi(|r - s|) \geq 2\varphi(r) + 2\varphi(s), \quad r, s \in (0, +\infty),$$

to przestrzeń  $(S, \mathbf{p}_\varphi)$  jest jednostajnie wypukła, a funkcja  $\delta : \Delta \rightarrow (0, +\infty)$  o wzorze

$$\delta(r, \varepsilon) = r - \varphi^{-1} \left( \varphi(r) - \varphi \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \right),$$

jest jej modułem wypukłości.

**Twierdzenie 54.** ([P11, Theorem 2.12]) *Niech  $\varphi$  będzie taką rosnącą bijekcją przedziału  $[0, +\infty)$ , że  $\mathbf{p}_\varphi$  jest paranormą w przestrzeni  $S$ . Załóżmy, że funkcja  $\varphi$  jest ściśle wypukła, a funkcja  $H : [0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$ , określona wzorem*

$$H(r, s) = \varphi(\varphi^{-1}(r) + \varphi^{-1}(s)) + \varphi(|\varphi^{-1}(r) - \varphi^{-1}(s)|),$$

spełnia warunek

$$H \left( \sum_{i=1}^k a_i(r_i, s_i) \right) \leq \sum_{i=1}^k a_i H(r_i, s_i)$$

dla wszystkich  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k \in [0, +\infty)$  i takich  $a_1, \dots, a_k \in [0, +\infty)$ , że  $a_i = \mu(A_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , dla pewnych parami rozłącznych zbiorów  $A_1, \dots, A_k \in \Sigma$ . Wtedy przestrzeń  $(S, \mathbf{p}_\varphi)$  jest jednostajnie wypukła i istnieje taki jej moduł wypukłości  $\delta : \Delta \rightarrow (0, +\infty)$ , że

$$\varphi \left( r - \delta(r, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \varphi \left( \left| r - \delta(r, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \right| \right) = 2\varphi(r)$$

dla wszystkich  $(r, \varepsilon) \in \Delta$ .

W przypadku, gdy zbiór  $\Omega$  jest skończony:  $\Omega := \{1, \dots, k\}$ , to  $S = S(\Omega, \Sigma, \mu) = \mathbb{R}^k$  bez względu na miarę  $\mu$ . Funkcjonał  $\mathbf{p}_\varphi$  przyjmuje teraz postać

$$\mathbf{p}_\varphi(x) = \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^k a_i \varphi(|x_i|) \right),$$

gdzie  $a_i = \mu(\{i\})$  dla  $i = 1, \dots, k$ . Nietrudno udowodnić następujący rezultat.

**Twierdzenie 55.** ([P11, Theorem 3.1]) *Niech  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  będzie taką funkcją ściśle wypukłą, że  $\mathbf{p}_\varphi$  jest paranormą w  $\mathbb{R}^k$ . Wtedy przestrzeń  $(\mathbb{R}^k, \mathbf{p}_\varphi)$  jest jednostajnie wypukła.*

Niestety powyższe twierdzenie nie podaje żadnych informacji o module wypukłości badanej przestrzeni.

**Przykład 56.** (por. [P11, Example 3.2 i Theorem 3.3]) Niech  $\mu$  będzie miarą liczącą na zbiorze  $\Omega = \{1, 2\}$ :  $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = 1$ . Wtedy  $S = S(\Omega, 2^\Omega, \mu) = \mathbb{R}^2$ . Określmy funkcję  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  wzorem  $\varphi(t) = e^t - 1$ . Funkcjonał  $\mathbf{p}_\varphi$ , o wzorze

$$\mathbf{p}_\varphi = \varphi^{-1} (\varphi(|x_1|) + \varphi(|x_2|)),$$

jest paranormą na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Wobec Twierdzenia 55 przestrzeń  $(\mathbb{R}^2, \mu)$  jest jednostajnie wypukła. Niestety, ponieważ nie są spełnione ani założenia Twierdzenia 53 ani Twierdzenia 54, nie możemy od razu wskazać modułu wypukłości tej przestrzeni. Można to jednak efektywnie zrobić posługując się długimi rachunkami zawartymi w dowodzie Theorem 3.3 pracy [P11].

## Literatura

- [1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York and London, 1966.
- [2] J. Aczél, Z. Daróczy, *Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind*, Publ. Math. Debrecen 10 (1963), 171–190.
- [3] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional equations in several variables with applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [4] S. Baják, Zs Páles, *Invariance equation for generalized quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. 77 (2009), 133–145.
- [5] S. Baják, Zs Páles, *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Gini means*, Comput. Math. Appl. 58 (2009), 334–340.
- [6] S. Baják, Zs. Páles, *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Stolarsky means*, Appl. Math. Comput. 216 (2010), 3219–3227.

