AUTOREFERAT

Mirosław Ślosarski

TEORIA MULTIDOMINACJI I DOMINACJI RELATYWNEJ

SPIS TREŚCI

1. Informacja o autorze

Imię i nazwisko: Mirosław Ślosarski

Dyplomy i stopnie naukowe:

Doktor nauk matematycznych
rozprawa: Pewne zastosowania topologicznej istotności i charakteryzacji zbioru punktów stałych do inkluzji różniczkowych.
promotor: Prof.dr hab. Lech Górniewicz
recenzenci: Prof.dr hab. Kazimierz Goebel, UMCS Lublin, Prof.dr hab. Stanisław Szufla, UAM Poznań, 1994.

Magister matematyki

Wyższa Szkoła Pedagogiczna (obecnie, Akademia Pomorska), Słupsk, 1984. Studia magisterskie z matematyki, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy WSP, Słupsk, 1980-1984.

Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

Zakład Analizy Matematycznej i Topologii WSP, Słupsk, adiunkt od 1 października 1997 do 30 września 1999,

Katedra Podstaw Elektroniki Politechniki Koszalińskiej, adiunkt od 1 kwietnia 2000 do 30 marca 2013,

Katedra Podstaw Elektroniki Politechniki Koszalińskiej, asystent z doktoratem od 1 kwietnia 2013 do 30 czerwca 2015,

Katedra Elektroniki Politechniki Koszalińskiej, asystent z doktoratem od 1 lipca 2015 do 30 czerwca 2016 w wymiarze pół etatu.

2. CYKL PUBLIKACJI HABILITACYJNYCH POWIĄZANYCH TEMATYCZNIE

[1] R. Skiba, M. Ślosarski, On a generalization of absolute neighborhood retracts, Topology Appl. **156** (2009), 697-709.

[2] M. Ślosarski, The Fixed Points of Abstract Morphisms, British Journal of Mathematics and Computer Science **4**(21) (2014), 3077-3089.

[3] M. Ślosarski, A generalized Vietoris mapping, British Journal of Mathematics and Computer Science **8**(2) (2015), 89-100.

[4] M. Ślosarski, Elementary extension of multi-valued mappings and its application Pioneer J. Math. Math. Sci. **7**(2) (2013), 191-205.

[5] M. Ślosarski, The multi-valued domination of metric spaces, Fixed Point Theory and Applications **2012**, 2012, 1-9.

[6] M. Ślosarski, The properties of the multi-valued domination of metric spaces, Topology Appl. **160** (2013), 730-738.

[7] M. Ślosarski, The multi-morphisms and their properties and applications, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. **14** (2015), 5-25.

[8] M. Ślosarski, Multidomination of metric spaces in the context of multimorphisms, Journal of Fixed Point Theory and Applications **17**(4) (2015), 641-657.

[9] M. Ślosarski, The single-valued character of some class of multi-valued admissible mappings, British Journal of Mathematics and Computer Science **4**(4) (2014), 453-459.

[10] M. Ślosarski, The generalized theorem on the elementary extension of homotopies, JP Journal of Geometry and Topology **15**(1) (2014), 1-16.

[11] M. Ślosarski, The properties and applications of relative retracts, Journal of Fixed Point Theory and its Applications (2016), DOI: 10.1007/s11784-016-0293-0.

[12] M. Ślosarski, On a generalization of approximative absolute neighborhood retracts, Fixed Point Theory **10**(2) (2009), 329-346.

[13] M. Ślosarski, Theory of Approximative Relative Retracts and Its Applications, British Journal of Mathematics and Computer Science **13**(3)(2016), 1-19.

[14] M. Ślosarski, Generalized Lefschetz Sets, Fixed Point Theory and Applications **2011**, 2011, 1-11.

[15] M. Ślosarski, Locally admissible multi-valued maps, Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization **31** (2011), 115-132.

3. PRELIMINARIA

W autoreferacie będziemy używać przestrzeni topologicznych Hausdorffa. Niech H_* będzie funktorem homologii Čecha o zwartych nośnikach i współczynnikach w ciele liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ z kategorii przestrzeni topologicznych Hausdorffa i odwzorowań ciągłych do kategorii przestrzeni liniowych z gradacją, stopnia zero. Niech $H_*(X) = \{H_k(X)\}$ będzie przestrzenią liniową z gradacją i niech $H_k(X)$ oznacza k-wymiarową grupę homologii Čecha o zwartych nośnikach zawartych w przestrzeni X. Dla odzworowania ciągłego $f : X \to Y$, $H_*(f)$ jest indukowanym odwzorowaniem liniowym $f_* = \{f_k\}$, gdzie $f_k : H_k(X) \to H_k(Y)$ ([6]). Przestrzeń X jest acykliczna, jeśli:

(i) X jest niepusty,

(ii) $H_k(X) = 0$ dla wszystkich $k \geq 1$ i

(iii) $H_0(X) \approx \mathbb{Q}$.

Niech $u : E \to E$ będzie endomorfizmem, gdzie E jest przestrzenią liniową. Kładziemy

$$N(u) = \{x \in E : u^n(x) = 0 \text{ dla pewnego } n\},$$

gdzie u^n jest n-tą iteracją złożenia u i $\widetilde{E} = E/N(u)$. Ponieważ $u(N(u)) \subset N(u)$, więc mamy indukowany endomorfizm $\widetilde{u} : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ dany wzorem $\widetilde{u}([x]) = [u(x)]$. Mówimy, że u jest dopuszczalne, jeżeli $dim\widetilde{E} < \infty$.

Niech $u = \{u_k\} : E \to E$ będzie endomorfizmem, stopnia zero, przestrzeni liniowej z gradacją $E = \{E_k\}$. Mówimy, że u jest endomorfizmem Leraya, jeśli

(i) dla każdego k, u_k jest dopuszczalne,
(ii) prawie wszystkie $\widetilde{E_k}$ są trywialne.

Dla takiego u, definiujemy uogólnioną liczbę Lefschetza $\Lambda(u)$ odwzorowania u wzorem

$$\Lambda(u) = \sum_k (-1)^k tr(\widetilde{u_k}),$$

gdzie $tr(\widetilde{u_k})$ jest śladem macierzy odwzorowania liniowego $\widetilde{u_k}$ (patrz, [6]).

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi i załóżmy, że dla każdego $x \in X$ dany jest niepusty i zwarty zbiór $\varphi(x)$ w przestrzeni Y. W takim przypadku, mówimy, że φ jest odwzorowaniem wielowartościowym. Odwzorowania wielowartościowe będziemy oznaczać najczęściej literami greckiego alfabetu: $\varphi, \psi, ...$, na przykład $\varphi : X \multimap Y$, natomiast odwzorowania jednowartościowe będziemy oznaczać literami polskiego alfabetu: $f, g, ...$, na przykład $f : X \to Y$. Dla odwzorowania wielowartościowego $\varphi : X \multimap Y$ i zbioru $A \subset Y$ oznaczmy:

$$\varphi^{-1}(A) = \{x \in X;\ \varphi(x) \subset A\},$$

$$\varphi_b^{-1}(A) = \{x \in X;\ \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Zbiór $\varphi^{-1}(A)$ będziemy nazywać małym przeciwobrazem, natomiast zbiór $\varphi_b^{-1}(A)$ dużym przeciwobrazem. Ciągłe i domknięte odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy właściwym, jeśli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset Y$, zbiór $f^{-1}(K)$ jest niepusty i zwarty. Odwzorowanie właściwe $p : X \to Y$ nazywamy odwzorowaniem Vietorisa, jeżeli dla każdego $y \in Y$, zbiór $p^{-1}(y)$ jest acykliczny. Odwzorowanie właściwe $p : X \to Y$ nazywamy odwzorowaniem cell-like, jeżeli dla każdego $y \in Y$, zbiór $p^{-1}(y)$ ma trywialny kształt w sensie Borsuka (patrz, [2]). Z ciągłości homologii Čecha wynika, że zwarty zbiór o trywialnym kształcie jest acykliczny. Wobec tego, jest jasne, że jeśli $p : X \to Y$ jest odwzorowaniem cell-like, to jest odwzorowaniem Vietorisa. Przypomnijmy, że złożenie dwóch odwzorowań Vietorisa jest odwzorowaniem Vietorisa i jeżeli $p : X \to Y$ jest odwzorowaniem Vietorisa, to $p_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ jest izomorfizmem (patrz, [6]). Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym. Jeżeli dla każdego zbioru otwartego $U \subset Y$, zbiór $\varphi^{-1}(U)$ jest otwarty, to φ nazywamy odwzorowaniem półciągłym z góry (piszemy, φ jest u.s.c). Parę (p, q) odwzorowań jednowartościowych, ciągłych nazywamy parą selektywną odwzorowania φ (piszemy, $(p, q) \subset \varphi$), jeśli istnieje przestrzeń metryzowalna Z taka, że spełnione są następujące warunki:

(i) $p : Z \to X$ jest odwzorowaniem Vietorisa,

(ii) $q(p^{-1}(x)) \subset \varphi(x)$ dla dowolnego $x \in X$, gdzie $q : Z \to Y$.

Odwzorowanie wielowartościowe $\varphi\colon X \multimap Y$ nazywamy dopuszczalnym, jeśli istnieje para selektywna (p, q) odwzorowania φ. Odwzorowanie wielowartościowe $\varphi\colon X \multimap Y$ nazywamy silnie dopuszczalnym (s-dopuszczalnym), jeżeli istnieje para selektywna (p, q) odwzorowania φ taka, że dla każdego $x \in X$ $q(p^{-1}(x)) = \varphi(x)$ (piszemy, $(p, q) = \varphi$). Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odwzorowaniem i niech $A \subset X$ będzie niepustym zbiorem. Symbolem $\varphi_A : A \multimap Y$ oznaczymy odwzorowanie dane wzorem $\varphi_A(x) = \varphi(x)$ dla każdego $x \in A$. Przestrzeń X jest przeliczalnie wymiarowa, jeśli

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \text{ gdzie } dim X_n < \infty \text{ dla każdego } n.$$

Przestrzeń metryzowalna X jest skończonego typu, jeśli prawie wszystkie homologie X są trywialne i dla każdego $k \geq 0$

$$dim H_k(X) < \infty.$$

4. WSTĘP

W literaturze matematycznej znanych jest wiele ważnych, przede wszystkim ze względu na zastosowania relacji w klasie przestrzeni metrycznych. Jedną z nich jest relacja dominacji, wprowadzona przez wybitnego matematyka Karola Borsuka. Produktem tej dominacji jest szeroka klasa zbiorów zwanych absolutnymi retraktami (AR) i absolutnymi otoczeniowymi retraktami (ANR). W 1967 roku ukazała się monografia Karola Borsuka, która szczegółowo opisuje własności i zastosowania dominacji przestrzeni metrycznych (patrz, [1]). Przypomnijmy, że przestrzeń metryzowalna X dominuje nad przestrzenią metryzowalną Y (piszemy, $X \geq Y$), jeżeli istnieją odwzorowania ciągłe

(1) $$Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$$

takie, że dla każdego $y \in Y$, $f(g(y)) = y$. Niech E będzie przestrzenią unormowaną. Wiemy, że jeżeli $E \geq X$, to $X \in AR$, natomiast jeśli $U \geq X$ dla pewnego zbioru otwartego $U \subset E$, to $X \in ANR$. Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym półciągłym z góry o obrazach zwartych, które mają trywialny kształt w sensie Borsuka (patrz, [2]). W 1983 roku A. Suszycki w pracy [24] wprowadził pojęcie absolutnego multiretraku ($m-AR$) i absolutnego otoczeniowego multiretraktu ($m-ANR$). W rzeczywistości zdefiniował pewien rodzaj dominacji wielowartościowej w klasie przestrzeni metrycznych zwartych, to znaczy przestrzeń zwarta X dominuje nad przestrzenią zwartą Y w sensie Suszyckiego (będziemy później pisać, $X \circ\geq Y$) jeżeli istnieją odwzorowania

(2) $$Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\varphi} Y,$$

takie, że $y \in \varphi(g(y))$, dla każdego $y \in Y$. Analogicznie (patrz, (1)), jeżeli $E \circ\geq X$, to $X \in (m-AR)$ i jeżeli $U \circ\geq X$ dla pewnego zbioru otwartego $U \subset E$, to $X \in (m-ANR)$. Warto nadmienić, że w przypadku skończenie wymiarowym absolutne multiretraky w sensie Suszyckiego ($m-AR$) pokrywają się z fundamentalnymi absolutnymi retraktami (FAR, patrz [2]), natomiast absolutne otoczeniowe multiretrakty ($m-ANR$) zawierają się w klasie fundamentalnych absolutnych otoczeniowych retraktów ($FANR$, patrz [2]). W pracy [24] jest przykład przestrzeni skończenie wymiarowej $X \in FANR$ i takiej, że $X \notin (m-ANR)$. Przypomnijmy, że odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \multimap Y$ nazywamy silnie dopuszczalnym, jeżeli istnieją odzworowanie Vietorisa $p : Z \to X$ i odwzorowanie ciągłe $q : Z \to Y$ takie, że $\varphi(x) = q(p^{-1}(x))$ dla każdego $x \in X$. Wiemy, że odwzorowanie wielowartościowe półciągłe z góry o obrazach zwartych i acyklicznych (w szczególności mających trywialny kształt) jest silnie dopuszczalne. Szczegóły dotyczące odwzorowań silnie dopuszczalnych można znaleźć w książce Profesora Lecha Górniewicza (twórcy odwzorowań dopuszczalnych i silnie dopuszczalnych, patrz, [6]). Praca A. Suszyckiego stała się inspiracją dla naszych badań. W rozdziale piątym wprowadzamy pojęcie multifunkcji (pewnej wersji odwzorowania silnie dopuszczalnego) opartej na klasie abstrakcji, którą nazwaliśmy multimorfizmem. Multifunkcje będziemy traktować jako podstawowe narzędzie do naszych badań. Ważną zaletą multifunkcji jest ich homotopia, która jest relacją równoważności oraz to, że każda multifunkcja $\varphi : X \to Y$ ma dokładnie jednego reprezentanta na poziomie homologii Čecha $\varphi_* : H_*(X) \to H_*(Y)$. W rozdziale szóstym w klasie przestrzeni metryzowalnych definiujemy relację multidominacji, zastępując na powyższym diagramie (patrz, (1)) funkcje f i g multifunkcjami

(3) $$Y \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} Y$$

i takimi, że:

(i) dla każdego $y \in Y$, $\psi(y) \subset \varphi_b^{-1}(y)$,
(ii) $\varphi_* \circ \psi_* = Id_{H_*(Y)}$,

gdzie $\varphi_b^{-1}(y)$ oznacza duży przeciwobraz zbioru jednoelementowego $\{y\}$ a odwzorowania

$$H_*(Y) \xrightarrow{\psi_*} H_*(X) \xrightarrow{\varphi_*} H_*(Y)$$

to homomorfizmy reprezentujące odpowiednio odwzorowania ψ i φ na poziomie homologii Čecha. Tak zdefiniowana relacja uogólnia oczywiście poprzednie relacje dominacji zarówno w sensie Borsuka (patrz, (1)) jak i w sensie Suszyckiego (patrz, (2)). Multidominację podzieliliśmy na lewostronną (piszemy, $X \circ \geq Y$)

(4) $$Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\varphi} Y,$$

gdzie po lewej stronie przy złożeniu $\varphi \circ g$ (patrz, (3)) występuje multifunkcja, a g jest ciągłą funkcją i prawostronną (piszemy, $X \geq \circ Y$)

(5) $$Y \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y,$$

gdzie po prawej stronie przy złożeniu $f \circ \varphi$ (patrz, (3)) występuje multifunkcja, a f jest ciągłą funkcją. Pewne własności multidominacji lewostronnej zostały zbadane przez A. Suszyckiego w pracy ([24]). W naszych badaniach zajęliśmy się głównie multidominacją prawostronną, przede wszystkim ze względu na jej liczne zastosowania. Produktem multidominacji prawostronnej jest klasa absolutnych multiretraktów (AMR) i absolutnych otoczeniowych multiretraktów ($ANMR$), które umownie będziemy nazywać multiretraktami prawostronnymi lub krótko multiretraktami. Podobnie (patrz, (1) i (2)) jeżeli $E \geq \circ X$, to $X \in AMR$ i jeżeli $U \geq \circ X$ dla pewnego zbioru otwartego $U \subset E$, to $X \in ANMR$. Podaliśmy wiele przykładów na to, że klasa AMR ($ANMR$) jest istotnie szersza niż klasa AR (ANR). Do badania multiretraktów użyliśmy wcześniej zdefiniowanych multifunkcji (użycie funkcji nie dałoby tych samych rezultatów) i wykazaliśmy że, ich własności (w kontekście multifunkcji) są podobne do własności retraktów w sensie Borsuka. W rozdziale siódmym wprowadziliśmy pojęcie relatywnego retraktu i zbadaliśmy jego własności. Wykazaliśmy, że w szczególnym przypadku, relatywne retrakty są multiretraktami. Dzięki temu uzyskaliśmy kilka nowych własności multiretraktów. Naszym zdaniem, relatywne retrakty są warte uwagi, zwłaszcza ze względu na ich zastosowania. W rozdziale ósmym przedstawiliśmy zastosowania relatywnych retraktów (w szczególności multiretraktów) do teorii punktów stałych, do teorii koincydencji, do charakteryzacji retraktów w przestrzeniach skończenie wymiarowych i do badania acykliczności zbiorów. Rozdział dziewiąty poświęciliśmy aproksymatywnym multiretraktom. W literaturze matematycznej znane są aproksymatywne absolutne retrakty (AAR) i aproksymatywne absolutne otoczeniowe retrakty ($AANR$). Aproksymatywne absolutne otoczeniowe retrakty można podzielić na dwa zbiory. Pierwszy zbiór, to aproksymatywne absolutne otoczeniowe retrakty w sensie Noguchi (będziemy pisać, $AANR_N$, patrz, [20]), które są skończonego typu, natomiast drugi zbiór, to aproksymatywne absolutne otoczeniowe retrakty w sensie Clappa (będziemy pisać, $AANR_C$, patrz, [3]), które mogą nie być skończonego typu. Oczywiście, wiemy że jeżeli przestrzeń metryczna $X \in AANR_N$, to $X \in AANR_C$. Dzięki relatywnemu ujęciu aproksymatywnych multiretraktów, mogliśmy je podzielić na dwa analogiczne zbiory o podobnych własnościach. Podaliśmy kilka przykładów, które potwierdzają, że klasa aproksymatywnych absolutnych otoczeniowych multiretraktów w sensie Noguchi jest istotnie szersza od klasy $AANR_N$, natomiast klasa aproksymatywnych absolutnych otoczeniowych multiretraktów w sensie Clappa jest istotnie szersza od klasy $AANR_C$. Podaliśmy, też kilka zastosowań aproksymatywnych multiretraktów do teorii punktów stałych, do teorii przedłużania odwzorowań wielowartościowych, do teorii aproksymatywnych selektorów odwzorowań wielowartościowych i do charakteryzacji aproksymatywnych retraktów w przestrzeniach skończenie wymiarowych. W rozdziale dziesiątym opisaliśmy klasę odwzorowań lokalnie dopuszczalnych. Pokazaliśmy, że jest klasą istotnie szerszą niż klasa odwzorowań dopuszczalnych. Do jej zbadania w kontekście punktów stałych użyliśmy metod homologicznych. Na początku każdego rozdziału umieściliśmy preliminaria, w których zawarliśmy definicje i fakty wykorzystane w tym rozdziale. W całym autoreferacie zastosowaliśmy trójliczbową numerację definicji i faktów (twierdzeń, propozycji, lematów). Pierwsza liczba oznacza numer rozdziału, druga numer paragrafu, natomiast trzecia liczba oznacza kolejny numer definicji lub faktu.

5. MULTIMORFIZMY

5.1. Preliminaria

Będziemy potrzebować następujące definicje i fakty. Symbolem $D(X,Y)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich diagramów postaci

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} Y,$$

gdzie $p : Z \to X$ jest odwzorowaniem Vietorisa i $q : Z \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym. Każdy taki diagram będziemy oznaczać (p,q).

Definicja 5.1.1. *(patrz, [6]) Niech $(p_1,q_1) \in D(X,Y)$ i $(p_2,q_2) \in D(Y,T)$. Złożeniem diagramów*

$$X \xleftarrow{p_1} Z_1 \xrightarrow{q_1} Y \xleftarrow{p_2} Z_2 \xrightarrow{q_2} T,$$

nazywamy diagram $(p,q) \in D(X,T)$

$$X \xleftarrow{p} Z_1 \triangle_{q_1 p_2} Z_2 \xrightarrow{q} T,$$

$$\text{gdzie } Z_1 \triangle_{q_1 p_2} Z_2 = \{(z_1,z_2) \in Z_1 \times Z_2 : \ q_1(z_1) = p_2(z_2)\},$$

$$p = p_1 \circ f_1, \ \ q = q_2 \circ f_2,$$

$$Z_1 \xleftarrow{f_1} Z_1 \triangle_{q_1 p_2} Z_2 \xrightarrow{f_2} Z_2,$$

$$f_1(z_1,z_2) = z_1 \text{ (odwzorowanie Vietorisa)}, \ \ f_2(z_1,z_2) = z_2 \ \text{ dla każdego } \ (z_1,z_2) \in Z.$$

Będziemy pisać

$$(p,q) = (p_2,q_2) \circ (p_1,q_1).$$

Z Twierdzeń ((40.5), (40.6)) ([6], p. 201, 202) wynika również, że w Definicji 5.1.1 złożenie diagramów spełnia warunek:

$$\text{dla każdego } \ x \in X \ \ q(p^{-1}(x)) = q_2(p_2^{-1}(q_1(p_1^{-1}(x)))). \tag{5.1}$$

Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi. Mówimy, że odwzorowanie ciągłe $f : X \to Y$ jest uniwersalne, jeżeli każde odwzorowanie ciągłe $g : X \to Y$ ma z odwzorowaniem f punkt koincydencji, to znaczy istnieje punkt $x \in X$ taki, że $f(x) = g(x)$. Odzworowanie ciągłe $f : X \to Y$ nazywamy zwartym, jeżeli zbiór $\overline{f(X)} \subset Y$ jest zwarty.