- [7] S. Baják, Zs Páles, *Solving invariance equations involving homogeneous means with the help of computer*, Appl. Math. Comput. 219 (2013), 6297–6315.
- [8] M. Bajraktarević, *Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes*, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. (2) 13 (1958), 243–248.
- [9] M. Bajraktarević, *Sur une généralisation des moyennes quasilinearaires*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 3 (1963), 69–76.
- [10] M. Bajraktarević, *Über die Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte*, Studia Sci. Math. Hungar. 4 (1969), 3–8.
- [11] M. Klaričić Bakula, Zs. Páles, J. Pečarić, *On weighted  $L$ -conjugate means*, Commun. Appl. Anal. 11 (2007), 95–110.
- [12] K. Baron, M. Kuczma, *Iteration of random-valued functions on the unit interval*, Colloq. Math. 37 (1977), 263–269.
- [13] E.F. Beckenbach, *A class of mean value functions*, Amer. Math. Monthly 57 (1950), 1–6.
- [14] L.R. Berrone, J. Moro, *Lagrangian means*, Aequationes Math. 55 (1998), 217–226.
- [P1] J. Błasińska-Leski, D. Głazowska, J. Matkowski, *An invariance of the geometric mean with respect to Stolarsky mean-type mappings*, Results Math. 43 (2003), 42–55.
- [16] J.M. Borwein, P.B. Borwein, *Pi and the AGM. a study in analytical number theory and computational complexity*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, a Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.
- [17] N. Brillouët-Belluot, *Problem 15 and Remark 14 in Report of meeting. The Thirty-eighth International Symposium on Functional Equations, Noszvaj (Hungary)*, Aequationes Math. 61 (2001), 304.
- [18] P.S. Bullen, *Handbook of Means and their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.
- [19] P. Burai, *A Matkowski-Sutô type equation*, Publ. Math. Debrecen 70 (2007), 233–247.
- [20] P. Burai, *Matkowski-Sutô type equation on symmetrized weighted quasi-arithmetic means*, Results Math. 63 (2013), 397–408.
- [P10] P. Burai, J. Jarczyk, *Conditional homogeneity and translitivity of Makó-Páles means*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. 40 (2013), 159–172.
- [P14] P. Burai, J. Jarczyk, *On symmetry of Makó-Páles means*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. 47 (2018), 173–177.
- [23] A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, I<sup>re</sup> partie: Analyse Algébrique*, Imprimerie Royale, Paris, 1821.
- [24] O. Chisini, *Sur concetto di media*, Period. Mat. 9 (1929), 106–122.
- [P15] J. Chudziak, D. Głazowska, J. Jarczyk, W. Jarczyk, *On weighted quasi-arithmetic means which are convex*, Math. Inequal. Appl., <http://files.ele-math.com/preprints/mia-6547-pre.pdf>
- [26] Z. Daróczy, *On a class of means of two variables*, Publ. Math. Debrecen 55 (1999), 177–197.
- [27] Z. Daróczy, *Matkowski-Sutô type problem for conjugate arithmetic means*, Rocznik Nauk.–Dydakt. Prace Mat. 17 (2000), 89–100.

- 
- [28] Z. Daróczy, *On the equality and comparison problem of a class of mean values*, Aequationes Math. 81 (2011), 201–208.
  - [29] Z. Daróczy, *2.2. Problems, Problem 2 in Report of Meeting: The 52nd International Symposium on Functional Equations, GrillHof, Innsbruck (Austria) June 22-29, 2014*, Aequationes Math. 89 (2015), 1530.
  - [30] Z. Daróczy, J. Dascăl, *On the general solution of a family of functional equations with two parameters and its application*, Math. Pannon. 20 (2009), 27–36.
  - [31] Z. Daróczy, J. Dascăl, *On the equality problem of conjugate means*, Results Math. 58 (2010), 69–79.
  - [32] Z. Daróczy, G. Hajdu, *On linear combinations of weighted quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. 69 (2005), 58–67.
  - [33] Z. Daróczy, G. Hajdu, Che Tat Ng, *An extension theorem for a Matkowski-Sutô problem*, Colloq. Math. 95 (2003), 153–161.
  - [P12] Z. Daróczy, J. Jarczyk, W. Jarczyk, *2.8. Remark in Report of Meeting: The 52nd International Symposium on Functional Equations, GrillHof, Innsbruck (Austria) June 22-29, 2014*, Aequationes Math. 89 (2015), 1530.
  - [35] Z. Daróczy, J. Jarczyk, W. Jarczyk, *From a theorem of R. Ger and T. Kochanek to marginal joints of means*, Aequationes Math. 90 (2016), 211–233.
  - [36] Z. Daróczy, L. Losonczi, *Über den Vergleich von Mittelwerten*, Publ. Math. Debrecen 17 (1970), 289–297.
  - [37] Z. Daróczy, Gy. Maksa, *On a problem of Matkowski*, Colloq. Math. 82 (1999), 117–123.
  - [38] Z. Daróczy, Gy. Maksa, Zs. Páles, *Extension theorems for the Matkowski-Sutô problem*, Demonstratio Math. 23 (2000), 544–556.
  - [39] Z. Daróczy, Zs. Páles, *On means that are both quasi-arithmetic and conjugate arithmetic*, Acta Math. Hungar. 90 (2001), 271–282.
  - [40] Z. Daróczy, Zs. Páles, *Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski-Sutô problem*, Publ. Math. Debrecen 61 (2002), 157–218.
  - [41] Z. Daróczy, Zs. Páles, *The Matkowski-Sutô problem for weighted quasi-arithmetic means*, Acta Math. Hungar. 100 (2003), 237–243.
  - [42] Z. Daróczy, Zs. Páles, *A Matkowski-Sutô-type problem for weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Univ. Sci. Budapest 22 (2003), 69–81.
  - [43] Z. Daróczy, Zs. Páles, *On functional equations involving means*, Publ. Math. Debrecen 62 (2003), 363–377.
  - [44] J. Dascăl, *On a functional equation with a symmetric component*, Publ. Math. Debrecen 75 (2009), 33–39.
  - [P9] Judita Dascăl, Justyna Jarczyk, *On conjugate means which are quasi-arithmetic*, Appl. Math. Comput. 219 2(2012), 475–481.
  - [46] J. Domsta, J. Matkowski, *Invariance of the arithmetic mean with respect to special mean-type mappings*, Aequationes Math. 71 (2006), 70–85.
  - [47] B. de Finetti, *Sur concetto di media*, Giornale Dell Istituto Italiano degli Attuari 2 (1931), 369–396.

- [48] D.M.E. Foster, G.M. Phillips, *The arithmetic-harmonic mean*, Math. Comp., 42 (1984) 183–191.
- [49] C.F. Gauss, *Werke*, Göttingen, 1876.
- [50] C.F. Gauss, H. Geppert, *Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes: Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion*, Engelmann, Leipzig, 1927.
- [51] R. Ger, T. Kochanek, *An inconsistency equation involving means*, Colloq. Math. 115 (2009), 87–99.
- [52] C. Gini, *Di una formula comprensiva delle medie*, Metron 13 (1938), 3–22.
- [53] D. Głazowska, *An invariance of the geometric with respect to Lagrangian conditionally homogeneous mean-type mappings*, Demonstratio Math. 40 2(2007), 289–302.
- [54] D. Głazowska, *A solution of an open problem concerning Lagrangian mean-type mappings*, Cent. Eur. J. Math. 9 (2011), 1067–1073.
- [55] D. Głazowska, *Some Cauchy mean-type mappings for which the geometric mean is invariant*, J. Math. Anal. Appl. 375 (2011), 418–430.
- [56] D. Głazowska, J. Jarczyk, W. Jarczyk, *Embeddability of pairs of weighted quasi-arithmetic means into a semiflow*, maszynopis.
- [57] D. Głazowska, W. Jarczyk, J. Matkowski, *Arithmetic mean as a linear combination of two quasi-arithmetic means*, Publ. Math. Debrecen 61 (2002), 455–467.
- [58] D. Głazowska, J. Matkowski, *An invariance of the geometric mean with respect to Lagrangian means*, J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), 1187–1199.
- [59] G. Hajdu, *An extension theorem for Matkowski-Sutô for conjugate arithmetic means*, Adv. Math. (Dordr.), vol. 3, (Z. Daróczy, Zs. Páles, eds.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, 201–208.
- [60] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934 (1st edn), 1952 (2nd edn).
- [61] A. Járαι, *Regularity properties of functional equations in several variables*. Advances in Mathematics 8, Springer, New York, 2005.
- [P5] Justyna Jarczyk, *When Lagrangean and quasi-arithmetic means coincide*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 8 (2007), Art. 71.
- [P4] J. Jarczyk, *Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators*, Publ. Math. Debrecen 71 (2007), 279–294.
- [P6] Justyna Jarczyk, *Invariance of quasi-arithmetic means with function weights*, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009), 134–140;
- [P8] J. Jarczyk, *Invariance in a class of Bajraktarević means*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 2608–2619.
- [P3] Justyna Jarczyk and Witold Jarczyk, *On a problem of N. Brillouët-Belluot*, Aequationes Math. 72 (2006), 198–200.
- [P13] J. Jarczyk, W. Jarczyk, *Invariance of means*, Aequationes Math. 92 (2018) 801–872.
- [P2] J. Jarczyk, J. Matkowski, *Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Polon. Math. 88 (2006), 39–51.