Twierdzenie 5.1.2. *[6] Rozważmy diagram:*

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} X,$$

w którym $X \in ANR$, p jest odwzorowaniem Vietorisa i q jest zwarte. Wtedy $q_* \circ p_*^{-1}$ jest endomorfizmem Leraya i $\Lambda(q_* \circ p_*^{-1}) \neq 0$ implikuje, że p i q mają punkt koincydencji.

Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych i niech $[0,1]$ będzie przedziałem. Niech

$$[0,1]^n = [0,1] \times [0,1] \times ... \times [0,1] \ (n - razy \ [0,1]).$$

Twierdzenie 5.1.3. *(patrz [10, 11]) Niech X będzie spójną i metryzowalną przestrzenią. Jeśli istnieje odwzorowanie uniwersalne $f : X \to [0,1]^n$, to $dim X \geq n$.*

5.2. Abstrakcyjne morfizmy

W literaturze matematycznej znane są morfizmy, jako klasy abstrakcji pewnej relacji równoważności w zbiorze $D(X,Y)$ (patrz, [6, 7, 16]). Podamy warunki (aksjomaty), jakie musi spełniać relacja równoważności w zbiorze $D(X,Y)$, aby była konstruktorem morfizmów to znaczy, aby jej klasy abstrakcji były morfizmami. Abstrakcyjne morfizmy zostały opisane w pracy [27].

Definicja 5.2.1. *Niech $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in D(X,Y)$. Relację równoważności w zbiorze $D(X,Y)$ nazywamy konstruktorem morfizmów (piszemy, $\sim_a$), jeżeli spełnione są następujące warunki:*

5.2.1.1 $((p_1,q_1) \sim_a (p_2,q_2)) \Rightarrow (\textit{dla każdego } x \in X \;\; q_1(p_1^{-1}(x)) = q_2(p_2^{-1}(x)))$,
5.2.1.2 $((p_1,q_1) \sim_a (p_2,q_2)) \Rightarrow (q_{1*} \circ p_{1*}^{-1} = q_{2*} \circ p_{2*}^{-1})$,
5.2.1.3 Niech $(p_3,q_3),(p_4,q_4) \in D(Y,T)$. *Wtedy*

$$((p_1,q_1) \sim_a (p_2,q_2) \text{ i } (p_3,q_3) \sim_a (p_4,q_4)) \Rightarrow (((p_3,q_3)\circ(p_1,q_1)) \sim_a ((p_4,q_4)\circ(p_2,q_2))).$$

Warunek (5.2.1.1) będziemy nazywać aksjomatem topologicznej równości, warunek (5.2.1.2) - aksjomatem homologicznej równości i warunek (5.2.1.3)- aksjomatem złożenia.

Elementy zbioru $M_a(X,Y) = D(X,Y)_{/\sim_a}$ będziemy nazywać abstrakcyjnymi morfizmami (a-morfizmami). Dzięki Definicji 5.2.1 (warunek 5.2.1.1) mamy następującą definicję:

Definicja 5.2.2. *Niech $(p,q) \in D(X,Y)$. Dla dowolnego $\varphi_a \in M_a(X,Y)$ zbiór $\varphi(x) = q(p^{-1}(x))$, gdzie $\varphi_a = [(p,q)]_a$ nazywamy obrazem punktu x a-morfizmu φ_a.*

Symbolem

$$\varphi : X \to_a Y \tag{5.2}$$

oznaczymy odwzorowanie wielowartościowe wyznaczone przez a-morfizm $\varphi_a = [(p,q)]_a \in M_a(X,Y)$, które będziemy nazywać abstrakcyjnym odwzorowaniem wielowartościowym.

Odzworowanie $\varphi : X \multimap Y$ nazywamy silnie dopuszczalnym (patrz, [6]) jeśli istnieje diagram $(p,q) \in D(X,Y)$ taki, że dla każdego $x \in X$

$$q(p^{-1}(x)) = \varphi(x). \tag{5.3}$$

Takie odwzorowanie może być reprezentowane przez wiele a-morfizmów. Niech $\mathbb{S}^n$ oznacza n-wymiarową sferę w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n+1}$.

Przykład 5.2.3. *Niech $\varphi : \mathbb{S}^n \multimap \mathbb{S}^n$ będzie odzworowaniem silnie dopuszczalnym opisanym w przykładzie (40.7) ([6], p. 202). Wtedy istnieje $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in D(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n)$ takie, że dla każdego $x \in \mathbb{S}^n$*

$$q_1(p_1^{-1}(x)) = q_2(p_2^{-1}(x)) = \varphi(x), \textit{ ale } \; q_{1*} \circ p_{1*}^{-1} \neq q_{2*} \circ p_{2*}^{-1}.$$

Stąd i z Definicji 5.2.1 wynika, że

$$(p_1,q_1) \nsim_a (p_2,q_2).$$

Dla odwzorowań jednowartościowych mamy następujący fakt:

Propozycja 5.2.4. *([27]) Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym i niech $f_a \in M_a(X,Y)$ będzie a-morfizmem takim, że dla dowolnego $(p,q) \in f_a$, $q(p^{-1}(x)) = f(x)$ dla każdego $x \in X$. Wtedy $q = f \circ p$ dla każdego $(p,q) \in f_a$.*

Niech **TOP** oznacza kategorię przestrzeni topologicznych Hausdorffa, w której odwzorowaniami są funkcje ciągłe. Niech $\mathbf{TOP_a}$ oznacza kategorię przestrzeni topologicznych Hausdorffa, w której odwzorowaniami są abstrakcyjne odwzorowania wielowartościowe (patrz, (5.2)). Dzięki Definicji 5.2.1 (5.2.1.3), kategoria $\mathbf{TOP_a}$ jest poprawnie zdefiniowana i $\mathbf{TOP} \subset \mathbf{TOP_a}$. Niech $\mathbf{VECT_G}$ oznacza kategorię przestrzeni liniowych z gradacją, w której odwzorowaniami są odwzorowania liniowe stopnia zero.

Twierdzenie 5.2.5. *([27])*
Odzworowanie $\widetilde{\mathbf{H}_*} : \mathbf{TOP_a} \to \mathbf{VECT_G}$ dane wzorem

$$\widetilde{\mathbf{H}_*}(\varphi) = q_* \circ p_*^{-1},$$

gdzie φ jest abstrakcyjnym odwzorowaniem wielowartościowym wyznaczonym przez $\varphi_a = [(p,q)]_a$ jest funktorem i jest przedłużeniem funktora homologii Čecha

$$\mathbf{H}_* : \mathbf{TOP} \to \mathbf{VECT_G}.$$

5.3. Multimorfizmy

Wprowadzimy pojęcie morfizmu (patrz, [32]) i wykażemy, że jest istotnie różny od morfizmów, które znane są w literaturze matematycznej. Zdefiniowane morfizmy będziemy nazywać multimorfizmami i wykorzystamy do badania multiretraktów. Przypomnijmy, że złożenie dwóch odwzorowań Vietorisa jest odwzorowaniem Vietorisa. Niech $Id_X : X \to X$ będzie odwzorowaniem identycznościowym. W zbiorze diagramów $D(X,Y)$, wprowadzimy następującą relację:

Definicja 5.3.1. *Niech $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in D(X,Y)$.*

$$(p_1,q_1) \sim_m (p_2,q_2)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją przestrzenie Z, Z_1 i Z_2, odwzorowania Vietorisa $p_3 : Z \to Z_1, p_4 : Z \to Z_2$ takie, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
X & Z_1 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "q_1"] & Y \\
X \arrow[u, "Id_X"] \arrow[d, "Id_X"'] & Z \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] \arrow[u, "p_3"] \arrow[d, "p_4"'] & Y \arrow[u, "Id_Y"] \arrow[d, "Id_Y"'] \\
X & Z_2 \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, "q_2"] & Y,
\end{tikzcd}$$

to jest

$$p = p_1 \circ p_3 = p_2 \circ p_4, \;\; q = q_1 \circ p_3 = q_2 \circ p_4.$$

Propozycja 5.3.2. *([32]) Relacja w zbiorze $D(X,Y)$ wprowadzona w Definicji* 5.3.1 *jest relacją równoważności.*

Propozycja 5.3.3. *([32]) Relacja równoważności $\sim_m$ jest konstruktorem morfizmów (patrz, Definicja 5.2.1) w zbiorze $D(X,Y)$.*

Zbiór klas abstrakcji powyższej relacji będziemy oznaczać symbolem

$$M_m(X,Y) = D(X,Y)_{/\sim_m}.$$

Elementy zbioru $M_m(X,Y)$ nazywamy multimorfizmami i oznaczamy: $\varphi_m, \psi_m, ...$ Wprowadzimy pewne oznaczenia:

$$\varphi_m = [(p,q)]_m \,(\text{piszemy } \ (p,q) \in \varphi_m),$$

gdzie diagram (p,q) jest reprezentantem klasy abstrakcji $[(p,q)]_m$ w relacji $\sim_m$.
Zauważmy, że jeśli dwa diagramy $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in D(X,Y)$ są w relacji w sensie Kryszewskiego (patrz, [16]), to

$$(p_1,q_1) \sim_m (p_2,q_2).$$

Podamy przykład, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych i niech $[0,1] \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem.

Przykład 5.3.4. *Niech $\psi : [0,1] \multimap [0,1]$ będzie odwzorowaniem danym wzorem:*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{dla} \;\; x < \frac{1}{2}, \\ [0,1] & \textit{dla} \;\; x = \frac{1}{2}, \\ 1 & \textit{dla} \;\; x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Odzworowanie ψ jest u.s.c. i ma zwarte i wypukłe obrazy. Odnotujmy, że ψ nie ma ciągłego selektora, to znaczy, nie istnieje ciągłe odwzorowanie $f : [0,1] \to [0,1]$ takie, że dla dowolnego $x \in [0,1]$ $f(x) \in \psi(x)$. Niech $\Gamma_\psi = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]; y \in \psi(x)\}$. Wtedy zbiór Γ_ψ jest homeomorficzny ze zbiorem $[0,1]$. Mamy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} & \Gamma_\psi \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "p"] & {[0,1]} \\
{[0,1]} \arrow[u, "Id_{[0,1]}"'] \arrow[d, "Id_{[0,1]}"] & \Gamma_\psi \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "p"] \arrow[u, "Id_{\Gamma_\psi}"'] \arrow[d, "p"] & {[0,1]} \arrow[u, "Id_{[0,1]}"'] \arrow[d, "Id_{[0,1]}"] \\
{[0,1]} & {[0,1]} \arrow[l, "Id_{[0,1]}"'] \arrow[r, "Id_{[0,1]}"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

gdzie $p(x,y) = x$ (odwzorowanie Vietorisa) dla każdego $(x,y) \in \Gamma_\psi$. Zauważmy, że

$$(p,p) \sim_m (Id_{[0,1]}, Id_{[0,1]}),$$

ale diagramy $(p,p),(Id_{[0,1]}, Id_{[0,1]}) \in D([0,1],[0,1])$ nie są w relacji ani w sensie Kryszewskiego, ani w sensie Górniewicza (patrz, [7]). Załóżmy przeciwnie, że istnieje odwzorowanie ciągłe (niekoniecznie homeomorfizm) $h : [0,1] \to \Gamma_\psi$ takie, że $p \circ h = Id$. Wtedy dla wszystkich $x \in [0,1]$ $h(x) \in p^{-1}(x)$. Niech $q : \Gamma_\psi \to [0,1]$ będzie dane wzorem $q(x,y) = y$ dla dowolnego $(x,y) \in \Gamma_\psi$. W konsekwencji odwzorowanie $f : [0,1] \to [0,1]$ dane wzorem $f = q \circ h$ byłoby ciągłym selektorem ψ, ale to jest niemożliwe.

Dla odwzorowań jednowartościowych mamy następujący fakt:

Propozycja 5.3.5. *([32]) Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem i niech $(p, q) \in D(X, Y)$, gdzie*

$$X \xleftarrow{\ p\ } Z \xrightarrow{\ q\ } Y.$$

Wtedy następujące warunki są równoważne:

5.3.5.1 $q = f \circ p$,
5.3.5.2 $(p, q) \sim_m (Id, f)$,
5.3.5.3 $q(p^{-1}(x)) = f(x)$ *dla każdego* $x \in X$.

Z ostatniego faktu wynika, że multimorfizmy jednowartościowe w sposób naturalny pokrywają się z funkcjami ciągłymi.

4.4 Homotopia multimorfizmów

Bardzo ważną zaletą multimorfizmów jest ich homotopia (patrz, [32]), która jest relacją równoważności. Zdefiniujemy homotopie diagramów w zbiorze $D(X, Y)$ i udowodnimy, że jest relacją równoważności. Homotopię funkcji ciągłych $f, g : X \to Y$ będziemy oznaczać symbolem

$$f \sim g.$$

Na początek podamy następujący potrzebny fakt:

Propozycja 5.4.1. *([32]) Niech $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in D(X, Y)$, gdzie*

$$X \xleftarrow{\ p_1\ } Z_1 \xrightarrow{\ q_1\ } Y, \qquad X \xleftarrow{\ p_2\ } Z_2 \xrightarrow{\ q_2\ } Y.$$

Wtedy istnieje $(p, q), (p, q') \in D(X, Y)$ takie, że:

$$(p_1, q_1) \sim_m (p, q) \ \text{ and } \ (p_2, q_2) \sim_m (p, q').$$

Z ostatniego faktu wynika, że każde dwa różne multimorfizmy mają wspólne odwzorowanie Vietorisa. Oznacza to, że tylko ciągłe odwzorowania q_1, q_2 decydują o tym, że multimorfizmy $[(p_1, q_1)]_m = \varphi_m$ i $[(p_2, q_2)]_m = \psi_m$ mogą być różne. Korzystając z Propozycji 5.4.1 wprowadzimy definicję homotopii diagramów.

Definicja 5.4.2. *Niech $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in D(X, Y)$, gdzie*

$$X \xleftarrow{\ p_1\ } Z_1 \xrightarrow{\ q_1\ } Y, \qquad X \xleftarrow{\ p_2\ } Z_2 \xrightarrow{\ q_2\ } Y.$$

Mówimy, że diagramy (p_1, q_1) i (p_2, q_2) są homotopijne, co oznaczamy

$$(p_1, q_1) \sim_{HD} (p_2, q_2)$$

jeśli istnieje przestrzeń Z i odwzorowania Vietorisa $p_3 : Z \to Z_1$ i $p_4 : Z \to Z_2$ takie, że są spełnione następujące warunki:
5.4.2.1 $p_1 \circ p_3 = p_2 \circ p_4$
5.4.2.2 $q_1 \circ p_3 \sim q_2 \circ p_4$ *to jest, odwzorowania $q_1 \circ p_3, q_2 \circ p_4 : Z \to Y$ są homotopijne.*

Propozycja 5.4.3. *([32]) Relacja homotopii wprowadzona w Definicji 5.4.2 jest relacją równoważności w zbiorze diagramów $D(X,Y)$.*

Następujący prosty fakt nie wymaga dowodu.

Propozycja 5.4.4. *Niech $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in D(X,Y)$ i niech $(p_1,q_1) \sim_m (p_2,q_2)$, wtedy $(p_1,q_1) \sim_{HD} (p_2,q_2)$.*

Propozycja 5.4.5. *([32]) Niech $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in D(X,Y)$, gdzie*

$$X \xleftarrow{p_1} Z_1 \xrightarrow{q_1} Y, \quad X \xleftarrow{p_2} Z_2 \xrightarrow{q_2} Y.$$

Jeśli $(p_1,q_1) \sim_{HD} (p_2,q_2)$ wtedy $q_{1*} \circ p_{1*}^{-1} = q_{2*} \circ p_{2*}^{-1}$, gdzie

$$H_*(X) \xleftarrow{p_{1*}} H_*(Z_1) \xrightarrow{q_{1*}} H_*(Y), \quad H_*(X) \xleftarrow{p_{2*}} H_*(Z_2) \xrightarrow{q_{2*}} H_*(Y).$$

Teraz, korzystając z Propozycji 5.4.3 i 5.4.4, możemy zdefiniować homotopię multimorfizmów.

Definicja 5.4.6. *Niech $\varphi_m, \psi_m \in M_m(X,Y)$ będą multimorfizmami. Mówimy, że multimorfizmy φ_m i ψ_m są homotopijne (piszemy, $\varphi_m \sim_{HM} \psi_m$) jeśli istnieją diagramy $(p_1,q_1) \in \varphi_m$ i $(p_2,q_2) \in \psi_m$ takie, że $(p_1,q_1) \sim_{HD} (p_2,q_2)$.*

Propozycja 5.4.7. *([32]) Relacja homotopii wprowadzona w Definicji 5.4.6 jest relacją równoważności w zbiorze multimorfizmów $M_m(X,Y)$.*

Z Propozycji 5.4.3 i 5.4.4 wynika fakt, że, jeśli $\varphi_m \sim_{HM} \psi_m$, gdzie $\varphi_m, \psi_m \in M_m(X,Y)$ są multimorfizmami, to dla każdego $(p_1,q_1) \in \varphi_m$ i $(p_2,q_2) \in \psi_m$

$$(p_1,q_1) \sim_{HD} (p_2,q_2). \tag{5.4}$$

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą. Symbolem $f_m \in M_m(X,Y)$ oznaczamy multimorfizm taki, że dla wszystkich $(p,q) \in f_m$ i dla każdego $x \in X$

$$q(p^{-1}(x)) = f(x).$$

Propozycja 5.4.8. *([32]) Niech $f,g : X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli $f \sim g$, to*

$$f_m \sim_{HM} g_m.$$

Propozycja 5.4.9. *([32]) Niech $f,g : X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi. $f_m \sim_{HM} g_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń Z i odwzorowanie Vietorisa $p : Z \to X$ takie, że*

$$f \circ p \sim g \circ p.$$

5.5 Uogólnione odwzorowania Vietorisa

Wprowadzimy pojęcie uogólnionego odwzorowania Vietorisa i podamy kilka jego własności, które wykorzystamy do naszych badań. Szczegóły można znaleźć w pracy [28]. W tym paragrafie, odwzorowania wyznaczone przez multimorfizmy $\varphi_m \in M_m(X,Y)$ będziemy oznaczać $\varphi : X \to_m Y$ i nazywać multifunkcjami, natomiast dla funkcji rezerwujemy litery $f, g, h, ...$.

Definicja 5.5.1. *Multifunkcję* $\varphi : X \to_m Y$ *nazywamy uogólnionym odwzorowaniem Vietorisa* ($\varphi \in GV$) *jeśli istnieje przestrzeń* Z *i odwzorowania Vietorisa* $p_1 : Z \to X$ *i* $p_2 : Z \to Y$ *takie, że* $(p_1, p_2) \in \varphi_m$.

Definicja 5.5.2. *Niech* $\varphi : X \to_m Y$, $\varphi \in GV$. *Uogólnione odwzorowanie Vietorisa* $\psi : Y \to_m X$ *nazywamy odwzorowaniem odwrotnym do odwzorowania* φ *jeżeli istnieje* $(p_1, p_2) \in \varphi_m$ *takie, że* $(p_2, p_1) \in \psi_m$. *Odwzorowanie odwrotne do odwzorowania* φ *będziemy oznaczać symbolem* $\overleftarrow{\varphi}$.

Podamy przykład, który pokazuje, że klasa uogólnionych odwzorowań Vietorisa jest istotnie szersza niż klasa odwzorowań Vietorisa.