- [P11] J. Jarczyk, J. Matkowski, *Uniform convexity of paranormed generalizations of  $L^p$  spaces*, J. Convex Anal. 22 (2015), 117–144.
- [70] W. Jarczyk, J. Matkowski, *Embeddability of mean-type mappings in a continuous iteration semigroup*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 2580–2591.
- [71] H. Jecklin, *Quasiarithmetische Mittelwerte I*, Elem. Math. 4 (1949), 112–115; *II*, ibid. 128–133.
- [72] H. Jecklin, *La notion de moyenne*, Metron 15 (1949), 3–11.
- [73] P. Kahlig, J. Matkowski, *On the composition of homogeneous quasi-arithmetic means*, J. Math. Anal. Appl. 216 (1997), 69–85.
- [74] P. Kahlig, J. Matkowski, *Invariant means related to classical weighted means*, Publ. Math. Debrecen 216 (2016), 373–387.
- [75] B. Knaster, *Sur une équivalence pour les fonctions*, Colloquium Math. 2 (1949), 1–4.
- [76] K. Knopp, *Über Reihen mit positiven Gliedern*, J. London Math. Soc. 3 (1928), 205–211.
- [77] A. Kolmogoroff, *Sur la notion de la moyenne*, Rend. Accad. Lincei 6 (1930) 388–391.
- [78] M. Kuczma, *On the functional equation  $\varphi^n(x) = g(x)$* , Ann. Polon. Math. 11 (1961), 161–175.
- [79] J.L. Lagrange, *Sur une nouvelle Méthode de Calcul Intégrale pour différentielles affectées d'un radical carre*, Mem. Acad. R. Sci. Turin II, 2 (1784–1785) 252–312.
- [80] D.H. Lehmer, *On the compounding of certain means*, J. Math. Anal. Appl. 36 (1971) 183–200.
- [P7] Lin Li, Justyna Jarczyk, Witold Jarczyk and Weinian Zhang, *Iterative roots of mappings with a unique set-value point*, Publ. Math. Debrecen 75 (2009), 203–220;
- [82] L. Losonczy, *Equality of two variable weighted means: reduction to differential equations*, Aequationes Math. 58 (1999), 223–241.
- [83] Gy. Maksa, Zs. Páles, *Remarks on the comparison of weighted quasi-arithmetic means*, Colloq. Math. 120 (2010), 77–84.
- [84] J. Matkowski, *Complementary quasi-arithmetic means*, in: Leaflets in Mathematics, Proc. Numbers, Functions, Equations '98 Internat. Conf. Noszvaj (Hungary), Pecs, 1998, 123–124.
- [85] J. Matkowski, *Invariant and complementary quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. 57 (1999), 87–107.
- [86] J. Matkowski, *Mean value property and associated functional equations*, Aequationes Math. 58 (1999), 46–59.
- [87] J. Matkowski, *Iterations of mean-type mappings and invariant means*, European Conference on Iteration Theory (Muszyna-Złockie, 1998), Ann. Math. Sil. 13 (1999) 211–226.
- [88] J. Matkowski, *On iteration semigroups of mean-type mappings and invariant means*, Aequationes Math. 64 (2002), s. 297–303.
- [89] J. Matkowski, *Remark 1* (at the Second Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Hajdúszoboszlo, 2002), Ann. Math. Silesianae 16 (2003), 93.
- [90] J. Matkowski, *Solution of a regularity problem in equality of Cauchy means*, Publ. Math. Debrecen 64 (2004), 391–400.
- [91] J. Matkowski, *Lagrangian mean-type mappings for which the arithmetic mean is invariant*, J. Math. Anal. Appl. 309 (2005), 15–24.