Przykład 5.5.3. *Niech*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = sin(1/x),\ x \in (0, 1]\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Wiemy, (patrz, [5, 6]) że X *jest zwarta, spójna i ma trywialny kształt (w szczególności jest acykliczna). Wiemy również, że* X *nie jest łukowo spójna. Niech*

$$Y = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1].$$

Nie istnieje odwzorowanie Vietorisa z przestrzeni X *na przestrzeń* Y. *Przypuśćmy, przeciwnie, że* $p : X \to Y$ *jest odwzorowaniem Vietorisa. Wtedy, z Twierdzenia 5.1.2,* p *jest odwzorowaniem uniwersalnym. Z kolei z Twierdzenia 5.1.3 wynika, że* $dimX \geq 3$, *ale to jest niemożliwe, ponieważ* $dimX \leq 2$. *Nie istnieje odwzorowanie Vietorisa z przestrzeni* Y *na przestrzeń* X. *Rzeczywiście, jeśli* $p : Y \to X$ *jest odwzorowaniem Vietorisa, wtedy* X *musi być łukowo spójna, ale to jest sprzeczność. Niech*

$$Z = X \times Y.$$

Definiujemy odwzorowania Vietorisa $p_1 : Z \to X$ *i* $p_2 : Z \to Y$ *za pomocą wzorów:*

$$p_1(x, y) = x,\ \ p_2(x, y) = y \ \text{ dla wszystkich } (x, y) \in Z. \tag{5.5}$$

Wtedy $\varphi : X \to_m Y$ *wyznaczona przez* $\varphi_m = [(p_1, p_2)]_m$ *jest uogólnionym odwzorowaniem Vietorisa.*

Z ostatniego przykładu (patrz, (5.5)) wynika, że jeżeli zwarte przestrzenie X i Y są acykliczne, to istnieje multifunkcja $\varphi : X \multimap Y$ taka, że $\varphi \in GV$. Niech $\varphi : X \to_m Y$, $\varphi \in GV$, wtedy $\varphi_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ jest izomorfizmem danym wzorem

$$\varphi_* = p_{2*} \circ p_{1*}^{-1}.$$

Podamy kilka potrzebnych własności odwzorowań typu GV. Przypomnijmy, że złożenie dwóch odwzorowań Vietorisa jest odwzorowaniem Vietorisa (patrz, [6]). Niech $p : X \to Y$ będzie odwzorowaniem Vietorisa. Symbolem $\varphi_p : Y \multimap X$ będziemy oznaczać odwzorowanie dane wzorem:

$$\varphi_p(y) = p^{-1}(y) \ \text{ dla każdego } y \in Y. \tag{5.6}$$

Propozycja 5.5.4. *([28]) Niech* $\varphi : X \to_m Y$, $\psi : Y \to_m T$, $\varphi, \psi \in GV$.
5.5.4.1 $(\psi \circ \varphi) \in GV$.
5.5.4.2 $\varphi(X) = Y$.
5.5.4.3 *Dla każdego* $x \in X$ *i* $y \in Y$ $(y \in \varphi(x)) \Leftrightarrow (x \in \overleftarrow{\varphi}(y))$.
5.5.4.4 $\varphi = p \in GV$, *ponieważ* $(Id_X, p) \in \varphi_m$.
5.5.4.5 $\varphi = \varphi_p \in GV$, *ponieważ* $(p, Id_X) \in \varphi_m$.
5.5.4.6 $\varphi_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ *jest izomorfizmem i*

$$\overleftarrow{\varphi}_* \circ \varphi_* = Id_{H_*(X)} \;\; i \;\; \varphi_* \circ \overleftarrow{\varphi}_* = Id_{H_*(Y)}.$$

5.5.4.7 *Niech* $h : X \to Y$ *będzie homeomorfizmem (w szczególności, jeśli* $X = Y$ *i* $h = Id_X$*). Wtedy* $h \in GV$.
5.5.4.8 *Niech* $q_i : Z_i \to Y$, $i = 1, 2$ *będzie funkcją ciągłą i niech* $\varphi : Z_1 \to_m Z_2$ $\varphi \in GV$. *Wtedy*

$$(q_2 \circ \varphi = q_1) \Leftrightarrow (q_1 \circ \overleftarrow{\varphi} = q_2).$$

5.5.4.9 φ *jest odwzorowaniem domkniętym.*

Za pomocą odwzorowań typu GV można relację wprowadzoną w Definicji 5.3.1 zapisać w inny, prostszy sposób (patrz, Propozycja 5.5.4):

Propozycja 5.5.5. *([28]) Niech* $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in D(X, Y)$, *gdzie*

$$X \xleftarrow{p_1} Z_1 \xrightarrow{q_1} Y, \qquad X \xleftarrow{p_2} Z_2 \xrightarrow{q_2} Y.$$

$$((p_1, q_1) \sim_m (p_2, q_2)) \Leftrightarrow (istnieje \;\; \varphi : Z_1 \to_m Z_2, \;\; \varphi \in GV \;\; takie, \; że \;\; p_2 \circ \varphi = p_1$$
$$i \;\; q_2 \circ \varphi = q_1).$$

6. TEORIA MULTIDOMINACJI

6.1 Preliminaria

W tym rozdziale będziemy potrzebować następujące definicje i fakty:

Definicja 6.1.1. *Niech $X \in ANR$ i niech $X_0 \subset X$ będzie domkniętym podzbiorem. Mówimy, że X_0 jest przesuwalna w X, jeżeli dla każdego otoczenia U przestrzeni X_0 istnieje otoczenie otwarte U' przestrzeni X_0, $U' \subset U$ takie, że dla dowolnego otoczenia U'' przestrzeni X, $U'' \subset U$ istnieje homotopia $H\colon U' \times [0,1] \to U$, taka, że $H(x,0) = x$ i $H(x,1) \in U''$, dla dowolnego $x \in U'$.*

Definicja 6.1.2. *Niech X będzie przestrzenią zwartą. Mówimy, że X jest przesuwalna jeżeli istnieje $Z \in ANR$ i zanurzenie $e : X \to Z$ takie, że $e(X)$ jest przesuwalna w Z.*

Odnotujmy, że własność przesuwalności jest własnością absolutną, to znaczy, że jeśli A jest przesuwalna w pewnej przestrzeni $X \in ANR$ i $j : A \to X'$ jest zanurzeniem przestrzeni A w przestrzeni $X' \in ANR$, to $j(A)$ jest przesuwalna w X' (patrz, [2]).

Uwaga 6.1.3. *[2] Przestrzeniami przesuwalnymi są między innymi przestrzenie typu: AR, ANR, $AANR$ (w sensie Clappa), FAR i $FANR$.*

Propozycja 6.1.4. *[2] Niech X i Y będą przestrzeniami zwartymi. Przestrzeń $X \times Y$ jest przesuwalna wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y są przesuwalne.*

Propozycja 6.1.5. *[6] Załóżmy, że w kategorii przestrzeni liniowych z gradacją następujący diagram jest przemienny*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "u"] & E'' \\ E' \arrow[u, "u'"] \arrow[r, "u"'] & E''. \arrow[u, "u''"'] \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

Jeżeli u' lub u'' jest endomorfizmem Leraya, to endomorfizmem Leraya jest też drugi endomorfizm i

$$\Lambda(u') = \Lambda(u'').$$

Propozycja 6.1.6. *[28] Niech $\varphi : X \to_m Y$, $\psi : Y \to_m T$, $\varphi, \psi \in GV$.*
6.1.6.1 $(\psi \circ \varphi) \in GV$.
6.1.6.2 $\varphi(X) = Y$.
6.1.6.3 *Dla każdego* $x \in X$ *i* $y \in Y$ $(y \in \varphi(x)) \Leftrightarrow (x \in \overleftarrow{\varphi}(y))$.
6.1.6.4 $\varphi = p \in GV$, *ponieważ* $(Id_X, p) \in \varphi_m$.
6.1.6.5 $\varphi = \varphi_p \in GV$, *ponieważ* $(p, Id_X) \in \varphi_m$.
6.1.6.6 $\varphi_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ *jest izomorfizmem i*

$$\overleftarrow{\varphi}_* \circ \varphi_* = Id_{H_*(X)} \ \ i \ \ \varphi_* \circ \overleftarrow{\varphi}_* = Id_{H_*(Y)}.$$

6.1.6.7 *Niech $h : X \to Y$ będzie homeomorfizmem (w szczególności, jeśli $X = Y$ i $h = Id_X$). Wtedy $h \in GV$.*

6.1.6.8 *Niech* $q_i : Z_i \to Y$, $i = 1, 2$ *będzie funkcją ciągłą i niech* $\varphi : Z_1 \to_m Z_2$ $\varphi \in GV$. *Wtedy*

$$(q_2 \circ \varphi = q_1) \Leftrightarrow (q_1 \circ \overleftarrow{\varphi} = q_2).$$

6.1.6.9 φ *jest odwzorowaniem domkniętym.*

Propozycja 6.1.7. *[33] Niech* $f, g : X \to Y$ *będą funkcjami ciągłymi.* $f_m \sim_{HM} g_m$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń* Z *i odwzorowanie Vietorisa* $p : Z \to X$ *takie, że*

$$f \circ p \sim_h g \circ p.$$

6.2 Multidominacja przestrzeni metrycznych

Wprowadzimy pojęcie multidominacji przestrzeni metrycznych i podamy jej podstawowe własności. Multidominacje podzielimy na prawostronną i lewostronną. Do definicji i analizy własności multidominacji użyjemy multifunkcji wyznaczonych przez multimorfizmy. Szczegóły dotyczące multidominacji można znaleźć w pracach [30, 31, 33]. W tym paragrafie, odwzorowania wyznaczone przez multimorfizmy $\varphi_m \in M_m(X, Y)$ będziemy oznaczać $\varphi : X \to_m Y$ i nazywać multifunkcjami, natomiast dla funkcji rezerwujemy litery $f, g, h, \ldots$. Niech $\varphi : X \to_m Y$ będzie multifunkcją. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\{\varphi\}_r = \{\psi : Y \to_m X;\ \ \psi(y) \subset \varphi_b^{-1}(y) \text{ dla każdego } y \in Y\},$$

$$\{\varphi\}_h = \{\psi : Y \to_m X;\ \ Id_{H_*(Y)} = \varphi_* \circ \psi_*\}.$$

$$\{\varphi\}_r^s = \{g : Y \to X;\ \ g(y) \in \varphi_b^{-1}(y) \text{ dla każdego } y \in Y\},$$

$$\{\varphi\}_h^s = \{g : Y \to X;\ \ Id_{H_*(Y)} = \varphi_* \circ g_*\}.$$

Elementy zbiorów $\{\varphi\}_r^s$ i $\{\varphi\}_h^s$ (jeśli nie są puste) są odzworowaniami jednowartościowymi. Jest jasne, że dla pewnej multifunkcji $\varphi : X \to_m Y$ powyższe zbiory mogą być puste. Niech $\varphi : X \multimap Y$, $\psi : Y \multimap X$ będą odwzorowaniami wielowartościowymi i niech $\varphi(X) = Y$. Niech $y \in Y$. Zauważmy, że

$$(\psi(y) \subset \varphi_b^{-1}(y)) \Leftrightarrow (\text{dla każdego } x \in X\ \ (x \in \psi(y)) \Rightarrow (y \in \varphi(x))). \tag{6.1}$$

Mówimy, że odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \multimap Y$ jest acykliczne, jeżeli dla każdego $x \in X$ zbiór $\varphi(x)$ jest zwarty i acykliczny. Jeżeli $\varphi : X \multimap Y$ jest acykliczne, to jest multifunkcją wyznaczoną przez multimorfizm $\varphi_m = [(p_\varphi, q_\varphi)]_m$

$$X \xleftarrow{p_\varphi} \Gamma \xrightarrow{q_\varphi} Y, \tag{6.2}$$

gdzie $\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y :\ \ y \in \varphi(x)\}$, $p_\varphi(x, y) = x$ i $q_\varphi(x, y) = y$ dla każdego $(x, y) \in \Gamma$.

Propozycja 6.2.1. *([33]) Niech* $\varphi_1 : X \to_m Y$ *i* $\varphi_2 : Y \to_m Z$ *będą multifunkcjami,* $f : X \to Y$ *ciągłą funkcją i niech* $Id_X : X \to X$ *będzie odwzorowaniem identycznościowym.*
6.2.1.1 $\{Id_X\}_r = \{Id_X\}$.
6.2.1.2 $\{f\}_r \subset \{f\}_h$.
6.2.1.3 $\{f\}_r^s \subset \{f\}_h^s$.

6.2.1.4 Jeżeli $\varphi_1 : X \multimap Y$ jest acykliczne, to $\{\varphi_1\}_r^s \subset \{\varphi_1\}_h^s$.
6.2.1.5 Jeżeli $\psi_1 \in \{\varphi_1\}_r \cap \{\varphi_1\}_h$ i $\psi_2 \in \{\varphi_2\}_r \cap \{\varphi_2\}_h$ to

$$\psi_1 \circ \psi_2 \in \{\varphi_2 \circ \varphi_1\}_r \cap \{\varphi_2 \circ \varphi_1\}_h.$$

6.2.1.6 Niech $Y_0 \subset Y$ będzie zbiorem niepustym i niech $X_0 = f^{-1}(Y_0)$. Jeśli $\{f\}_r \neq \emptyset$, to

$$\{f_{X_0}\}_r \neq \emptyset.$$

6.2.1.7 Niech $\psi \in \{f\}_r$ takie, że $\psi(Y) \subset A$, gdzie $A \subset X$. Wtedy $\{f_A\}_r \neq \emptyset$.
6.2.1.8 Niech $f_i : X_i \to_m Y_i$ będzie funkcją ciągłą, $i = 1, 2$. Jeżeli $\{f_i\}_r \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ to $\{f_1 \times f_2\}_r \neq \emptyset$.

Propozycja 6.2.2. *([33]) Niech $\varphi : X \to_m Y$ będzie multifunkcją. Jeśli $\{\varphi\}_r \neq \emptyset$, to dla każdego $\psi \in \{\varphi\}_r$ mamy:*
6.2.2.1 dla każdego $y \in Y$ $y \in \varphi(\psi(y))$,
6.2.2.2 dla każdego $x \in \psi(Y)$ $x \in \psi(\varphi(x))$,
6.2.2.3 $\psi(Y)$ jest domknięty w X,
6.2.2.4 $\varphi(X) = Y$.

Definicja 6.2.3. *Mówimy, że przestrzeń metryzowalna X multidominuje nad przestrzenią metryzowalną Y (piszemy, $X\circ \geq \circ Y$) jeśli istnieje multifunkcja $\varphi : X \to_m Y$ taka, że*

$$\{\varphi\}_r \cap \{\varphi\}_h \neq \emptyset.$$

Podamy przykład, który uzasadnia powyższą definicję. Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych i niech $[a, b] \subset \mathbb{R}$ będzie domkniętym przedziałem. Niech

$$[a, b]^n = [a, b] \times [a, b] \times ... \times [a, b] \;\; (n - razy \; [a, b]).$$

Symbolem $\mathbb{K}^2$ oznaczymy domkniętą kulę w przestrzeni $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1.

Przykład 6.2.4. *Niech $\varphi : \mathbb{K}^2 \multimap \mathbb{S}^1$ będzie odwzorowaniem danym wzorem:*

$$\varphi(x, y) = \mathbb{S}^1 \;\; dla \; każdego \;\; (x, y) \in \mathbb{K}^2.$$

Pokażemy, że φ jest multifunkcją. Niech $h : \mathbb{K}^2 \to [0, 2\pi]^2$ będzie homeomorfizmem. Definiujemy odzworowanie Vietorisa $r : [0, 2\pi]^3 \to [0, 2\pi]^2$ za pomocą wzoru

$$r(x, y, z) = (x, y) \;\; dla \; każdego \;\; (x, y, z) \in [0, 2\pi]^3$$

i ciągłą funkcję $f : [0, 2\pi]^3 \to \mathbb{S}^1$ wzorem

$$f(x, y, z) = (cosz, sinz) \;\; dla \; każdego \;\; (x, y, z) \in [0, 2\pi]^3.$$

Mamy

$$\mathbb{K}^2 \xleftarrow{\;p\;} [0, 2\pi]^3 \xrightarrow{\;q\;} \mathbb{S}^1,$$

gdzie $p = h^{-1} \circ r$ *i* $q = f$. *Jest jasne, że odwzorowanie* φ *jest wyznaczone przez multimorfizm* $[(p, q)]_m = \varphi_m$. *Zauważmy, że*

$$\{\varphi\}_r \neq \emptyset \text{ ponieważ } i \in \{\varphi\}_r,$$

gdzie $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{K}^2$ *jest inkluzją. Pokażemy, że zbiór* $\{\varphi\}_h = \emptyset$. *Przypuśćmy, że* $\psi \in \{\varphi\}_h$. *Wtedy mielibyśmy diagram*

$$H_*(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\psi_*} H_*(\mathbb{K}^2) \xrightarrow{\varphi_*} H_*(\mathbb{S}^1),$$

gdzie $Id_{H_*(\mathbb{S}^1)} = \varphi_* \circ \psi_*$, *ale to jest niemożliwe.*

Podamy kilka potrzebnych definicji. Jeżeli w Definicji 6.2.3 multifunkcję φ zastąpimy funkcą f, to otrzymamy następującą definicję (patrz, Propozycja 6.2.1, warunek 6.2.1.2):

Definicja 6.2.5. *Mówimy, że przestrzeń metryzowalna* X *multidominuje prawostronnie nad przestrzenią metryzowalną* Y *(piszemy,* $X \geq \circ Y$*) jeśli istnieje ciągła funkcja* $f : X \to Y$ *taka, że*

$$\{f\}_r \neq \emptyset.$$

W szczególności, jeżeli $g \in \{f\}_r$, to $\{f\}_r^s \neq \emptyset$ i $X \geq Y$, to znaczy przestrzeń X dominuje nad przestrzenią Y w sensie Borsuka (patrz, Propozycja 6.2.1, warunek 6.2.1.3).

Zauważmy, że $\{f\}_r \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varphi \in \{f\}_r$ i dla każdego $(p, q) \in \varphi_m$

$$f \circ q = p. \tag{6.3}$$

Definicja 6.2.6. *Mówimy, że przestrzeń metryzowalna* X *multidominuje lewostronnie nad przestrzenią metryzowalną* Y *(piszemy,* $X \circ \geq Y$*) jeśli istnieje multifunkcja* $\varphi : X \to_m Y$ *taka, że*

$$\{\varphi\}_r^s \cap \{\varphi\}_h^s \neq \emptyset.$$

Zauważmy, że jeżeli (Definicja 6.2.3) istnieje ciągła funkcja $g : Y \to X$ taka, że

$$g \in \{\varphi\}_r \cap \{\varphi\}_h,$$

to

$$X \circ \geq Y.$$

Symbol

$$X \approx_{GV} Y \tag{6.4}$$

oznacza, że istnieje odwzorowanie $\varphi : X \to_m Y$ takie, że $\varphi \in GV$. Korzystając z Propozycji 6.1.6 (6.1.6.7 i 6.1.6.11, patrz (6.1)) otrzymujemy:

Propozycja 6.2.7. *([28]) Niech* $X \approx_{GV} Y$. *Wtedy* $X \circ \geq \circ Y$ *i* $Y \circ \geq \circ X$.

W szczególności (patrz, Propozycja 6.1.6, warunki 6.1.6.8 i 6.1.6.9) mamy:

Propozycja 6.2.8. *([28]) Jeżeli* $p : X \to Y$ *jest odwzorowaniem Vietorisa, to* $X \geq \circ Y$ *i* $Y \circ \geq X$.

6.3 Multidominacja prawostronna i lewostronna

Multidominację w przestrzeniach metrycznych podzielimy na lewostronną i prawostronną. Zajmiemy się głównie badaniem multidominacji prawostronnej, ponieważ pewna wersja multidominacji lewostronnej została zbadana przez A. Suszyckiego w pracy [24]. Przypomnijmy jedną z najważniejszych własności multidominacji prawostronnej (patrz, [30, 31]). Mówimy, że multifunkcja $\varphi : X \to_m X$ ma punkt stały, jeśli istnieje $x \in X$ taki, że $x \in \varphi(x)$ (piszemy, $Fix(\varphi) \neq \emptyset$). Multifunkcja $\varphi : X \underline{\to_m} Y$ jest zwarta, jeżeli istnieje $(p, q) \in \varphi_m$ takie, że $q : Z \to Y$ jest zwarte, to znaczy $\overline{q(Z)} \subset Y$ jest zbiorem zwartym. Mówimy, że zwarta multifunkcja $\psi : X \to_m X$ jest odwzorowaniem Lefschetza, jeśli ψ_* jest endomorfizmem Leraya i

$$(\Lambda(\psi_*) \neq 0) \Rightarrow (Fix(\psi) \neq \emptyset).$$

Mówimy, że przestrzeń X ma własność punktu stałego w kontekście multimorfizmów (piszemy, $X \in FPP_m$), jeżeli każda zwarta multifunkcja $\psi : X \to_m X$ jest odwzorowaniem Lefschetza.

Twierdzenie 6.3.1. *([33]) Niech Y będzie przestrzenią metryzowalną i niech $X \in FPP_m$. Jeśli $X \geq \circ Y$, to $Y \in FPP_m$.*

Multidominacja lewostronna nie zachowuje własności punktu stałego.

Przykład 6.3.2. *Niech T będzie zwartą i ściągalną przestrzenią i taką, że przestrzeń $Y = T \times [0, 1]$ nie ma własności punktu stałego (patrz, [15]). Definiujemy odwzorowanie Vietorisa $p : Y \to [0, 1]$ wzorem*

$$p(x, t) = t \text{ dla każdego } (x, t) \in Y.$$

Zauważmy, że

$$[0, 1]\circ \geq Y \text{ (patrz, Definicja 6.2.6).}$$

Rzeczywiście, niech $\varphi_m \in M_m([0, 1], Y)$ będzie multimorfizmem danym wzorem

$$\varphi_m = [(p, Id)]_m$$

wtedy $\varphi(t) = p^{-1}(t)$ dla każdego $t \in [0, 1]$ jest multifunkcją wyznaczoną przez multimorfizm φ_m. Jest jasne, że (patrz, Propozycja 6.2.1 (6.2.1.4))

$$p \in \{\varphi\}^s_r \subset \{\varphi\}^s_h.$$

Definicja 6.3.3. *Niech X będzie przestrzenią metryzowalną i niech $x_0 \in X$. Niech $C^{x_0} : X \to X$ będzie odzworowaniem stałym, to znaczy $C^{x_0}(x) = x_0$ dla każdego $x \in X$. Mówimy, że przestrzeń X jest multiściągalna do punktu x_0 w kontekście multimorfizmów (piszemy, $X \in MCN_m$) jeżeli*

$$[(Id_X, Id_X)]_m = Id_m \sim_{HM} C^{x_0}_m = [(Id_X, C^{x_0})]_m.$$

Z Propozycji 6.1.7 dostajemy następujący fakt:

Propozycja 6.3.4. *[32] Przestrzeń $X \in MCN_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń metryzowalna Z i odwzorowanie Vietorisa $p : Z \to X$ takie, że $p \sim_h C^{x_0}_1$, gdzie $C^{x_0}_1 : Z \to X$ jest odwzorowaniem stałym, danym wzorem $C^{x_0}_1(z) = x_0$ dla każdego $z \in Z$.*

Multiściągalność do punktu w kontekście multimorfizmów jest istotnie szersza od zwykłej ściągalności (patrz, [31, 32, 33]). Kolejny fakt jest oczywisty.