- [92] J. Matkowski, *Iterations of the mean-type mappings*, In: Iteration theory (ECIT'08), A. N. Sharkovsky, I. M. Susko (eds.), Grazer Math. Ber., Bericht Nr., 354 (2009), 158–179.
- [93] J. Matkowski, *Generalized weighted quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. 79 (2010), 203–212.
- [94] J. Matkowski, *Invariance of the Cauchy means with respect to Lagrange mean-type mappings of the same generators*, Acta Math. Hungar. 132 (2011), 92–106.
- [95] J. Matkowski, *Generalized weighted arithmetic means*, Functional Equations in Mathematical Analysis (Th. Rassias, J. Brzdęk, eds.), Springer, New York, 2012, 563–582.
- [96] J. Matkowski, *Invariance of Bajraktarević mean with respect to quasi-arithmetic means*, Publ. Math. Debrecen 80 (2012), 441–455.
- [97] J. Matkowski, *Iterations of the mean-type mappings and uniqueness of invariant means*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 41 (2013), 145–158.
- [98] J. Matkowski, *Generalized weighted quasi-arithmetic means and the Kolmogorov-Nagumo theorem*, Colloq. Math. 133 (2013), 35–49.
- [99] J. Matkowski, *Invariance identity in the class of generalized quasi-arithmetic means*, Colloq. Math. 137 (2014), 221–228.
- [100] J. Matkowski, Zs. Páles, *Characterization of generalized quasi-arithmetic means*, Acta Sci. Math. (Szeged) 81 (2015), 447–456.
- [101] J. Matkowski, P. Pasteczka, *Invariant means and iterates of means-type mappings*, arXiv: 1901.02247
- [102] J. Matkowski, P. Volkmann, *A functional equation with two unknown functions*, <http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv>, Seminar LV 30, 6 pp., 28.04.2008.
- [103] J. Mikusiński, *Sur les moyennes de la forme  $\psi|_{\sum q\psi(x)}$* , Studia Math. 10 (1948), 90–96.
- [104] Mitio Nagumo, *Über eine Klasse der Mittelwerte*, Jpn. J. Math. 7 (1930), 71–79.
- [105] Zs. Páles, *On the characterization of quasi-arithmetic means with weight function*, Aequationes Math. 32 (1987), 171–194.
- [106] Zs. Páles, P. Pasteczka, *Characterization of the Hardy property of means and the best Hardy constants*, Math. Inequal. Appl. 19 (2016), 1141–1152.
- [107] Zs. Páles, P. Pasteczka, *On Kedlaya-type inequalities for weighted means*, J. Inequal. Appl. 2018, 99, 22pp.
- [108] Zs. Páles, P. Pasteczka, *On the best Hardy constant for quasi-arithmetic means and homogeneous deviation means*, Math. Inequal. Appl. 21 (2018), 585–599.
- [109] Zs. Páles, P. Pasteczka, *On the homogenization of means* (maszynopis), arXiv preprint arXiv:1811.09879, 2018-arXiv.org
- [110] Zs. Páles, A. Zakaria, *On the invariance equation for two-variable weighted nonsymmetric Bajraktarević means* (submitted).
- [111] P. Pasteczka, *Scale of quasi-arithmetic means determined by an invariance property*, J. Difference Equ. Appl. 21 (2015), 1321–1327.
- [112] P. Pasteczka, *A new estimate of the difference among quasi-arithmetic means*, Math. Inequal. Appl. 18 (2015), 1321–1327.

- [113] P. Pasteczka, *Limit properties in a family of quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. 90 (2016), 773–785.
- [114] P. Pasteczka, *Iterated quasi-arithmetic mean-type mappings*, Colloq. Math. 144 (2016), 215–228.
- [115] P. Pasteczka, *On the quasi-arithmetic Gauss-type iteration*, Aequationes Math. 92 (2018), 1119–1128.
- [116] C. Ryll-Nardzewski, *Sur les moyennes*, Studia Math. 11 (1949), 31–37.
- [117] I.J. Schoenberg, *Mathematical Time Exposures*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1982.
- [118] Onosaburô Sutô, *Studies on some functional equations I*, Tôhoku Math. J. 6 (1914), 1–15.
- [119] Onosaburô Sutô, *Studies on some functional equations II*, Tôhoku Math. J. 6 (1914), 82–101.
- [120] K.B. Stolarsky, *Generalizations of the logarithmic mean*, Math. Magazine 48 (1975), 87–92.
- [121] Gh. Toader, I. Costin, S. Toader, *Invariance in some families of means*, Functional equations in mathematical analysis, 709–717, Springer Optim. Appl., 52, Springer, New York, 2012.

Justyna Jaraszyńska