Propozycja 6.3.5. *([33]) Jeżeli $X \in MCN_m$, to X jest acykliczna i łukowo spójna.*

Twierdzenie 6.3.6. *([33]) Niech $X \in MCN_m$ (patrz, Definicja 6.3.3). Załóżmy, że $X \geq \circ\, Y$, wtedy $Y \in MCN_m$.*

Z Propozycji 6.3.5 przestrzeń Y w Twierdzeniu 6.3.6 jest łukowo spójna. W kolejnym przykładzie pokażemy, że multidominacja lewostronna nie zachowuje multiściągalności w kontekście multimorfizmów.

Przykład 6.3.7. *Definiujemy zbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ za pomocą wzoru:*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = sin(1/x),\ x \in (0, 1]\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Wiemy (patrz, [5, 6]), że S jest zwarta i ma trywialny kształt. Wiemy również, że S nie jest łukowo spójna. Niech $Y = S \times [0, 1]$. Jest oczywiste, że Y jest zwarta, ma trywialny kształt (acykliczna) i nie jest łukowo spójna ($Y \notin MCN_m$). Podobnie jak w Przykładzie 6.3.2, można pokazać, że

$$[0, 1]\circ \geq Y.$$

Wprowadzimy pewne oznaczenia. Niech W, V, U będą niepustymi zbiorami takimi, że $W \subset V \subset U$. Niech $i_V : V \hookrightarrow U$ będzie inkluzją. Zauważmy, że

$$i_m^V = [(Id_V, i_V)]_m = [(p_V, i_V \circ p_V)]_m,$$

gdzie $p_V : Z_V \to V$ jest odwzorowaniem Vietorisa. Rzeczywiście, mamy następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccc}
V & \xleftarrow{Id_V} & V & \xrightarrow{i_V} & U \\
\uparrow{\scriptstyle Id_V} & & \uparrow{\scriptstyle p_V} & & \uparrow{\scriptstyle Id_U} \\
V & \xleftarrow{p_V} & Z_V & \xrightarrow{i_V \circ p_V} & U \\
\downarrow{\scriptstyle Id_V} & & \downarrow{\scriptstyle Id_{Z_V}} & & \downarrow{\scriptstyle Id_U} \\
V & \xleftarrow{p_V} & Z_V & \xrightarrow{i_V \circ p_V} & U.
\end{array}$$

Niech $C_m^W = [(p_V, i_W \circ C^W)]_m$ będzie multimorfizmem takim, że

$$V \xleftarrow{p_V} Z_V \xrightarrow{C^W} W \xrightarrow{i_W} U,$$

gdzie C^W jest odwzorowaniem ciągłym i $i_W : W \hookrightarrow U$ jest inkluzją. W szczególności, odwzorowanie C^W może być stałe, to znaczy $C^W = C^x$, gdzie $x \in W$.

Definicja 6.3.8. *Niech X będzie przestrzenią metryzowalną. Mówimy, że przestrzeń X jest lokalnie multiściągalna w kontekście multimorfizmów (piszemy, $X \in LMCN_m$) jeżeli dla każdego $x \in X$ i dla każdego otwartego otoczenia $U \subset X$ punktu x istnieje otwarte otoczenie $V \subset U$ punktu x takie, że dla każdego otwartego otoczenia $W \subset U$ punktu x istnieje homotopia $H_W : V \times [0, 1] \to_m U$ taka, że*

$$i_m^V \sim_{HM} C_m^W.$$

Symbolem

$$X \geq \circ_{mv} Y$$

będziemy oznaczać taką multidominację prawostronną, w której istnieje multifunkcja $\varphi : Y \to_m X$ taka, że $f \circ \varphi = Id_Y$ i dla pewnego $(p, q) \in \varphi_m$ odzworowanie Vietorisa $p : Z \to X$ jest takie, że dla wszystkich $x \in X$ zbiór $p^{-1}(x)$ jest przesuwalny (patrz, Definicje 6.1.1, 6.1.2). Z literatury matematycznej wiemy, że (patrz, [2]) przestrzenie zwarte typu: AR, ANR, $AANR$ (w sensie Clappa), FAR i $FANR$ są przestrzeniami przesuwalnymi. Przypomnijmy, że nie każdy zwarty i acykliczny zbiór jest przesuwalny (patrz, [14, 25]).

Twierdzenie 6.3.9. *([33]) Niech $X \in ANR$. Jeżeli $X \geq \circ_{mv} Y$, to $Y \in LMCN_m$.*

Propozycja 6.3.10. *([33]) Jeżeli $Y \in LMCN_m$, to Y jest lokalnie łukowo spójna.*

Podamy przykład, że multidominacja lewostronna nie zachowuje lokalnej multiściągalności w kontekście multimorfizmów.

Przykład 6.3.11. *Definujemy zbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ za pomocą wzoru:*

$$S = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{1/n\} \times [0, 1] \right) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}).$$

Wiemy, że (patrz, [5, 6]) $T = S \times [0, 1]$ jest zwarta, łukowo spójna i ma trywialny kształt. Podobnie jak w przykładzie 6.3.7, można pokazać, że

$$[0, 1] \circ_{mv} \geq T.$$

Zbiór $T \notin LMCN_m$. Rzeczywiście, warunek Definicji 6.3.8 (patrz, Propozycja 6.3.10) nie jest spełniony dla punktów postaci $(0, x, y)$, gdzie $x, y \in (0, 1]$.

Na koniec paragrafu podamy jeszcze dwa oczywiste fakty, wynikające z definicji multidominacji:

Propozycja 6.3.12. *Niech X będzie zwartą przestrzenią skończonego typu. Załóżmy, że*

$$X \circ \geq \circ\, Y,$$

wtedy Y jest przestrzenią zwartą, skończonego typu.

Propozycja 6.3.13. *Niech X będzie przestrzenią acykliczną. Załóżmy, że*

$$X \circ \geq \circ\, Y,$$

wtedy Y jest acykliczna.

6.4 Multiretrakty. Przykłady multiretraktów.

W tym paragrafie zajmiemy się badaniem produktu multidominacji prawostronnej, czyli multiretraktami prawostronnymi. Podamy też wiele przykładów multiretraktów prawostronnych, które nie są retraktami w sensie Borsuka. Większość tych przykładów została opisana w pracy [26].

Definicja 6.4.1. *Przestrzeń metryzowalną X nazywamy absolutnym multiretraktem (piszemy, $X \in AMR$) jeżeli istnieje przestrzeń unormowana E taka, że $E \;\geq \circ\, X$.*

Definicja 6.4.2. *Przestrzeń metryzowalną X nazywamy absolutnym otoczeniowym multiretraktem (piszemy, $X \in ANMR$) jeżeli istnieje otwarty zbiór U w pewnej przestrzeni unormowanej E taki, że $U \;\geq \circ\, X$.*

Zauważmy, że w Definicji 6.4.1 przestrzeń unormowaną E możemy zastąpić dowolną przestrzenią $Y \in AR$, natomiast zbiór otwarty w Definicji 6.4.2 możemy zastąpić dowolnym $Y \in ANR$ (patrz, Propozycja 6.2.1, warunki 6.2.1.2 i 6.2.1.5). Z Twierdzenia 6.3.1 dostajemy:

Twierdzenie 6.4.3. *([26]) Niech $X \in ANMR$. Wtedy $X \in FPP_m$.*

Prostym wnioskiem z Twierdzenia 6.4.3 jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.4.4. *([26]) Niech $X \in ANMR$ będzie acykliczna i niech $\psi\colon X \to_m X$ będzie zwartą multifunkcją. Wtedy $\Lambda(\psi_*) = 1$ i stąd $Fix(\psi) \neq \emptyset$.*

Z Twierdzenia 6.3.6 i Propozycji 6.3.5 otrzymujemy:

Twierdzenie 6.4.5. *([26]) Niech $X \in AMR$ i załóżmy, że $\psi : X \to_m X$ jest zwartą multifunkcją. Wtedy $Fix(\psi) \neq \emptyset$.*

Propozycja 6.4.6. *([26]) Niech $X \in ANMR$ ($X \in AMR$) i niech $X \;\geq \circ\, Y$. Wtedy $Y \in ANMR$ ($Y \in AMR$).*

W szczególności (patrz Propozycja 6.2.8) mamy następujący fakt:

Propozycja 6.4.7. *([26]) Niech X będzie $ANMR$ (AMR) (w szcególności, ANR (AR)) i niech $p : X \to Y$ będzie odwzorowaniem Vietorisa. Wtedy $Y \in ANMR$ ($Y \in AMR$).*

Dzięki Propozycji 6.2.1 (warunek 6.2.1.6) mamy:

Propozycja 6.4.8. *([26]) Niech $X \in ANMR$ i niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Wtedy $U \in ANMR$.*

Zauważmy, że każde odwzorowanie typu cell-like jest odwzorowaniem Vietorisa, natomiast nie każde odwzorowanie Vietorisa jest typu cell-like. Przed podaniem przykładów multiretraktów zacytujemy potrzebne twierdzenia.

Twierdzenie 6.4.9. *(patrz, [1, 22]) Jeżeli $X \in ANR$ i Y jest przestrzenią metryzowalną skończonego wymiaru i jeżeli odwzorowanie $f\colon X \to Y$ spełnia następujący warunek $f^{-1}(y) \in AR$ dla wszystkich punktów $y \in Y$, wtedy $Y \in ANR$.*

Twierdzenie 6.4.10. *(patrz, [9]). Odwzorowanie typu cell-like $f\colon X \to Y$ pomiędzy zwartymi ANR-ami jest homotopijną równoważnością.*

Restrykcyjnych założeń o przestrzeniach X i Y nie można pominąć. Taylor w pracy [25] konstruuje odzworowanie cell-like

$$T : X_t \to Q \tag{6.5}$$

z przestrzeni X_t, która nie jest przesuwalna na kostę Hilberta Q, które nie jest homotopijną równoważnością. Następnie, korzystając z przykładu Taylora, J. E. Keesling (patrz, [14]) konstruuje odwzorowanie cell-like

$$K : Q \to X_k \tag{6.6}$$

z kostki Hilberta na nieprzesuwalną przestrzeń metryzowalną X_k (w szczególności, X_k nie jest ANR). Z kolei R. J. Daverman i J. J. Walsh (patrz, [4]) z przykładu Taylora (patrz, [25]) wyprodukowali inny przykład odwzorowania cell-like

$$DW : Q \to X_{dw} \tag{6.7}$$

takiego, że przestrzeń $X_{dw} \notin ANR$ i X_{dw} jest lokalnie ściągalna. J. van Mill w pracy (patrz, [18]) zauważył, że istnieje odwzorowanie cell-like

$$M_c : Q \to X_{mc} \tag{6.8}$$

takie, że żaden podzbiór otwarty przestrzeni X_{mc} nie jest ściągalny w X_{mc} . W tym celu, wystarczy skonstruować odwzorowanie cell-like

$$M_c : Q \approx Q^\infty \to X_k^\infty = X_{mc},$$

$M_c = K \times K \times K \times \cdots$, gdzie symbol X_k^∞ oznacza nieskończony, przeliczalny produkt kartezjański przestrzeni X_k (zauważmy, że przestrzeń X_k^∞ nie jest przesuwalna, ponieważ X_k nie jest przesuwalna) i K jest takie, jak wyżej (patrz, (6.6)). Ponadto, korzystając z przykładu Keeslinga, J. van Mill skonstruował odwzorowanie cell-like

$$M_a : Q \to X_{ma} \tag{6.9}$$

takie, że X_{ma} nie jest przesuwalna (i dlatego przestrzeń X_{ma} nie jest ANR-em) i każde włókno $M_a^{-1}(x)$, $x \in X_{ma}$, jest AR-em (patrz, [17]).

Przed podaniem przykładów multiretraktów przeprowadzimy pewną konstrukcję. Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi. Symbolem $X \sqcup Y$ będziemy oznaczać sumę rozłączną przestrzeni X i Y, która, jak wiadomo, jest przestrzenią meytryzowalną. Niech $f : A \to Y$ będzie funkcją ciągłą, gdzie $A \subset X$ jest niepustym podzbiorem. Symbolem $X \sqcup_f Y$ będziemy oznaczać przestrzeń ilorazową, która powstała z przestrzeni $X \sqcup Y$, poprzez utożsamienie punktów $x \in A$ i punktów $f(x) \in Y$. Przypomnijmy, że jeżeli przestrzenie metryzowalne X i Y są zwarte, to przestrzeń $X \sqcup_f Y$ jest metryzowalna i zwarta. Będziemy potrzebowali następujący prosty fakt:

Propozycja 6.4.11. *(patrz, [21]) Niech X i Y będą zwartymi przestrzeniami i niech A będzie domkniętym podzbiorem w X. Niech $f\colon A \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem. Wtedy złożenie $X \hookrightarrow X \sqcup Y \xrightarrow{\pi} X \sqcup_f Y$ przekształca zbiór $X \setminus A$ homeorficznie na podzbiór otwarty w $X \sqcup_f Y$, gdzie π jest odzworowaniem ilorazowym. Ponadto, złożenie $Y \hookrightarrow X \sqcup Y \xrightarrow{\pi} X \sqcup_f Y$ jest homeomorfizmem z przestrzeni Y na pewną podprzestrzeń przestrzeni $X \sqcup_f Y$.*

Przykład 6.4.12. *Niech $T\colon X_t \to Q$ będzie odwzorowanie cell-like skonstruowanym przez Taylora (patrz, (6.5)). Niech $Q_0 := Q$. Ponieważ X_t jest zwarta, możemy rozważyć X_t jako podzbiór Q_0. Oczywiście $Q_0 \setminus X_t \neq \emptyset$, ponieważ X_t nie jest ściągalna. Niech*

$$\pi\colon Q_0 \sqcup Q \to Q_0 \sqcup_T Q$$

będzie odwzorowaniem ilorazowym. Niech $i\colon Q_0 \hookrightarrow Q_0 \sqcup Q$ *będzie inkluzją. Wtedy funkcja* $F\colon Q_0 \to Q_0 \sqcup_T Q$ *zdefiniowana wzorem* $F = \pi \circ i$ *jest odwzorowaniem cell-like. Z Propozycji* 6.4.11 *wynika, że*

$$F_{(Q_0\setminus X_t)}\colon Q_0 \setminus X_t \overset{\approx}{\to} F(Q_0 \setminus X_t) \tag{6.10}$$

jest homeomorfizmem i $F(Q_0 \setminus X_t)$ *jest otwarty w* $Q_0 \sqcup_T Q$. *Łatwo zuważyć, że*

$$F(Q_0 \setminus X_t) \cap F(X_t) = \emptyset. \tag{6.11}$$

Niech $x = \{x_i\} \in Q_0 \setminus X_t$. *Ponieważ* $Q_0 \setminus X_t$ *jest otwarty, istnieje* $r > 0$ *takie, że* $B(x, r) \subset Q_0 \setminus X_t$ ([1]). *W konsekwencji, istnieją* $\varepsilon > 0$, *liczba naturalna* $k > 1$ *i otwarte zbiory* $B(x_i, \varepsilon) \subset [0, 1]$, *gdzie* $i = 1, ..., k$, *takie, że*

$$\Big(\prod_{i=1}^{k} B(x_i,\varepsilon)\Big) \times \Big(\prod_{i=k+1}^{\infty}[0,1]\Big) \subset B(x,r).$$

Niech $[a_i, b_i]$ *będzie domkniętym przedziałem zawartym w* $B(x_i, \varepsilon)$, *dla* $i = 1, 2, ..., k$ *(możemy założyć, że* $0 < a_i < b_i < 1$, *dla* $i = 1, 2, ..., k$*). Wtedy,*

$$\Big(\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i]\Big) \times \Big(\prod_{i=k+1}^{\infty}[0,1]\Big) \subset B(x,r).$$

Kładziemy

$$B := \Big(\prod_{i=1}^{k}(a_i,b_i)\Big) \times \Big(\prod_{i=k+1}^{\infty}[0,1]\Big) \subset Q_0 \setminus X_t. \tag{6.12}$$

Zauważmy, że $Q_0 \setminus B$ *jest ANR-em. Rzeczywiście, wynika to z następującej równości:*

$$Q_0 \setminus B = \Big([0,1]^k \setminus \Big(\prod_{i=1}^{k}(a_i,b_i)\Big)\Big) \times \Big(\prod_{i=k+1}^{\infty}[0,1]\Big)$$

i z faktu, że $\big([0,1]^k \setminus \big(\prod_{i=1}^{k}(a_i,b_i)\big)\big)$ *jest ANR-em, gdzie* $[0,1]^k$ *oznacza k-wymiarową kostkę. Łatwo zauważyć, że przestrzeń* $Q_0 \setminus B$ *ma typ homotopii* $(k-1)$*- wymiarowej sfery* $\mathbb{S}^{k-1}$ *w* $\mathbb{R}^k$, *i stąd nie jest ściągalna do punktu. Biorąc pod uwagę* (6.10), (6.11) *i* (6.12), *otrzymujemy*

$$\begin{aligned}
F(Q_0 \setminus B) &= F\big(((Q_0 \setminus X_t) \setminus B) \cup X_t\big)\\
&= F\big((Q_0 \setminus X_t) \setminus B\big) \cup F(X_t)\\
&= \big(F(Q_0 \setminus X_t) \setminus F(B)\big) \cup F(X_t)\\
&= \big(F(Q_0 \setminus X_t) \setminus F(B)\big) \cup \big(F(X_t) \setminus F(B)\big)\\
&= \big(F(Q_0 \setminus X_t) \cup F(X_t)\big) \setminus F(B)\\
&= F(Q_0) \setminus F(B) = (Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B).
\end{aligned}$$

[1] Przypomnijmy, że metryka d w kostce Hilberta Q jest zdefiniowana następująco: $d(\{x_i\},\{y_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_i - y_i|$ dla wszystkich $\{x_i\},\{y_i\} \in Q$.

Definiujemy funkcję

$$\widetilde{F}\colon Q_0 \setminus B \to (Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B) \tag{6.13}$$

za pomocą wzoru $\widetilde{F}(x) = F(x)$ *dla wszystkich* $x \in Q_0 \setminus B$. *ponieważ* F *jest cell-like, więc* $\widetilde{F}$ *jest również odwzorowaniem cell-like. Zauważmy, że* $(Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B)$ *nie jest ANR-em. Rzeczywiście, jeśli* $(Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B)$ *byłoby ANR-em, wtedy*

$$Q_0 \sqcup_T Q = \big((Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B)\big) \cup F(\overline{B})$$

byłoby również ANR-em, ponieważ $F(\overline{B})$ *i* $F(\partial B)$ *są ANR-ami i spełniony jest następujący warunek:*

$$\begin{aligned}\big((Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B)\big) \cap F(\overline{B}) &= \big((Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B)\big) \cap \overline{F(B)} \\ &= \partial F(B) = F(\partial B).\end{aligned}$$

Natomiast, przestrzeń $Q_0 \sqcup_T Q$ *nie jest ANR-em, ponieważ* $Q_0 \sqcup_T Q$ *nie jest przesuwalna (dowód teg faktu jest zawarty w dowodzie Twierdzenia* 4 *w* [*14*]). *Tak, więc dowiedliśmy, że* $(Q_0 \sqcup_T Q) \setminus F(B)$ *nie jest ANR-em.*

Przykład 6.4.13. *Niech* $f : Q \to Y$ *będzie cell-like i takie, że* Y *nie jest ANR-em (patrz, (6.6)-(6.9)). Odwzorowanie* f *jest odwzorowaniem Vietorisa, więc z Propozycji 6.4.7* $Q \geq \circ\, Y$ *i* $Y \in AMR$.

Przykład 6.4.14. *Niech* $f : Q \to Y$ *będzie takie, jak w Przykładzie 6.4.13 i niech* $X \in ANR$ *będzie przestrzenią, która nie jest acykliczna. Pokażemy, że*

(i) $X \times Y \in ANMR$,

(ii) $X \times Y \notin AMR$,

(iv) $X \times Y \notin ANR$.

Jest oczywiste, that $(X \times Q) \geq \circ\, (X \times Y)$, *więc* $(X \times Y) \in ANMR$. *Odzworowanie* $g : X \times Y \to X$ *dane za pomocą wzoru* $g(x, y) = x$ *dla wszystkich* $(x, y) \in X \times Y$ *jest odwzorowaniem Vietorisa. Stąd* $X \times Y$ *nie jest acykliczna, więc* $(X \times Y) \notin AMR$. *Załóżmy, że* $X \times Y \in ANR$. *Wtedy* $Y \in ANR$, *ale to jest niemożliwe, ponieważ* Y *nie jest przesuwalna.*

Przykład 6.4.15. *Niech* $\widetilde{F} : Q_0 \backslash B \to (Q_0 \sqcup_T Q) \backslash F(B)$ *będzie takie, jak w Przykładzie 6.4.12. Pokazaliśmy, że* $(Q_0 \sqcup_T Q) \backslash F(B) \notin ANR$. *Korzystając z podobnych argumentów, jak w Przykładach 6.4.13 i 6.4.14, można wykazć, że*

(i) $(Q_0 \sqcup_T Q) \backslash F(B) \in ANMR$,

(ii) $(Q_0 \sqcup_T Q) \backslash F(B) \notin AMR$.

Przykład 6.4.16. *Niech* $M_c : Q \to X_{mc}$ *będzie odwzorowaniem cell-like (patrz, (6.8)) i takie, że* X_{mc} *nie jest przestrzenią lokalnie ściągalną. Dla każdego* $x \in X_{mc}$ *i dla dowlonego otoczenia otwartego* $U \subset Q$ *punktu* x *przestrzeń* $(U \cap X_{mc}) \in ANMR$ *(patrz, Przykład 6.4.13 i Propozycja 6.4.8), ale* $(U \cap X_{mc}) \notin ANR$, *ponieważ* $U \cap X_{mc}$ *nie jest lokalnie ściągalny.*

Przed konstrukcją kolejnego przykładu wprowadzimy pewne oznaczenia. Niech X będzie przestrzenią metryzowalną zwartą, $A \subset X$ zbiorem domkniętym i niepustym. Niech

$$\mathbb{P}_k^n(X_s) = \prod_{s=k}^{n} X_s,$$

gdzie dla każdego $1 \leq s \leq n$, $X_s = X$ i $n \geq k$. Symbolem $\mathbb{W}_k(n, A, X)$ oznaczymy następującą przestrzeń:

$$\mathbb{W}_k(n, A, X) = \begin{cases} A \times \mathbb{P}_2^n(X_j) & \text{dla } \; k = 1, \\ \mathbb{P}_1^{k-1}(X_j) \times A \times \mathbb{P}_{k+1}^n(X_j) & \text{dla } \; 1 < k < n, \\ \mathbb{P}_1^{n-1}(X_j) \times A & \text{dla } \; k = n. \end{cases}$$

Niech $A, B \subset X$ będą niepuste i domknięte zbiory i takie, że $A \cap B = \emptyset$. Definiujemy:

$$\mathbb{BC}(X, A, B, n) = \bigcup_{k=1}^{n} (\mathbb{W}_k(n, A, X) \cup \mathbb{W}_k(n, B, X)).$$

Niech $u, v \in X$, $u \neq v$ i niech $A = \{u\}$ i $B = \{v\}$ wtedy będziemy pisać

$$\mathbb{BC}(X, A, B, n) = \mathbb{BC}(X, u, v, n).$$

Zauważmy, że $\mathbb{BC}(X, A, B, n)$ jest przestrzenią metryzowalną zwartą. Będziemy ją nazywać kostką brzegową n-tego stopnia przestrzeni X dla zbiorów A, B, natomiast zbiory $\mathbb{W}_k(n, A, X)$, $\mathbb{W}_k(n, B, X)$ dla $k = 1, ..., n$, będziemy nazywać ścianami tej kostki, odpowiednio dla zbiorów A i B. Symbolem $[u, v] \subset Q$ oznaczymy przedział łączący punkty u i v, to jest:

$$[u, v] = \{(1 - t)u + tv : \;\; t \in [0, 1]\}.$$

Niech $A, B \subset Q$ będą zbiorami domkniętymi i niepustymi i takimi, że $A \cap B = \emptyset$ i niech $a \in A$ i $b \in B$. Niech $n > 1$ i niech $f : Q \to [a, b]$ będzie retrakcją. Odwzorowanie

$$r : \mathbb{BC}(Q, A, B, n) \to \mathbb{BC}([a, b], a, b, n)$$

dane wzorem

$$r(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} (f(x_1), ..., f(x_{i-1}), a, f(x_{i+1}), ..., f(x_n)) & \text{jeżeli } \; x_i \in A\,, \\ (f(x_1), ..., f(x_{j-1}), b, f(x_{j+1}), ..., f(x_n)) & \text{jeżeli } \; x_j \in B \end{cases}$$

dla każdego $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{BC}(Q, A, B, n)$ i dla każdego $1 \leq i, j \leq n$ jest retrakcją. Stąd homomorfizm

$$i_* : H_*(\mathbb{BC}([a, b], a, b, n)) \to H_*(\mathbb{BC}(Q, A, B, n)) \tag{6.14}$$

wyznaczony przez inkluzję

$$i : \mathbb{BC}([a, b], a, b, n) \hookrightarrow \mathbb{BC}(Q, A, B, n)$$

jest monomorfizmem. Jest jasne, że zbiór $\mathbb{BC}([a, b], a, b, n)$ ma homologie brzegu kostki $[0, 1]^n$.

Przykład 6.4.17. *Niech Q będzie kostką Hilberta i niech $f = M_a : Q \to X_{ma} = X$ będzie odwzorowaniem J. van Milla (patrz (6.9)). Przypopmnijmy, że dla każdego $x \in X$, $f^{-1}(x) \in AR$ i przestrzeń X nie jest przesuwalna. Bierzemy punkty $u, v \in X$ takie, że $u \neq v$. Zauważmy, że*

$$\mathbb{BC}(Q, f^{-1}(u), f^{-1}(v), n) \in ANR$$

i z (6.14)

$$\mathbb{BC}(Q, f^{-1}(u), f^{-1}(v), n) \notin AR.$$

Odwzorowanie

$$g : \mathbb{BC}(Q, f^{-1}(u), f^{-1}(v), n) \to \mathbb{BC}(X, u, v, n)$$

dane wzorem

$$g(x_1, ..., x_n) = (f(x_1), ..., f(x_n))$$

dla każdego $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{BC}(Q, f^{-1}(u), f^{-1}(v), n)$ jest odwzorowaniem Vietorisa. Z Propozycji 6.4.7 dostajemy

$$\mathbb{BC}(X, u, v, n) \in ANMR.$$

Przestrzeń $\mathbb{BC}(X, u, v, n) \notin AMR$, ponieważ nie jest acykliczna.

7. TEORIA DOMINACJI RELATYWNEJ

7.1 Preliminaria

W tym rozdziale wykorzystamy następujące definicje i fakty.

Definicja 7.1.1. *Przestrzeń metryzowalną X nazywamy absolutnym multiretraktem (piszemy, $X \in AMR$) jeżeli istnieje przestrzeń unormowana E taka, że $E \ \geq \circ \ X$.*

Definicja 7.1.2. *Przestrzeń metryzowalną X nazywamy absolutnym otoczeniowym multiretraktem (piszemy, $X \in ANMR$) jeżeli istnieje otwarty zbiór U w pewnej przestrzeni unormowanej E taki, że $U \ \geq \circ \ X$.*

Definicja 7.1.3. *Niech X będzie przestrzenią metryzowalną. Mówimy, że przestrzeń X jest lokalnie multiściągalna w kontekście multimorfizmów (piszemy, $X \in LMCN_m$) jeżeli dla każdego $x \in X$ i dla każdego otwartego otoczenia $U \subset X$ punktu x istnieje otwarte otoczenie $V \subset U$ punktu x takie, że dla każdego otwartego otoczenia $W \subset U$ punktu x istnieje homotopia $H_W : V \times [0,1] \to_m U$ taka, że*

$$i_m^V \sim_{HM} C_m^W \ \ (\textit{patrz, strona 21}).$$

Twierdzenie 7.1.4. *[33] Niech $X \in ANR$. Jeżeli $X \geq \circ_{mv} Y$, to $Y \in LMCN_m$.*

Twierdzenie 7.1.5. *(Künneth, patrz, [6]) Niech X i Y będą przestrzeniami zwartymi skończonego typu. Wtedy istnieje izomorfizm*

$$L : H_*(X \times Y) \to H_*(X) \otimes H_*(Y).$$

Propozycja 7.1.6. *([1]) Niech dla każdego n, X_n będzie przestrzenią zwartą i niech $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Jeżeli dla każdego n, X_n ma trywialny kształt, to X ma trywialny kształt.*

Propozycja 7.1.7. *([37]) Niech dla każdego n, X_n będzie przestrzenią zwartą i niech $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Jeżeli dla każdego n, X_n jest acykliczna, to X jest acykliczna.*

Symbolem Δ będziemy oznaczać rodzinę zbiorów zwartych i niepustych w kostce Hilberta spełniającą następujące warunki:

$$\text{dla każdego } \ x \in Q \quad \{x\} \in \Delta. \tag{7.1}$$

$$\text{jeśli } \ A_1, A_2, ...A_n, ... \in \Delta \quad \text{wtedy } \ \left(\prod_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \Delta. \tag{7.2}$$

$$\text{jeśli } \ A \in \Delta \ \text{ wtedy } \ h(A) \in \Delta, \ \text{ gdzie } \ h : A \to Q \ \text{ jest zanurzeniem.} \tag{7.3}$$

Zauważmy, że, w szczególności, dla każdego $n > 1$ mamy

$$\text{jeśli } \ A_1, A_2, ...A_n \in \Delta \quad \text{wtedy } \ (A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) \in \Delta. \tag{7.4}$$

Rzeczywiście, jeżeli $A_1, A_2, ...A_n \in \Delta$ i $x_1, x_2, ..., x_k, ... \in Q$ wtedy z (7.1) i (7.2) mamy

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times \left(\prod_{k=1}^{\infty} \{x_k\}\right) \in \Delta$$

i z (7.3) dostajemy

$$(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) \in \Delta.$$

Uwaga 7.1.8. *Własności (7.1), (7.2) i (7.3) mają, dla przykładu, następujące rodziny zbiorów: zbiory zwarte (piszemy, Δ_C), zbiory zwarte i acykliczne (piszemy, Δ_{CA}), zbiory o trywialnym kształcie (piszemy, Δ_{TS}) i zbiory jednoelementowe (piszemy, Δ_{SE}).*

Niech $\Re$ będzie rodziną wszystkich przestrzeni metryzowalnych i niech $g : Z \to X$ będzie właściwe. Mówimy, że g jest Δ-odwzorowaniem jeżeli

$$g^{-1}(x) \in \Delta \text{ dla każdego } x \in X. \tag{7.5}$$

Oznaczmy

$$\mathbb{M}(X) = \{g : Z \to X; \;\; Z \in \Re\},$$

$$\mathbb{D}(X) = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest } \Delta \text{ - odwzorowaniem}\}. \tag{7.6}$$

Niech $\Phi(X)$ będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{M}(X)$. Wprowadzimy pewne oznaczenia. Niech

$$\Phi(Y, X) = \{g : Y \to X; \;\; g \in \Phi(X)\}, \;\; \Phi_Y(X) = \{g \in \Phi(Z, X); \;\; Z \subset Y\}.$$

Przykłady rodzin zbiorów typu $\mathbb{D}$ (patrz, (7.6)):

$$\mathbb{H}(X) = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest homeomorfizmem}\} = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest } \Delta_{SE} \text{ -odwzorowaniem}\},$$

$$\mathbb{CE}(X) = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest cell-like }\} = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest } \Delta_{TS} \text{ -odwzorowaniem}\},$$

$$\mathbb{V}(X) = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest Vietorisa}\} = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest } \Delta_{CA} \text{ -odwzorowaniem}\},$$

$$\mathbb{P}(X) = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest właściwe}\} = \{g \in \mathbb{M}(X); \;\; \text{g jest } \Delta_{M} \text{ -odwzorowaniem}\}.$$

Zauważmy, że dla każdej przestrzeni Z zbiór $\mathbb{D}(X)$ spełnia następujące warunki (patrz, (7.1) i (7.3)):

$$\mathbb{H}(X) \subset \mathbb{D}(X), \tag{7.7}$$

$$(h \in \mathbb{H}(Z) \text{ i } g \in \mathbb{D}(Z, X)) \Rightarrow ((g \circ h) \in \mathbb{D}(X)). \tag{7.8}$$

Zauważmy również, że

$$\mathbb{H}(X) \subset \mathbb{CE}(X) \subset \mathbb{V}(X) \subset \mathbb{P}(X). \tag{7.9}$$

7.2 Relatywne retrakty

Wprowadzimy pojęcie relatywnego retraktu i podamy kilka jego własności (patrz, [36]). Udowodnimy, że na pewnym poziomie (względem odwzorowań Vietorisa) klasa relatywnych retraktów pokrywa się z klasą multiretraktów. Dzięki relatywnym retraktom można pokazać nowe własności multiretraktów. Multidominację prawostronną można zdefiniować za pomocą odwzorowań jednowartościowych.

Definicja 7.2.1. *Niech $g : Z \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Mówimy, że przestrzeń metryzowalna Y g-dominuje nad przestrzenią metryzowalną X (piszemy, $Y \geq_g X$), jeżeli istnieją: odwzorowania ciągłe $f_1 : Y \to X$, $f_2 : Z \to Y$ takie, że*

$$f_1(f_2(z)) = g(z) \;\; \textit{dla każdego} \;\; z \in Z.$$

Będziemy stosować zapis

$$Y \geq_{\mathbb{D}} X,$$

jeżeli istnieje $g \in \mathbb{D}(Z, X)$ takie, że

$$Y \geq_{g} X.$$

Zauważmy, że

$$(Y \geq_{\mathbb{H}} X) \;\Leftrightarrow\; (Y \geq X),$$

$$(Y \geq_{\mathbb{V}} X) \;\Leftrightarrow\; (Y \;\geq \circ\, X).$$

Niech $Y_1 \in AR$, $Y_2 \in ANR$ i niech $f_{1,i} : Y_i \to X$, $f_{2,i} : Z \to Y_i$ i $g : Z \to X$ odwzorowania ciągłe, $i = 1, 2$. Niech $h : Z \to T$ będzie domkniętym zanurzeniem, gdzie X, Z, T przestrzenie metryzowalne. Mamy następujący diagram

$$\begin{tikzcd}
X & Z \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f_{2,i}"] & Y_i \arrow[r, "f_{1,i}"] & X \\
X \arrow[u, "Id_X"'] & h(Z) \arrow[u, "h^{-1}"'] \arrow[l, "g\circ h^{-1}"'] \arrow[r, "f_{2,i}\circ h^{-1}"] & Y_i \arrow[u, "Id_{Y_i}"'] \arrow[r, "f_{1,i}"] & X \arrow[u, "Id_X"'] \\
X \arrow[u, "Id_X"'] & h(Z) \arrow[u, "Id_{h(Z)}"'] \arrow[l, "g\circ h^{-1}"'] \arrow[r, "j_i"] & A_i \arrow[u, "F_i"'] \arrow[r, "f_{1,i}\circ F_i"] & X, \arrow[u, "Id_X"']
\end{tikzcd} \tag{7.10}$$

w którym każdy kwadrat jest przemienny, gdzie $F_i : A_i \to Y_i$ jest ciągłym przedłużeniem odwzorowania $f_{2,i} \circ h^{-1} : h(Z) \to Y_i$, $A_1 = T$, $A_2 = U$, U jest pewnym zbiorem otwartym w T i takim, że $h(Z) \subset U$ oraz $j_i : h(Z) \hookrightarrow A_i$ jest zanurzeniem, $i = 1, 2$. Z powyższego diagramu wynika, że dla $i = 1, 2$

$$A_i \geq_{g\circ h^{-1}} X.$$

Definicja 7.2.2. *Niech $Z \subset Y$ i niech $g : Z \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Przestrzeń X nazywamy g-retraktem przestrzeni Y (jest retraktem relatywnym względem odwzorowania g), jeśli istnieje ciągłe odwzorowanie $r : Y \to X$ takie, że $r \circ i = g$, gdzie $i : Z \hookrightarrow Y$ jest inkluzją. Odwzorowanie r nazywamy g-retrakcją.*

Niech $h : Z \to X$ będzie hommeomorfizmem i niech $Z \subset Y$. Zauważmy, że jeśli X jest h-retraktem Y, to Z jest retraktem Y w sensie Borsuka. W szczególności jeśli $h = Id_X$, to $X \subset Y$ jest retraktem Y w sensie Borsuka (patrz, [1]). Zauważmy również, że jeśli $g : Z \to X$ jest odwzorowaniem stałym, to X jest g-retraktem Y dla każdej przestrzeni metryzowalnej Y takiej, że $Z \subset Y$.

Definicja 7.2.3. *Niech $Z \subset Y$ i niech $g : Z \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Przestrzeń X nazywamy otoczeniowym g-retraktem przestrzeni Y jeśli istnieją: otwarty zbiór $U \subset Y$ taki, że $Z \subset U$ i ciągłe odwzorowanie $r : U \to X$ takie, że r jest g-retrakcją.*

Propozycja 7.2.4. *([36]) Niech $g : Z \to X$ będzie właściwe i niech $Z \subset Y$. Jeżeli X jest g-retraktem Y, to Z jest domkniętym zbiorem w Y.*

Definicja 7.2.5. *Przestrzeń X nazywamy $\mathbb{D}$-retraktem otoczeniowym ($\mathbb{D}$-retraktem) przestrzeni Y, jeśli istnieje $g \in \mathbb{D}(Z, X)$ takie, że X jest g-retraktem otoczeniowym (g-retraktem) przestrzeni Y.*

Definicja 7.2.6. *Przestrzeń X nazywamy absolutnym relatywnym retraktem (piszemy, $X \in ARR(\mathbb{D})$), jeśli istnieje przestrzeń unormowana E taka, że*

$$E \geq_{\mathbb{D}} X.$$

Zauważmy, że

$$(X \in ARR(\mathbb{H})) \Leftrightarrow (X \in AR).$$

Definicja 7.2.7. *Przestrzeń X nazywamy absolutnym otoczeniowym relatywnym retraktem (piszemy, $X \in ANRR(\mathbb{D})$) jeśli istnieje zbiór otwarty U w pewnej przestrzeni unormowanej E taki, że*

$$U \geq_{\mathbb{D}} X.$$

Jest jasne, że

$$(X \in ANRR(\mathbb{H})) \Leftrightarrow (X \in ANR).$$

Oczywisty jest następujący fakt:

Propozycja 7.2.8. *([36]) Niech X będzie przestrzenią metryzowalną.*
7.2.8.1 $(X \in ARR(\mathbb{D})) \Leftrightarrow$ *(X jest $\mathbb{D}$-retraktem E), gdzie E jest pewną przestrzenią unormowaną.*
7.2.8.2 $(X \in ANRR(\mathbb{D})) \Leftrightarrow$ *(X jest $\mathbb{D}$-retraktem otoczeniowym E), gdzie E jest pewną przestrzenią unormowaną.*

Niech Q oznacza kostkę Hilberta. Podobnie można udowodnić następujący fakt:

Propozycja 7.2.9. *([36]) Niech X będzie zwartą przestrzenią metryzowalną.*
7.2.9.1 $(X \in ARR(\mathbb{D})) \Leftrightarrow$ *(X jest $\mathbb{D}$-retraktem Q),*
7.2.9.2 $(X \in ANRR(\mathbb{D})) \Leftrightarrow$ *(X jest $\mathbb{D}$-retraktem otoczeniowym Q).*

Kolejny fakt pokazuje, że Definicje 7.1.1 i 7.2.6 oraz Definicje 7.1.2 i 7.2.7 są równoważne.

Propozycja 7.2.10. *([36]) Niech X będzie przestrzenią metryzowalną.*
7.2.10.1 $(X \in AMR) \Leftrightarrow (X \in ARR(\mathbb{V}))$,
7.2.10.2 $(X \in ANMR) \Leftrightarrow (X \in ANRR(\mathbb{V}))$.

Nowa interpretacja definicji multiretraktu umożliwia udowodnienie nowych własności.

Propozycja 7.2.11. *Jeżeli $X \in ANRR(\mathbb{V})$ ($X \in ARR(\mathbb{V})$) i przestrzeń Y jest $\mathbb{V}$-retraktem otoczeniowym ($\mathbb{V}$-retraktem) przestrzeni X, to $Y \in ANRR(\mathbb{V})$ ($Y \in ARR(\mathbb{V})$).*

Proof. Na mocy założenia istnieją przestrzeń $Z \subset X$, zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $Z \subset U$, odwzorowanie $r : U \to Y$, takie że $r \circ i = p$, gdzie $i : Z \hookrightarrow U$ jest inkluzją, a $p \in \mathbb{V}(Z, Y)$. Przestrzeń $X \in ANRR(\mathbb{V})$, więc istnieją przestrzeń $Z_1 \subset E$, zbiór otwarty $U_1 \subset E$ taki, że $Z_1 \subset U_1$, odwzorowanie $r_1 : U_1 \to X$, takie że $r_1 \circ i_1 = p_1$, gdzie $i_1 : Z_1 \hookrightarrow U_1$ jest inkluzją, $p_1 \in \mathbb{V}(Z_1, X)$ oraz E jest pewną przestrzenią unormowaną. Niech $Z_2 = p_1^{-1}(Z)$ i niech $p_2 : Z_2 \to Y$ będzie dane wzorem $p_2 = p \circ p'$, gdzie $p' : Z_2 \to Z$, $p'(z) = p_1(z)$ dla wszystkich $z \in Z_2$. Oczywiście $p_2 \in \mathbb{V}(Z_2, Y)$. Niech $U_2 = r_1^{-1}(U)$ i niech $r' : U_2 \to U$ będzie dane wzorem $r'(x) = r_1(x)$ dla każdego $x \in U_2$. Definiujemy p_2-retrakcję $r_2 : U_2 \to Y$ za pomocą wzoru $r_2 = r \circ r'$ i stąd $Y \in ANRR(\mathbb{V})$, gdzie $U_2 \subset E$ jest otwartym otoczeniem Z_2 w przestrzeni E. Druga część dowodu jest analogiczna. □

Propozycja 7.2.12. *Jeżeli $X \in ANRR(\mathbb{D})$ $(X \in ARR(\mathbb{D}))$ i przestrzeń Y jest retraktem przestrzeni X, to $Y \in ANRR(\mathbb{D})$ $(Y \in ARR(\mathbb{D}))$.*

Proof. Wystarczy w dowodzie Propozycji 7.2.11 przyjąć $p = Id_Y$. □

Propozycja 7.2.13. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{D})$. Jeżeli zbiór $U \subset X$ jest otwarty, to $U \in ANRR(\mathbb{D})$.*

Proof. Niech $r : V \to X$ będzie g -retrakcją, gdzie $g \in \mathbb{D}(Z, X)$, $V \subset E$ jest zbiorem otwartym w pewnej przestrzeni unormowanej E i $Z \subset V$. Odzworowanie $r_1 : r^{-1}(U) \to U$ dane wzorem $r_1(x) = r(x)$ dla każdego $x \in r^{-1}(U)$ jest g_1-retrakcją, gdzie $g_1 : g^{-1}(U) \to U$, $g_1(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in g^{-1}(U)$. Jest oczywiste, że $g_1 \in \mathbb{D}(g^{-1}(U), U)$. □

Propozycja 7.2.14. *Niech $X = X_1 \times X_2$. $X \in ANRR(\mathbb{D})$ $(X \in ARR(\mathbb{D}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X_i \in ANRR(\mathbb{D})$ $(X_i \in ARR(\mathbb{D}))$ dla $i = 1, 2$.*

Proof. Niech $X \in ANRR(\mathbb{D})$. Wtedy X_i jest retraktem X dla $i = 1, 2$. Stąd i z Propozycji 7.2.12 $X_i \in ANRR(\mathbb{D})$ dla $i = 1, 2$. Załóżmy teraz, że $X_i \in ANRR(\mathbb{D})$ dla $i = 1, 2$. Niech dla $i = 1, 2$, $r_i : U_i \to X_i$ będzie g_i-retrakcją, gdzie $g_i \in \mathbb{D}(Z_i, X_i)$, U_i jest otwartym otoczeniem Z_i w pewnej przestrzeni unormowanej E_i. Wtedy odwzorowanie $r = r_1 \times r_2 : U = U_1 \times U_2 \to X_1 \times X_2 = X$ jest $g = g_1 \times g_2$-retrakcją. Druga część dowodu jest analogiczna. □

Niech $g \in \mathbb{D}(Z, X)$. Zapis $Z \in ANC(X, g)$ $(Z \in AC(X, g))$ będzie oznaczał, że dla każdej przestrzeni metryzowalnej T i dla każdego domkniętego zanurzenia $h : Z \to T$ przestrzeń X jest $g \circ h^{-1}$-retraktem otoczeniowym ($g \circ h^{-1}$-retraktem) przestrzeni T, gdzie $h^{-1} : h(Z) \to Z$ jest homeomorfizmem odwrotnym. Z kolei zapis $Z \in ANC(X, \mathbb{D})$ $(Z \in AC(X, \mathbb{D}))$ będzie oznaczał, że istnieje $g \in \mathbb{D}(Z, X)$ takie, że $Z \in ANC(X, g)$ $(Z \in AC(X, g))$. Zauważmy, że $X \in ANRR(\mathbb{D})$ $(X \in ARR(\mathbb{D}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: przestrzeń metryzowalna Z i $g \in \mathbb{D}(Z, X)$ takie, że $Z \in ANC(X, g)$ $(Z \in AC(X, g))$ (patrz, (7.10)).

Propozycja 7.2.15. *Niech $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Jeżeli dla każdego n, $X_n \in ANRR(\mathbb{D})$ i dla prawie wszystkich n, $X_n \in ARR(\mathbb{D})$, to $X \in ANRR(\mathbb{D})$.*

Proof. Niech dla każdego n, $Z_n \in ANC(X_n, \mathbb{D})$ i niech dla prawie wszystkich n, $Z_n \in AC(X_n, \mathbb{D})$. Możemy założyć, że istnieje n_0 takie, że dla każdego $n > n_0$, $Z_n \in AC(X_n, \mathbb{D})$. Niech dla każdego $n \leq n_0$, $r_n : U_n \to X_n$ będzie g_n-retrakcją, gdzie $g_n : Z_n \to X_n$ i U_n jest otwartym otoczeniem przestrzeni Z_n w pewnej przestrzeni unormowanej E_n i niech dla każdego $n > n_0$, $r_n : E_n \to X_n$ będzie g_n-retrakcją, gdzie $Z_n \subset E_n$, $g_n : Z_n \to X_n$ i E_n jest pewną przestrzenią unormowaną. Definiujemy

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty} Z_n, \;\; g = \prod_{n=1}^{\infty} g_n, \;\; E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n, \;\; U = \prod_{n=1}^{n_0} U_n \times \prod_{n=n_0+1}^{\infty} E_n, \;\; r = \prod_{n=1}^{\infty} r_n.$$

Stąd $r : U \to X$ jest g-retrakcją. Przestrzeń liniowo-metryczna $E \in AR$, więc $X \in ANRR(\mathbb{D})$. □

Kolejny fakt jest oczywisty.

Propozycja 7.2.16. *Niech $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Przestrzeń $X \in ARR(\mathbb{D})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n, $X_n \in ARR(\mathbb{D})$.*

Korzystając ze znanych metod dowodzenia (patrz, [1]) można wykazać następujący ogólniejszy fakt:

Propozycja 7.2.17. *Niech $Z = Z_1 \cup Z_2$, $X = X_1 \cup X_2$ będą przestrzeniami metryzowalnymi, gdzie X_1 i X_2 zbiory domknięte w X i niech $Z_0 = Z_1 \cap Z_2$, $X_0 = X_1 \cap X_2$ i $g \in \mathbb{D}(Z, X)$. Załóżmy, że $Z_i = g^{-1}(X_i)$ oraz niech $g_i = g_{Z_i}$, $i = 0, 1, 2$.*
7.2.17.1 *Jeżeli $Z_0 \in AR$ i $Z_i \in AC(X_i, g_i)$, to $Z \in AC(X, g)$, $i = 1, 2$.*
7.2.17.2 *Jeżeli $Z_0 \in ANR$ i $Z_i \in ANC(X_i, g_i)$, to $Z \in ANC(X, g)$, $i = 1, 2$.*
7.2.17.3 *Jeżeli $Z \in AC(X, g)$ i X_0 jest retraktem X, to $Z_i \in AC(X_i, g_i)$, $i = 1, 2$.*
7.2.17.4 *Jeżeli $Z \in ANC(X, g)$ i X_0 jest otoczeniowym retraktem X, to $Z_i \in ANC(X_i, g_i)$, $i = 1, 2$.*

Proof. 7.2.17.1. Zanurzamy przestrzeń Z jako domknięty podzbiór w pewnej przestrzeni unormowanej E. Definiujemy:

$$T_0 = \{x \in E;\ \ d(x, Z_1) = d(x, Z_2)\},$$

$$T_1 = \{x \in E;\ \ d(x, Z_1) < d(x, Z_2)\},$$

$$T_2 = \{x \in E;\ \ d(x, Z_1) > d(x, Z_2)\}.$$

Jest jasne, że $E = T_0 \cup T_1 \cup T_2$, zbiór $Z_0 \subset T_0$ jest domknięty w T_0 i $Z_i \cap T_0 = Z_0$ dla $i = 1, 2$. Stąd istnieje retrakcja $s_0 : T_0 \to Z_0$. Niech dla $i = 1, 2$ odwzorowanie $s_i : Z_i \cup T_0 \to Z_i$ będzie dane wzorem:

$$s_i(z) = \begin{cases} z & \text{dla} \quad z \in Z_i, \\ s_0(z) & \text{dla} \quad z \in T_0. \end{cases}$$

Zbiór $Z_i \cup T_0$ jest domknięty w $T_i \cup T_0$ dla $i = 1, 2$. Niech $f_i : E \to X_i$ będzie g_i-retrakcją i niech $r_i = f_i \circ \widetilde{s}_i$, gdzie $\widetilde{s}_i : T_i \cup T_0 \to E$ jest przedłużeniem ciągłym odwzorowania $s_i : Z_i \cup T_0 \to Z_i \subset E$ dla $i = 1, 2$. Odwzorowanie $r : E \to X$ dane wzorem $r(x) = r_i(x)$ dla $x \in T_i \cup T_0$, $i = 1, 2$ jest g-retrakcją i $Z \in AC(X, g)$.

7.2.17.2. Rozważmy zbiory T_i, $i = 0, 1, 2$ określone w dowodzie (7.2.17.1). Przypomnijmy, zė zbiór $Z_0 \subset T_0$ jest domknięty w T_0. Zatem istnieje otoczenie W_0 zbioru Z_0 w przestrzeni T_0 i retrakcja $s_0 : W_0 \to Z_0$. Możemy założyć, że W_0 jest zbiorem domkniętym w T_0. Dla $i = 1, 2$ definujemy odwzorowanie $s_i : Z_i \cup W_0 \to Z_i$ za pomocą wzoru

$$s_i(z) = \begin{cases} z & \text{dla} \quad z \in Z_i, \\ s_0(z) & \text{dla} \quad z \in W_0. \end{cases}$$

Zbiór $W_0 \cup Z_i$ jest domknięty w $T_0 \cup T_i$, $i = 1, 2$. Istnieją otoczenia V_i' zbiorów Z_i w E i g_i-retrakcje, $f_i : V_i' \to X_i$, $i = 1, 2$. Niech $\widetilde{s}_i : V_i \to V_i'$ będzie przedłużeniem $s_i : Z_i \cup W_0 \to Z_i \subset V_i'$, gdzie V_i jest otoczeniem $Z_i \cup W_0$ w $T_0 \cup T_i$, $i = 1, 2$. Jest jasne, że V_i zawiera domknięte otoczenia U_i przestrzeni Z_i w $T_0 \cup T_i$ takie, że $U_i \cap T_0 \subset W_0$. Mamy

$$U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap (T_0 \cup T_1) \cap (T_0 \cup T_2) = U_1 \cap T_0 \subset W_0.$$

Definiujemy g-retrakcję $r : U_1 \cup U_2 \to X$ za pomocą wzoru $r(x) = f_i(\widetilde{s}_i(x))$ dla $x \in U_i$, $i = 1, 2$, gdzie $U_1 \cup U_2 \subset E$ jest zbiorem otwartym w E.

7.2.17.3. Dla $i = 1, 2$ istnieje retrakcja $s_i : X_i \to X_0$ jak obcięcie retrakcji $s : X \to X_0$ do X_i. Niech $d : X \to X_1$ będzie odwzorowaniem danym wzorem

$$d(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in X_1, \\ s_2(x) & \text{dla} \quad x \in X_2. \end{cases}$$

Niech $f : E \to X$ będzie g-retrakcją. Odzworowanie $r : E \to X_1$ dane wzorem $r = d \circ f$ jest g_1-retrakcją, więc $Z_1 \in AC(X, g_1)$. Podobnie dowodzimy, że $Z_2 \in AC(X_2, g_2)$.

7.2.17.4. Dla $i = 1, 2$ istnieje retrakcja $s_i : V \cap X_i \to X_0$ jak obcięcie retrakcji $s : V \to X_0$ do $V \cap X_i$, gdzie V jest otwartym otoczeniem X_0 w przestrzeni X. Niech $d : V \cup X_1 \to X_1$ będzie odwzorowaniem danym wzorem

$$d(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in X_1, \\ s_2(x) & \text{dla} \quad x \in V \cap X_2. \end{cases}$$

Niech $f : U' \to X$ będzie g-retrakcją, gdzie $U' \subset E$ jest zbiorem otwartym i takim, że $Z \subset U'$. Zbiór $V \cup X_1 \subset X$ jest otwarty w X, więc zbiór $U = f^{-1}(V \cup X_1) \subset U'$ jest otwarty w E i taki, że $Z_1 \subset U$. Odzworowanie $r : U \to X_1$ dane wzorem $r = d \circ f_U$ jest g_1-retrakcją, więc $Z_1 \in ANC(X, g_1)$. Podobnie dowodzimy, że $Z_2 \in ANC(X_2, g_2)$. □

7.3 Relatywna homotopia

Badanie kolejnych własności relatywnych retraktów (w szczególności multiretraktów) jest możliwe dzięki relatywnej homotopii i relatywnego przedłużania odwzorowań (patrz, [41]).

Definicja 7.3.1. *Niech $g : Z \to X$ i $f : A \to Z$ będą funkcjami ciągłymi, gdzie $A \subset Y$ jest zbiorem domkniętym. Mówimy, że odwzorowanie ciągłe $F : Y \to X$ jest g-przedłużeniem odwzorowania f, jeśli $F_A = g \circ f$.*

Jest jasne, że jeśli w Definicji 7.3.1 $Z = X$ i $g = Id_X$, to F jest przedłużeniem f, gdzie $Id_X : X \to X$ jest odwzorowaniem identycznościowym.

Definicja 7.3.2. *Niech $f : A \to Z$ będzie ciągłą funkcją, gdzie $A \subset Y$ jest zbiorem domkniętym. Mówimy, że ciągłe odwzorowanie $F : Y \to X$ jest $\mathbb{D}$-przedłużeniem odwzorowania f, jeśli istnieje $g \in \mathbb{D}(Z, X)$ takie, że F jest g-przedłużeniem odwzorowania f.*

Przykład 7.3.3. *Niech $T : X_t \to Q$ i $K : Q \to X_k$ będą odwzorowaniami cell-like (odwzorowania Taylora i Kieslinga, patrz, §3.4) i niech $p : X_t \times Q \to Q \times X_k$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $p = T \times K$. Jest jasne, że p jest cell-like (patrz, [6]) i $(X_t \times Q) \notin NES$ i $(Q \times X_k) \notin NES$ (X_t i X_k są nieprzesuwalne). Niech $f : A \to X_t \times Q$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że nie istnieje ciągłe przedłużenie odwzorowania f, gdzie $A \subset Y$ jest zbiorem domkniętym. Mamy następujące diagramy:*

$$A \xrightarrow{f} X_t \times Q \xrightarrow{\pi_{X_t}} X_t \xrightarrow{T} Q,$$
$$A \xrightarrow{f} X_t \times Q \xrightarrow{\pi_Q} Q \xrightarrow{K} X_k,$$

gdzie π_{X_t} i π_Q są projekcjami. Niech $F_1 : Y \to Q$ będzie przedłużeniem $T \circ \pi_{X_t} \circ f$ i $R : Y \to Q$ będzie przedłużeniem $\pi_Q \circ f$ i niech $F_2 = K \circ R$. Definiujemy p-przedłużenie $F : Y \to Q \times X_k$ odwzorowania f za pomocą wzoru

$$F(y) = (F_1(y), F_2(y)) \text{ dla każdego } y \in Y.$$

Wprowadzimy pojęcie relatywnej homotopii i podamy kilka jej własności. Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi i niech $f_1, f_2 : X \to Y$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Symbolem $f_1 \sim f_2$, będziemy oznaczać homotopię łączącą odwzorowania f_1 i f_2.

Definicja 7.3.4. *Niech $g : Z \to X$ i $f_1, f_2 : X \to Y$ będą ciągłymi funkcjami. Mówimy, że f_1 i f_2 są g-homotopijne (piszemy, $f_1 \sim_g f_2$) jeśli istnieje homotopia $h : Z \times [0,1] \to Y$ taka, że*

$$h(\cdot, 0) = f_1 \circ g \text{ i } h(\cdot, 1) = f_2 \circ g.$$

Zauważmy, że jeśli g jest homeomorfizmem, to $(f_1 \sim_g f_2) \Leftrightarrow (f_1 \sim f_2)$ i jeśli $f_1 \sim f_2$, to dla każdego ciągłego odwzorowania $g : Z \to X$, $f_1 \sim_g f_2$. Niech $x_0 \in X$. Symbolem $C_Y^{x_0} : Y \to X$ będziemy oznaczać odwzorowanie stałe, dane wzorem $C_Y^{x_0}(y) = x_0$ dla każdego $y \in Y$.

Definicja 7.3.5. *Niech $g : Z \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Przestrzeń X nazywamy g-ściągalną do punktu, jeśli istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że*

$$Id_X \sim_g C_X^{x_0}.$$

Zauważmy, że

$$(Id_X \sim_g C_X^{x_0}) \Leftrightarrow (g \sim C_Z^{x_0}). \tag{7.11}$$

Definicja 7.3.6. *Niech $f_1, f_2 : X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi. Mówimy, że f_1 i f_2 są $\mathbb{D}$-homotopijne (piszemy, $f_1 \sim_{\mathbb{D}} f_2$), jeśli istnieje odwzorowanie $g \in \mathbb{D}(Z, X)$ takie, że*

$$f_1 \sim_g f_2.$$

Zauważmy, że

$$(f_1 \sim_{\mathbb{H}} f_2) \Leftrightarrow (f_1 \sim f_2).$$

Niech X i Y będą metryzowalne i niech

$$\mathbb{C}(X, Y) = \{g : X \to Y; \text{ g jest ciągłe}\}.$$

Propozycja 7.3.7. *Relacja $\sim_{\mathbb{D}}$ opisana w Definicji 7.3.6 jest relacją równoważności w przestrzeni $\mathbb{C}(X, Y)$.*

Proof. Jest oczywiste, że $f \circ Id_X \sim f \circ Id_X$, więc $f \sim_{\mathbb{D}} f$ $(Id_X \in \mathbb{D}(X))$ i relacja $\sim_{\mathbb{D}}$ jest zwrotna. $\mathbb{D}$-homotopia jest symetryczna, ponieważ $(f_1 \circ g \sim f_2 \circ g) \Leftrightarrow (f_2 \circ g \sim f_1 \circ g)$, gdzie $g \in \mathbb{D}(X)$. Pokażemy, że relacja jest przechodnia. Niech $f_1 \circ g_1 \sim f_2 \circ g_1$ i $f_2 \circ g_2 \sim f_3 \circ g_2$, gdzie $g_1, g_2 \in \mathbb{D}(X)$ i $g_1 : Z_1 \to X$, $g_2 : Z_2 \to X$. Definiujemy przestrzeń

$$Z = \{(z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2; \; g_1(z_1) = g_2(z_2)\} = \bigcup_{x \in X} g_1^{-1}(x) \times g_2^{-1}(x).$$

Przestrzeń Z jest niepusta. Niech $\pi_i : Z \to Z_i$, $i = 1, 2$, będzie projekcją. Zauważmy, że $g_1 \circ \pi_1 = g_2 \circ \pi_2$. Mamy

$$f_1 \circ g_1 \circ \pi_1 \sim f_2 \circ g_1 \circ \pi_1 = f_2 \circ g_2 \circ \pi_2 \sim f_3 \circ g_2 \circ \pi_2.$$

Stąd $f_1 \circ g \sim f_3 \circ g$, gdzie $g = g_1 \circ \pi_1 = g_2 \circ \pi_2$. Odzworowanie $g \in \mathbb{D}(X)$, ponieważ dla każdego $x \in X$ $g^{-1}(x) = g_1^{-1}(x) \times g_2^{-1}(x)$ (patrz, (7.4)), więc $f_1 \sim_{\mathbb{D}} f_3$ i dowód jest zakończony. □

Definicja 7.3.8. *Mówimy, że X jest $\mathbb{D}$-ściągalna do punktu, jeśli istnieje $g \in \mathbb{D}(X)$, $g : Z \to X$ takie, że X jest g-ściągalna do punktu.*

Zauważmy, że X jest $\mathbb{H}$-ściągalna do punktu wtedy i tylko wtedy, gdy X jest ściągalna do punktu. Podamy przykład przestrzeni X takiej, że X jest $\mathbb{CE}$-ściągalna do punktu i nie jest ściągalna do punktu. Przypomnijmy, że, jeśli X jest ściągalna do punktu, to jest przesuwalna.

Przykład 7.3.9. *Niech X będzie przestrzenią nieprzesuwalną i zwartą i taką, że istnieje odwzorowanie cell-like $p : Q \to X$, gdzie Q jest kostką Hilberta. Przestrzeń X nie jest ściągalna do punktu. Niech $x_0 \in X$ i niech $p(z_0) = x_0$. Definiujemy homtopię $h : Q \times [0, 1] \to X$ za pomocą wzoru $h(z, t) = p((1 - t)z + tz_0)$ dla każdego $(z, t) \in Q \times [0, 1]$. Stąd X jest $\mathbb{CE}$-ściągalna do punktu.*

Mamy następujące twierdzenie o $\mathbb{D}$-przedłużaniu, $\mathbb{D}$-homotopii:

Propozycja 7.3.10. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{D})$ i niech Y będzie przestrzenią metryzowalną. Niech $Z \in ANC(X, \mathbb{D})$. Załóżmy, że $h : A \times [0, 1] \to Z$ jest ciągłym odwzorowaniem, gdzie $A \subset Y$ jest zbiorem domkniętym. Jeśli $h(\cdot, 1) : A \to Z$ ma ciągłe przedłużenie $F : Y \to Z$, to h ma ciągłe $\mathbb{D}$-przedłużenie $H : Y \times [0, 1] \to X$.*

Proof. Niech $P = (Y \times \{1\}) \cup (A \times [0, 1])$ i niech $r : P \to Z$ będzie odwzorowaniem danym wzorem:

$$r(x, t) = \begin{cases} h(x, t) & \text{jeżeli} \quad (x, t) \in A \times [0, 1], \\ F(x) & \text{jeżeli} \quad (x, t) \in Y \times \{1\}. \end{cases}$$

Istnieje zbiór otwarty V w pewnej przestrzeni unormowanej E taki, że $Z \subset_h V$ i $f : V \to X$ jest g-retrakcją, gdzie $g \in \mathbb{D}(X)$, $g : Z \to X$. Niech $R : U \to X$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $R = f \circ \widetilde{r}$, gdzie $\widetilde{r} : U \to V$ jest ciągłym przedłużeniem r na pewien zbiór otwarty $U \subset Y \times [0, 1]$ taki, że $P \subset U$. Niech $s : Y \times [0, 1] \to U$ będzie ciągłą funkcją taką, że $s(y, t) = (y, t)$ dla każdego $(y, t) \in P$ (patrz, [1]). Definiujemy odwzorowanie $H : Y \times [0, 1] \to X$ za pomocą wzoru

$$H(y, t) = R(s(y, t)) \quad \text{dla każdego} \quad (y, t) \in Y \times [0, 1].$$

Stąd H jest g-przedłużeniem h i dowód jest zakończony. □

Symbolem $\mathbb{D}_s(X)$ oznaczmy zbiór typu $\mathbb{D}$ spełniający warunek:

$$(g_1 \in \mathbb{D}_s(Z) \ \text{ i } \ g_2 \in \mathbb{D}_s(Z,X)) \Rightarrow ((g_2 \circ g_1) \in \mathbb{D}_s(X)). \tag{7.12}$$

Warunek (7.12) spełniają, dla przykładu zbiory $\mathbb{H}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ i $\mathbb{P}(X)$.

Propozycja 7.3.11. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{D}_s)$. Jeśli istnieje $\mathbb{D}_s$-ściągalna przestrzeń $Z \in ANC(X, \mathbb{D}_s)$, to $X \in ARR(\mathbb{D}_s)$.*

Proof. Niech $h : P \times [0,1] \to Z$ będzie homotopią taką, że $h(x,1) = z_0$ i $h(x,0) = g_1(x)$ dla każdego $x \in P$, gdzie $z_0 \in Z$ (patrz, (7.11)) jest wybranym punktem i $g_1 \in \mathbb{D}_s(P,Z)$. Niech E będzie przestrzenią unormowaną taką, że $P \subset E$. Z Propozycji 7.3.10 istnieją $g_2 \in \mathbb{D}_s(Z,X)$ i $H : E \times [0,1] \to X$ takie, że H jest g_2-przedłużeniem h. Definiujemy $(g_2 \circ g_1)$-retrakcję $r : E \to X$ za pomocą wzoru

$$r(x) = H(x,0) \ \text{ dla każdego } \ x \in E.$$

Jeżeli $x \in P$, to $r(x) = H(x,0) = g_2(h(x,0)) = g_2(g_1(x))$. Z Propozycji 7.2.8 dostajemy tezę. $\square$

Z Propozycji 7.3.12 dostajemy następujące wnioski:

Propozycja 7.3.12. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{V})$. Jeśli istnieje $\mathbb{V}$-ściągalna przestrzeń $Z \in ANC(X, \mathbb{V})$, to $X \in ARR(\mathbb{V})$.*

Propozycja 7.3.13. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{D})$. Jeżeli istnieje przestrzeń ściągalna $Z \in ANC(X, \mathbb{D})$, to $X \in ARR(\mathbb{D})$.*

Propozycja 7.3.14. *Jeśli $X \in ARR(\mathbb{D})$, to X jest $\mathbb{D}$-ściągalna do punktu.*

Wprowadzimy następującą definicję (patrz, Definicja 7.1.3):

Definicja 7.3.15. *Niech X będzie przestrzenią metryzowalną. Mówimy, że przestrzeń X jest lokalnie $\mathbb{D}$-ściągalna, jeśli dla każdego $x \in X$ i dla każdego otwartego otoczenia $U \subset X$ punktu x istnieje otwarte otoczenie $V \subset U$ punktu x takie, że dla każdego otwartego otoczenia $W \subset U$ punktu x istnieją: przestrzeń Z_V, $g_V \in \mathbb{D}(Z_V, V)$, ciągłe odwzorowanie $C_W : Z_V \to W$ takie, że*

$$i_V \circ g_V \sim i_W \circ C_W, \tag{7.13}$$

gdzie $i_V : V \hookrightarrow U$ i $i_W : W \hookrightarrow U$ są inkluzjami.

Zauważmy, że jeżeli istnieje odwzorowanie ciągłe $C_V : V \to W$ takie, że $C_W = C_V \circ g_V$, to warunek (7.13), Definicji 7.3.15 można zapisać tak:

$$i_V \sim_{\mathbb{D}} i_W \circ C_V. \tag{7.14}$$

Z Twierdzenia 7.1.4 wynika następujący fakt:

Propozycja 7.3.16. *Jeżeli $X \in ANRR(\mathbb{CE})$, to X jest lokalnie $\mathbb{CE}$-ściągalna.*

Na koniec podamy następujący przykład:

Przykład 7.3.17. *Niech $f = M_c : Q \to X_{mc} = X$ będzie odwzorowaniem cell-like i takie, że X nie jest lokalnie ściągalna. Jest oczywiste, że $X \notin ANR$, ale wiemy, że $X \in ARR(\mathbb{CE}) \subset ANRR(\mathbb{CE})$, więc z Propozycji 7.3.16 jest lokalnie $\mathbb{CE}$-ściągalna.*

8. ZASTOSOWANIA

8.1 Preliminaria

W tym rozdziale będziemy potrzebować następujące definicje i fakty:

Twierdzenie 8.1.1. *[6] Rozważmy diagram:*

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} X,$$

w którym $X \in ANR$, p jest odwzorowaniem Vietorisa i q jest zwarte. Wtedy $q_* \circ p_*^{-1}$ jest endomorfizmem Leraya i $\Lambda(q_* \circ p_*^{-1}) \neq 0$ implikuje, że p i q mają punkt koincydencji.

Propozycja 8.1.2. *([8]) Załóżmy, że dla odwzorowania ciągłego $f : X \to X$ liczba Lefschetza $\Lambda(f_*)$ jest poprawnie zdefiniowana i niech ρ będzie liczbą pierwszą, wtedy $\Lambda(f^\rho)$ odwzorowania f^ρ jest poprawnie zdefiniowana i $\Lambda(f_*) \equiv \Lambda(f_*^\rho)$ mod ρ.*

Propozycja 8.1.3. *([6]) Niech $X \in ANR$ i niech $\varphi : X \multimap X$ będzie zwarte i acykliczne. Wtedy $\Lambda(\varphi_*)$ jest poprawnie zdefiniowana i jeśli $\Lambda(\varphi_*) \neq 0$ wtedy $Fix(\varphi) \neq \emptyset$.*

Propozycja 8.1.4. *[32] Niech $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in D(X, Y)$, gdzie*

$$X \xleftarrow{p_1} Z_1 \xrightarrow{q_1} Y, \qquad X \xleftarrow{p_2} Z_2 \xrightarrow{q_2} Y.$$

Wtedy istnieje $(p, q), (p, q') \in D(X, Y)$ takie, że:

$$(p_1, q_1) \sim_m (p, q) \text{ and } (p_2, q_2) \sim_m (p, q').$$

Propozycja 8.1.5. *[33] Przestrzeń $X \in MCN_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń metryzowalna Z i odwzorowanie Vietorisa $p : Z \to X$ takie, że $p \sim C_1^{x_0}$, gdzie $C_1^{x_0} : Z \to X$ jest odwzorowaniem stałym, danym wzorem $C_1^{x_0}(z) = x_0$ dla każdego $z \in Z$.*

Definicja 8.1.6. *Niech $g : Z \to X$ i $f_1, f_2 : X \to Y$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Mówimy, że f_1 i f_2 są g-homotopijne (piszemy, $f_1 \sim_g f_2$), jeśli istnieje homotopia $h : Z \times [0,1] \to Y$ taka, że*

$$h(\cdot, 0) = f_1 \circ g \text{ i } h(\cdot, 1) = f_2 \circ g.$$

Definicja 8.1.7. *Mówimy, że f_1 i f_2 są $\mathbb{D}$-homotopijne (piszemy, $f_1 \sim_{\mathbb{D}} f_2$), jeśli $f_1 \sim_g f_2$ dla pewnego $g \in \mathbb{D}(X)$.*

Propozycja 8.1.8. *[36] Niech X będzie przestrzenią metryzowalną.*
8.1.8.1 $(X \in AMR) \Leftrightarrow (X \in ARR(\mathbb{V}))$,
8.1.8.2 $(X \in ANMR) \Leftrightarrow (X \in ANRR(\mathbb{V}))$.

Mówimy, że multifunkcja $\varphi : X \to_m X$ ma punkt stały, jeśli istnieje punkt $x \in X$ taki, że $x \in \varphi(x)$ (piszemy, $Fix(\varphi) \neq \emptyset$). Multifunkcja $\varphi : X \to_m Y$ jest zwarta, jeśli istnieje $(p, q) \in \varphi_m$ taka, że odwzorowanie $q : Z \to Y$ jest zwarte, to znaczy $\overline{q(Z)} \subset Y$ jest zbiorem zwartym. Zwarta multifunkcja $\varphi : X \to_m X$ jest odwzorowaniem Lefschetza, jeśli φ_* jest endomorfizmem Leraya i

$$(\Lambda(\varphi) \neq 0) \Rightarrow (Fix(\varphi) \neq \emptyset).$$

Mówimy, że przestrzeń X ma własność punktu stałego w kontekście multimorfizmów (piszemy, $X \in FPP_m$), jeżeli każda zwarta multifunkcja $\psi : X \to_m X$ jest odwzorowaniem Lefschetza.

Twierdzenie 8.1.9. *[26] Niech* $X \in ANMR$*. Wtedy* $X \in FPP_m$*.*

Propozycja 8.1.10. *[2] Niech* X *i* Y *będą przestrzeniami zwartymi. Przestrzeń* $X \times Y$ *jest przesuwalna wtedy i tylko wtedy, gdy* X *i* Y *są przesuwalne.*

Definicja 8.1.11. *Niech* X *będzie przestrzenią metryzowalną i niech* $x_0 \in X$*. Niech* $C^{x_0} : X \to X$ *będzie odzworowaniem stałym, to znaczy* $C^{x_0}(x) = x_0$ *dla każdego* $x \in X$*. Mówimy, że przestrzeń* X *jest multiściągalna do punktu* x_0 *w kontekście multimorfizmów (piszemy,* $X \in MCN_m$*) jeżeli*

$$[(Id_X, Id_X)]_m = Id_m \sim_{HM} C_m^{x_0} = [(Id_X, C^{x_0})]_m.$$

Propozycja 8.1.12. *[36] Jeżeli* $X \in MCN_m$*, to* X *jest acykliczna i łukowo spójna.*

Definicja 8.1.13. *Niech* $g : Z \to X$ *będzie ciągłym odwzorowaniem. Mówimy, że* X *jest* g*-ściągalna do punktu* $x_0 \in X$*, jeśli istnieje homotopia* $h : Z \times [0,1] \to X$ *taka, że*

$$h(\cdot, 0) = g \;\; i \;\; h(\cdot, 1) = C_1^{x_0},$$

gdzie $C_1^{x_0} : Z \to X$ *jest odwzorowaniem stałym, danym wzorem* $C_1^{x_0}(z) = x_0$ *dla każdego* $z \in Z$*.*

Definicja 8.1.14. *Mówimy, że* X *jest* $\mathbb{D}$*-ściągalna do punktu* $x_0 \in X$*, jeśli istnieje* $g \in \mathbb{D}(X)$*,* $g : Z \to X$ *takie, że* X *jest* g*-ściągalna do punktu* $x_0 \in X$*.*

Propozycja 8.1.15. *[1] Niech dla każdego* n*,* X_n *będzie przestrzenią zwartą i niech* $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$*. Jeśli dla każdego* n*,* X_n *ma trywialny kształt, to* X *ma trywialny kształt.*

Propozycja 8.1.16. *[37] Niech dla każdego* n*,* X_n *będzie zwartą przestrzenią i niech* $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$*. Jeżeli dla każdego* n*,* X_n *jest acykliczna, to* X *jest acykliczna.*

8.2 Punkty stałe

Multiretrakty prawostronne w odróżnieniu od multiretraktów lewostronnych mają własność punktu stałego. Używając multimorfizmów wykażemy, że multiretrakty prawostronne w kontekście punktu stałego mają podobne własności do własności retraktów. Szczegóły można znaleźć w pracy [26]. W tym paragrafie, zakładamy, że wszystkie przestrzenie są metryzowalne. Niech $\psi : X \to_m X$ będzie multifunkcją wyznaczoną przez multimorfizm $\psi_m = [(p,q)]_m \in M_m(X,X)$. Niech

$$\widetilde{\mathbf{H}}_*(\psi) = \psi_* = q_* \circ p_*^{-1}$$

i jeśli homomorfizm $\psi_* : H_*(X) \to H_*(X)$ jest endomorfizmem Leraya, to uogólnioną liczbę Lefschetza odwzorowania ψ będziemy oznaczać symbolem

$$\Lambda(\psi) = \Lambda(\psi_*).$$

Niech $X_0 \subset X$. Odwzorowanie $\varphi : (X, X_0) \multimap (X, X_0)$ $(\varphi(X_0) \subset X_0)$ jest multifunkcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_X : X \multimap X$ dane wzorem

$$\varphi_X(x) = \varphi(x) \;\text{ dla każdego }\; x \in X$$

jest multifunkcją i $\varphi_X(X_0) \subset X_0$. Wtedy odwzorowanie $\varphi_{X_0} : X_0 \multimap X_0$ dane wzorem

$$\varphi_{X_0}(x) = \varphi(x) \text{ dla każdego } x \in X_0$$

jest multifunkcją. Rzeczywiście, niech $(p,q) \in (\varphi_X)_m$, $p,q : Z \to X$. Niech $\widetilde{p}, \widetilde{q} : (Z, p^{-1}(X_0)) \to (X, X_0)$ $\widetilde{p}(z) = p(z)$, $\widetilde{q}(z) = q(z)$ dla wszystkich $z \in Z$ i $\overline{p}, \overline{q} : p^{-1}(X_0) \to X_0$, $\overline{p}(z) = p(z)$, $\overline{q}(z) = q(z)$ dla wszystkich $z \in p^{-1}(X_0)$. Kładziemy

$$(\varphi_{X_0})_m = [(\overline{p}, \overline{q})]_m \text{ i } \varphi_m = [(\widetilde{p}, \widetilde{q})]_m.$$

Taka definicja jest poprawna. Rzeczywiście, zauważmy, że

$$(\varphi_{X_0})_m = [(\overline{p}, \overline{q})]_m = [(p,q)]_m \circ [(Id_{X_0}, i)]_m = (\varphi_X)_m \circ i_m, \tag{8.1}$$

gdzie

$$X_0 \xleftarrow{Id_{X_0}} X_0 \xrightarrow{i} X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} X,$$

$i : X_0 \hookrightarrow_m X$ jest inkluzją wyznaczoną przez $i_m = [(Id_{X_0}, i)]_m$.

Mamy następujący diagram:

$$H_*(X, X_0) \xleftarrow{\widetilde{p}_*} H_*(Z, p^{-1}(X_0)) \xrightarrow{\widetilde{q}_*} H_*(X, X_0), \tag{8.2}$$

gdzie $\widetilde{p}_*$ jest izomorfizmem (patrz, [6]). Załóżmy, że

$$\widetilde{q}_* \circ \widetilde{p}_*^{-1} : H_*(X, X_0) \to H_*(X, X_0) \tag{8.3}$$

jest endomorfizmem Leraya. Dla takiego φ, definiujemy uogólnioną liczbę Lefschetza przyjmując

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\widetilde{q}_* \circ \widetilde{p}_*^{-1}). \tag{8.4}$$

Uogólniona liczba Lefschetza odwzorowania φ jest poprawnie zdefiniowana. Jest to wynik następującej, znanej formuły:

Propozycja 8.2.1. *([6]) Niech $X_0 \subset X$ będzie niepustym zbiorem i niech $(p,q) \in D(X,X)$ takie, że $q(p^{-1}(X_0)) \subset X_0$. Jeśli dowolne dwa endomorfizmy wybrane z endomorfizmów: $\widetilde{q}_* \circ \widetilde{p}_*^{-1} : H_*(X, X_0) \to H_*(X, X_0)$, $q_* \circ p_*^{-1} : H_*(X) \to H_*(X)$ i $\overline{q}_* \circ \overline{p}_*^{-1} : H_*(X_0) \to H_*(X_0)$ są endomorfizmami Leraya, to jest nim też trzeci i*

$$\Lambda(\widetilde{q}_* \circ \widetilde{p}_*^{-1}) = \Lambda(q_* \circ p_*^{-1}) - \Lambda(\overline{q}_* \circ \overline{p}_*^{-1}).$$

Z aksjomatu homologicznej równości, Propozycji 8.2.1 i (8.4) dostajemy następujący fakt:

Propozycja 8.2.2. *Niech $\varphi : (X, X_0) \to_m (X, X_0)$ będzie multifunkcją. Jeśli dowolne dwa endomorfizmy wybrane z endomorfizmów: $\varphi_* : H_*(X, X_0) \to H_*(X, X_0)$, $(\varphi_X)_* : H_*(X) \to H_*(X)$ i $(\varphi_{X_0})_* : H_*(X_0) \to H_*(X_0)$ są endomorfizmami Leraya, to jest nim też trzeci i*

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi_X) - \Lambda(\varphi_{X_0}).$$

Niech $A \subset X$ będzie niepustym zbiorem i niech $\varphi : X \to_m Y$ będzie multifunkcją. Mamy multifunkcję $\varphi_A : A \to_m Y$ daną za pomocą wzoru

$$\varphi_A(x) = \varphi(x) \ \text{dla każdego} \ x \in A. \tag{8.5}$$

Niech $\varphi : X \to_m X$. Następujące odwzorowanie:

$$\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi \ \ (n\text{-razy } \varphi) \tag{8.6}$$

będziemy oznaczać symbolem $\varphi^n : X \to_m X$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Przypomnijmy kilka potrzebnych faktów:

Propozycja 8.2.3. *([6]) Jeżeli $u : E \to E$ jest słabo nilpotentnym endomorfizmem, to $\Lambda(u) = 0$.*

Propozycja 8.2.4. *([6]) Załóżmy, że dla multifunkcji $\varphi : X \to_m X$ uogólniona liczba Lefschetza $\Lambda(\varphi)$ jest poprawnie zdefiniowana i niech ρ będzie liczbą pierwszą, to $\Lambda(\varphi^\rho)$ odwzorowania φ^ρ jest poprawnie zdefiniowana i*

$$\Lambda(\varphi) \equiv \Lambda(\varphi^\rho) \ mod \ \rho.$$

Propozycja 8.2.5. *([6]) Załóżmy, że w kategorii przestrzeni liniowych z gradacją następujący diagram jest przemienny*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "u"] & E'' \\
E' \arrow[u, "u'"] \arrow[r, "u"] & E''. \arrow[u, "u''"'] \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

Jeżeli u' lub u'' jest endomorfizmem Leraya, to endomorfizmem Leraya jest też drugi endomorfizm i

$$\Lambda(u') = \Lambda(u'').$$

Z Twierdzenia 8.1.9 i Propozycji 8.1.8 mamy:

Twierdzenie 8.2.6. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{V})$. Wtedy $X \in FPP_m$.*

Definicja 8.2.7. *Multifunkcję $\varphi : X \to_m X$ nazywamy zwartą pochłaniającą kontrakcją (piszemy, $\varphi \in CAC(X)$) pod warunkiem, że istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że:*
8.2.7.1 *$\varphi(U) \subset U$ i odwzorowanie $\varphi_U : U \to_m U$ jest zwarte,*
8.2.7.2 *dla każdego $x \in X$ istnieje $n = n_x$ takie, że $\varphi^n(x) \subset U$.*

Niech

$$K(X) = \{\varphi : X \to_m X; \ \varphi \ \text{jest zwarte}\}.$$

Jest oczywiste, że

$$K(X) \subset CAC(X).$$

Twierdzenie 8.2.8. *([26]) Jeżeli $X \in ANRR(\mathbb{V})$ $(ANMR)$ i $\varphi_X \in CAC(X)$, to φ_X jest odwzorowaniem Lefschetza.*

Propozycja 8.2.9. *([26]) Jeśli $\varphi_X \in CAC(X)$ i $X \in ANRR(\mathbb{V})$ jest przestrzenią acykliczną (w szczególności, jeśli $X \in ARR(\mathbb{V})$), to $Fix(\varphi_X) \neq \emptyset$.*

Podamy teraz zastosowanie homotopii relatywnej do teorii punktów stałych.

Propozycja 8.2.10. *Niech $g : Z \to X$ i $f_1, f_2 : X \to Y$ będą ciągłymi odwzorowaniami i niech $g_* : H_*(Z) \to H_*(X)$ będzie epimorfizmem. Jeżeli $f_1 \sim_g f_2$, to $f_{1*} = f_{2*}$.*

Proof. Z założenia mamy $(f_1 \circ g) \sim (f_2 \circ g)$. Stąd

$$f_{1*} \circ g_* = (f_1 \circ g)_* = (f_2 \circ g)_* = f_{2*} \circ g_*,$$

gdzie

$$H_*(Z) \xrightarrow{g_*} H_*(X) \xrightarrow{f_{1*}, f_{2*}} H_*(Y).$$

Niech $a \in H_*(X)$. Wtedy istnieje $b \in H_*(Z)$ takie, że $g_*(b) = a$. Mamy

$$f_{1*}(a) = f_{1*}(g_*(b)) = f_{2*}(g_*(b)) = f_{2*}(a)$$

i dowód jest zakończony. □

Z Propozycji 8.2.10 i twierdzenia Hopfa mamy następujący fakt:

Propozycja 8.2.11. *Niech $g : Z \to \mathbb{S}^n$ i $f_1, f_2 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ będą ciągłymi odwzorowaniami i niech $g_* : H_*(Z) \to H_*(\mathbb{S}^n)$ będzie epimorfizmem. Wtedy mamy*

$$f_1 \sim_g f_2 \quad \textit{wtedy i tylko wtedy} \quad f_1 \sim f_2.$$

Propozycja 8.2.12. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{V})$ będzie przestrzenią spójną, $g : Z \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $g_* : H_*(Z) \to H_*(X)$ jest epimorfizmem i niech $f : X \to X$ będzie zwarte. Jeżeli istnieje liczba naturalna n taka, że*

$$f^n \sim_g C_X^{x_0},$$

to f ma punkt stały.

Proof. Zauważmy, że z założenia dostajemy

$$f^{n+j} \sim_g C_X^{f^j(x_0)}$$

dla każego $j \geq 0$. Stąd istnieje liczba pierwsza $\rho \geq n$ taka, że

$$f^\rho \sim_g C_X^{f^{\rho-n}(x_0)}.$$

Z Propozycji 8.2.10 dla każdego $k \geq 1$ odwzorowanie f_{k*}^ρ jest homorfizmem zerowym, więc $\Lambda(f_*^\rho) = 1$. Z Propozycji 8.1.2 mamy

$$\Lambda(f_*) \equiv \Lambda(f_*^\rho) \ mod \ \rho.$$

Stąd $\Lambda(f_*) \neq 0$ i z Propozycji 8.1.3 f ma punkt stały. □

Z Propozycji 8.2.12 dostajemy następujący fakt:

Propozycja 8.2.13. *Niech $X \in ANRR(\mathbb{V})$ będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \to X$ będzie zwarte. Jeżeli istnieje liczba naturalna n taka, że*

$$f^n \sim_{\mathbb{V}} C_X^{x_0},$$

to f ma punkt stały.

8.3 Koincydencja

Bardzo ważnym zastosowaniem g-retraktów (w szczególności multiretraktów, patrz [36]) jest zastosowanie do teorii koincydencji. Udowodniliśmy też, że uogólnione odwzorowania Vietorisa mają w odpowiednich przestrzeniach własność koincydencji (patrz, [28]). Z Definicji 8.1.6 dostajemy (patrz, Propozycja 8.1.5)

$$(Id_X \sim_g C^{x_0}) \Leftrightarrow (g \sim C_1^{x_0}),$$

gdzie $C_1^{x_0} : Z \to X$ jest odwzorowaniem stałym. Niech $\mathbb{R}^{n+1}$ będzie przestrzenią euklidesową i niech $\mathbb{K}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie domkniętą kulą o środku w punkcie 0 i promieniu 1 i niech $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$ będzie sferą. Niech $f, g : X \to Y$. Mówimy, że f i g mają punkt koincydencji, jeśli istnieje punkt $x \in X$ taki, że $f(x) = g(x)$.

W kolejnych trzech faktach będziemy zakładać, że $n \geq 1$. Mamy następujące twierdzenie (patrz, [8]):

Twierdzenie 8.3.1. *([36]) Niech Y będzie przestrzenią ściągalną do punktu i niech $g : Z \to \mathbb{S}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym, gdzie $Z \subset Y$ jest niepustym i domkniętym podzbiorem. Następujące warunki są równoważne:*
8.3.1.1 *$\mathbb{S}^n$ nie jest g-ściągalna do punktu,*
8.3.1.2 *Niech $G : Y \to \mathbb{R}^{n+1}$ będzie ciągłym przedłużeniem odwzorowania g. Każde ciągłe odwzorowanie $F : Y \to \mathbb{R}^{n+1}$ spełnia jeden z poniższych warunków:*
(i) F i G mają punkt koincydencji,
(ii) istnieje punkt $z \in Z$ taki, że $G(z) = \lambda F(z)$ dla pewnego $0 < \lambda < 1$;
8.3.1.3 *Każde ciągłe odwzorowanie $F : Y \to \mathbb{R}^{n+1}$ takie, że $F(Z) \subset \mathbb{K}^{n+1}$ i G mają punkt koincydencji, gdzie G jest takie, jak w* (8.3.1.2)*;*
8.3.1.4 *$\mathbb{S}^n$ nie jest g-retraktem przestrzeni Y.*

Propozycja 8.3.2. *([36]) Niech Y będzie przestrzenią acykliczną (w szczególności, przestrzenią ściągalną) i niech $g : Z \to \mathbb{S}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $g_* : H_*(Z) \to H_*(\mathbb{S}^n)$ jest epimorfizmem, gdzie $Z \subset Y$ jest zbiorem niepustym. Wtedy $\mathbb{S}^n$ nie jest g-retraktem przestrzeni Y.*

Przypomnijmy, że odwzorowanie ciągłe $f : X \to Y$ jest uniwersalne, jeśli dla każdego odwzorowania ciągłego $g : X \to Y$, f i g mają punkt koincydencji (patrz, [10, 11]). Dzięki Propozycji 8.3.2, Twierdzenie 8.3.1 jest prawdziwe dla szerokiej klasy odwzorowań ciągłych $g : Z \to \mathbb{S}^n$ indukujących epimorfizm na homologiach. Z Twierdzenia 8.3.1 (warunek, (8.3.1.3)) i Propozycji 8.3.2 wynika następujący fakt:

Propozycja 8.3.3. *([36]) Niech Y będzie ściągalna do punktu i niech $G : Y \to \mathbb{K}^{n+1}$ będzie ciągłym odwzorowaniem. Załóżmy, że istnieje domknięty zbiór $Z \subset Y$ taki, że $G(Z) \subset \mathbb{S}^n$ i odwzorowanie $g : Z \to \mathbb{S}^n$ dane wzorem $g(x) = G(x)$ dla każdego $x \in Z$ indukuje epimorfizm $g_* : H_*(Z) \to H_*(\mathbb{S}^n)$. Wtedy G jest odwzorowaniem uniwersalnym.*

Uogólnione odwzorowania Vietorisa będziemy stosować do teorii koincydencji i odwzorowań istotnych.

Definicja 8.3.4. *Niech $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in D(X, Y)$, gdzie*

$$X \xleftarrow{p_1} Z_1 \xrightarrow{q_1} Y, \qquad X \xleftarrow{p_2} Z_2 \xrightarrow{q_2} Y.$$

Mówimy, że diagramy (p_1, q_1) i (p_2, q_2) mają punkt koincydencji

$$(piszemy, \ \ (p_1, q_1) \sim_{z_0} (p_2, q_2))$$

jeśli istnieją: przestrzeń metryzowalna Z, odwzorowania Vietorisa $p_3 : Z \to Z_1$, $p_4 : Z \to Z_2$ i punkt $z_0 \in Z$ takie, że $p_1 \circ p_3 = p_2 \circ p_4$ i

$$q_1(p_3(z_0)) = q_2(p_4(z_0)).$$

Definicja 8.3.5. *Niech $\varphi, \psi : X \to_m Y$. Mówimy, że multifunkcje φ i ψ mają punkt koincydencji, jeśli istnieją diagramy $(p_1, q_1) \in \varphi_m$ i $(p_2, q_2) \in \psi_m$ takie, że*

$$(p_1, q_1) \sim_{z_0} (p_2, q_2).$$

Mamy następujący fakt:

Propozycja 8.3.6. *([32]) Niech $\varphi, \psi : X \to_m Y$. Multifunkcje φ i ψ mają punkt koincydencji wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że*

$$\varphi(x_0) \cap \psi(x_0) \neq \emptyset.$$

Zauważmy, że z Definicji 8.3.5 i Propozycji 8.3.6 wynika, że jeśli multifunkcje φ i ψ mają punkt koincydencji, to dla każdego diagramu $(p_1, q_1) \in \varphi_m$ i $(p_2, q_2) \in \psi_m$

$$(p_1, q_1) \sim_{z_0} (p_2, q_2) \ \text{(patrz, Definicja 8.3.4).}$$

Mówimy, że multifunkcja $\psi : X \to_m Y$ jest zwarta, jeśli dla pewnego $(p, q) \in \psi_m$, q jest odwzorowaniem zwartym.

Twierdzenie 8.3.7. *([32]) Niech $\Delta : X \to_m Y$, $\Delta \in GV$ i niech $Y \in ANRR(\mathbb{V})$. Załóżmy, że $\psi : X \to_m Y$ jest zwartą multifunkcją. Wtedy*

$$(\psi \circ \overleftarrow{\Delta})_* : H_*(Y) \to H_*(Y)$$

jest endomorfizmem Leraya i jeżeli $\Lambda((\psi \circ \overleftarrow{\Delta})_*) \neq 0$, to ψ i Δ mają punkt koincydencji.

W szczególności z Twierdzenia 8.3.7 otrzymujemy następujący fakt:

Propozycja 8.3.8. *([32]) Niech $\Delta : X \to_m Y$, $\Delta \in GV$ i niech $Y \in ARR(\mathbb{V})$. Załóżmy, że $\psi : X \to_m Y$ jest zwartą multifunkcją. Wtedy ψ i Δ mają punkt koincydencji.*

Twierdzenia o punktach koincydencji, mają zastosowanie do teorii odwzorowań istotnych. Odwzorowania istotne wykorzystuje się do rozwiązywania inkluzji różniczkowych. Przypomnimy definicję odwzorowania istotnego. Symbolem clA będziemy oznaczać domknięcie zbioru A w przestrzeni X, natomiast symbolem $bdA = clA \cap cl(X \backslash A)$ będziemy oznaczać brzeg zbioru A. Niech E_1, E_2 będą przestrzeniami liniowymi i metrycznymi i niech $U \subset E_1$ będzie zbiorem otwartym. Załóżmy, że $\varphi : clU \to_m E_2$ jest multifunkcją taką, że $\varphi_b^{-1}\{0\} \subset U$. Mówimy, że φ jest istotne, jeżeli dla każdej zwartej multifunkcji $\psi : clU \to_m E_2$ takiej, że dla każdego $x \in bdU$ $\psi(x) = \{0\}$ istnieje punkt $x_0 \in U$ taki, że $\varphi(x_0) \cap \psi(x_0) \neq \emptyset$. Następujący fakt nie wymaga dowodu (patrz, Propozycja 8.3.8):

Propozycja 8.3.9. *([32]) Niech $\Delta : clU \to_m E_2$, $\Delta \in GV$ i takie, że $\Delta_b^{-1}\{0\} \subset U$. Wtedy Δ jest istotne.*

8.4 Multiretrakty w przestrzeniach przeliczalnie wymiarowych

Multiretrakty prawostronne w przestrzeniach skończenie wymiarowych pokrywają się z retraktami, dlatego stanowią ważne narzędzie do ich charakteryzacji (patrz, [29, 30, 31, 33, 36, 34]). Na początek udowodnimy kilka faktów dotyczących elementarnego przedłużania odwzorowań wielowartościowych, które opisaliśmy w pracy [29]. Przypomnijmy, że przestrzeń X jest przeliczalnie wymiarowa, jeśli

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \text{ gdzie } dim X_n < \infty \text{ dla każdego } n. \tag{8.7}$$

Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym i niech $A \subset X$ będzie zbiorem niepustym. Symbolem φ_A będziemy oznaczać odwzorowanie $\varphi_A : A \multimap Y$ dane wzorem:

$$\varphi_A(x) = \varphi(x) \text{ for each } x \in A. \tag{8.8}$$

Będziemy mówić, że multifunkcja $\varphi : X \to_m Y$ jest specjalna (piszemy, $\varphi : X \to_{sm} Y$), jeśli istnieje $(p, q) \in \varphi_m$ takie, że $p : Z \to X$ jest odwzorowaniem cell-like.

Definicja 8.4.1. *Niech $A \subset X, A \neq X$ będzie zbiorem niepustym. Mówimy, że odwzorowanie u.s.c. $\varphi : A \multimap Y$ ma elementarne przedłużenie, jeśli istnieje odwzorowanie u.s.c. $\widetilde{\varphi} : X \multimap Y$ takie, że $\widetilde{\varphi}_{X\setminus A} : X\setminus A \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym i dla każdego $x \in A$ $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$.*

Będzie nam potrzebne następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.4.2. *([23]) Nech X, Y będą przestrzeniami metryzowalnymi zwartymi. Niech $A \subset X$ będzie domknięty w X, przeliczalnie wymiarowy i niech $Y \in ANR$ ($Y \in AR$). Załóżmy, że odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : A \multimap Y$ jest u.s.c. i dla kadego $x \in A$ $\varphi(x)$ jest zwarty i ma trywialny kształt. Wtedy φ ma elementarne przedłużenie $\widetilde{\varphi} : U \multimap Y$ ($\widetilde{\varphi} : X \multimap Y$), gdzie $U \supset A$ jest pewnym zbiorem otwartym w X.*

Propozycja 8.4.3. *([29]) Niech $Y \in ANR$ ($Y \in AR$) i niech $A \subset X$ będzie domknięty i przeliczalnie wymiarowy, gdzie X jest zwarta. Wtedy multifunkcja specjalna $\varphi : A \to_{sm} Y$ ma elementarne przedłużenie $\widetilde{\varphi} : U \multimap Y$ ($\widetilde{\varphi} : X \multimap Y$), gdzie $U \supset A$ jest pewnym zbiorem otwartym w X.*

Ponieważ klasa odwzorowań wielowartościowych zawiera klasę odwzorowań jednowartościowych, więc nie ma potrzeby uzasadniania, że zbiór A musi być domknięty i przestrzeń $Y \in ANR$ ($Y \in AR$). W Propozycji 8.4.3, nie można również pominąć, że zbiór A jest przeliczalnie wymiarowy. Wiemy, że jeśli przestrzeń zwarta $X \in ANR$ (w szczególności, $X \in AR$), to jest przesuwalna.

Przykład 8.4.4. *Niech $X \subset Q$ będzie zwarta i taka, że X jest acykliczna i nieprzesuwalna (patrz, [14]). Niech $p : Q \to X$ będzie odwzorowaniem cell-like. Niech $\varphi : X \to_{sm} Q$ będzie multifunkcją specjalną daną wzorem*

$$\varphi(x) = p^{-1}(x) \text{ dla dowolnego } x \in X.$$

Załóżmy, że istnieje elementarne przedłużenie $\widetilde{\varphi} : U \multimap Q$, gdzie $U \supset X$ jest pewnym zbiorem otwartym w Q. Odwzorowanie $r : U \to X$ dane wzorem

$$r = p \circ \widetilde{\varphi}$$

jest retrakcją. Stąd $X \in ANR$, ale to jest niemożliwe, ponieważ X nie jest przesuwalna.

Propozycja 8.4.5. *([29]) Niech $Y \in ANR$ ($Y \in AR$) i niech X będzie przestrzenią metryzowalną. Załóżmy, że zbiór $A \subset X$ jest niepusty, domknięty i taki, że $\overline{X \backslash A}$ jest zwarty i przeliczalnie wymiarowy. Wtedy multifunkcja specjalna $\varphi : A \to_{sm} Y$ ma elementarne przedłużenie na U (X), gdzie $U \supset A$ jest pewnym zbiorem otwartym w X.*

Do przyszłych rozważań będą potrzebne następujące fakty:

Twierdzenie 8.4.6. *([29]) Niech $Y \in ANR$ ($Y \in AR$). Niech X będzie ośrodkowa, lokalnie zwarta i przeliczalnie wymiarowa (niekoniecznie zwarta) i niech $A \subset X$ będzie niepustym i domkniętym zbiorem (niekoniecznie zwartym). Wtedy multifunkcja specjalna $\varphi : A \to_{sm} Y$ ma elementarne przedłużenie $\widetilde{\varphi} : U \multimap Y$ ($\widetilde{\varphi} : X \multimap Y$), gdzie $U \supset A$ jest pewnym zbiorem otwartym w X.*

Można wykazać (patrz [29]), że klasa odwzorowań wielowartościowych, które mają elementarne przedłużenie jest istotnie większa niż klasa multifunkcji specjalnych. Mamy następujące twierdzenie, które charakteryzuje absolutne retrakty i absolutne otoczeniowe retrakty.

Twierdzenie 8.4.7. *([31, 34]) Niech $T \in ANR$ ($T \in AR$). Niech Y oznacza domknięte zanurzenie przestrzeni Y w przestrzeni T. Załóżmy, że istnieją: odwzorowanie u.s.c. $\varphi : Y \multimap X$, ciągłe odwzorowanie $f : X \to Y$ i otwarty zbiór $U \supset Y$ w T taki, że są spełnione następujące warunki:*
8.4.7.1 *φ ma elementarne przedłużenie $\widetilde{\varphi} : U \multimap X$ ($\widetilde{\varphi} : T \multimap X$),*
8.4.7.2 *$f \circ \varphi = Id_Y$.*
Wtedy $Y \in ANR$ ($Y \in AR$).

Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi. Będziemy pisać, że

$$X \geq \circ_s Y$$

jeżeli istnieją: funkcja ciągła $f : X \to Y$ i multifunkcja specjalna $\varphi : Y \to_{sm} X$, takie że $\varphi \in \{f\}_r$, to znaczy $f \circ \varphi = Id_Y$. Wypiszmy kilka interesujących wniosków, które wynikają z Twierdzeń 8.4.7 i 8.4.6 oraz z Propozycji 8.4.3 i 8.4.5.

Propozycja 8.4.8. *([29, 31, 33, 34]) Niech $Y \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym i domkniętym zbiorem i niech $X \in ANR$ ($X \in AR$). Jeżeli*

$$X \geq \circ_s Y$$

to $Y \in ANR$ ($Y \in AR$).

Propozycja 8.4.9. *([29, 31, 33, 34]) Niech Y będzie zwartą i przeliczalnie wymiarową przestrzenią i niech $X \in ANR$ ($X \in AR$). Jeśli*

$$X \geq \circ_s Y$$

to $Y \in ANR$ ($Y \in AR$).

Propozycja 8.4.10. *([29, 31, 33, 34]) Niech $T \in ANR$ ($T \in AR$) i niech $Y \subset T$ będzie domkniętą przestrzenią i taką, że $\overline{T \backslash Y}$ jest zwarta i przeliczalnie wymiarowa. Jeśli $X \in ANR$ ($X \in AR$) i*

$$X \geq \circ_s Y$$

to $Y \in ANR$ ($Y \in AR$).

8.5 Uogólnione twierdzenie o przedłużaniu homotopii

Elementarne przedłużanie odwzorowań wielowartościowych można również wykorzystać do charakteryzacji absolutnych otoczeniowych retraktów. Udowodnimy między innymi, że zwarty, skończenie wymiarowy ANR, który ma trywialny kształt jest absolutnym retraktem (patrz, [34, 35]). Wprowadzimy pewne oznaczenia. Niech $h : X \to Y$ będzie domkniętym zanurzeniem. Przestrzeń $h(X)$ będziemy utożsamiać z przestrzenią X i będziemy pisać

$$X \subset_h Y.$$

Niech $X \subset_h Z$ i niech $V \subset Z$ będzie zbiorem takim, że $X \subset V$. Symbolem $M(X, V, Z)$ oznaczymy zbiór:

$$M(X, V, Z) = Z \times \{1\} \cup \overline{V} \times [0, 1]. \tag{8.9}$$

Jeśli $V = X$, to piszemy $M(X, V, Z) = M(X, Z)$.

Sformułujemy uogólnione twierdzenie o elementarnym przedłużaniu homotopii.

Twierdzenie 8.5.1. *([35]) Niech $X \subset_h T$ i niech $H : X \times [0, 1] \multimap Y$ będzie odwzorowaniem u.s.c.. Załóżmy, że istnieje zbiór otwarty $V \subset T$ taki, że $X \subset V$ i $\Psi : M(X, V, T) \times [0, 1] \multimap Y$ jest elementarnym przedłużeniem odwzorowania H. Wtedy istnieje elementarne przedłużenie $\widetilde{H} : T \times [0, 1] \multimap Y$ odwzorowania H.*

Propozycja 8.5.2. *([35]) Niech T będzie lokalnie zwarta, ośrodkowa i przeliczalnie wymiarowa. Niech $X \subset_h T$ i niech $Y \in ANR$. Niech $H : X \times [0, 1] \to_{sm} Y$ będzie multifunkcją specjalną i taką, że $H(\cdot, 1) : X \times \{1\} \to Y$ jest odwzorowaniem jednowartościowym. Załóżmy, że $H(\cdot, 1)$ ma ciągłe przedłużenie $F : T \times \{1\} \to Y$. Wtedy istnieje otwarty zbiór $V \subset T$ taki, że $X \subset V$ i elementarne przedłużenie $\Psi : M(X, V, T) \times [0, 1] \multimap Y$ odwzorowania H.*

Podobnie jak Propozycję 8.5.2 można udowodnić następujący fakt:

Propozycja 8.5.3. *([35]) Niech X będzie przestrzenią zwartą i przeliczalnie wymiarową, $Y \in ANR$. Niech $H : X \times [0, 1] \to_{sm} Y$ będzie multifunkcją specjalną i taką, że $H(\cdot, 1) : X \times \{1\} \to Y$ jest odwzorowaniem jednowartościowym. Załóżmy, że $H(\cdot, 1)$ ma ciągłe przedłużenie $F : Q \times \{1\} \to Y$. Wtedy istnieje zbiór otwarty $V \subset Q$ taki, że $X \subset V$ i elementarne przedłużenie $\Psi : M(X, V, Q) \times [0, 1] \multimap Y$ odwzorowania H.*

Kolejne dwa fakty wynikają z Propozycji 8.5.2 i 8.5.3.

Propozycja 8.5.4. *([35]) Niech T będzie lokalnie zwarta, ośrodkowa i przeliczalnie wymiarowa. Niech $X \subset_h T$ i $Z \in ANC(Y, \mathbb{D})$. Niech $H : X \times [0, 1] \to_{sm} Z$ będzie multifunkcją specjalną i taką, że $H(\cdot, 1) : X \times \{1\} \to Z$ jest odwzorowaniem jednowartościowym. Załóżmy, że $H(\cdot, 1)$ ma ciągłe przedłużenie $F : T \times \{1\} \to Z$. Wtedy istnieje otwarty zbiór $V \subset T$ taki, że $X \subset V$ i elementarne $\mathbb{D}$-przedłużenie $\Psi : M(X, V, T) \times [0, 1] \multimap Y$ odwzorowania H.*

Propozycja 8.5.5. *([35]) Niech Q będzie kostką Hilberta. Niech X będzie zwarta i przeliczalnie wymiarowa i niech $Z \in ANC(Y, \mathbb{D})$. Niech $H : X \times [0, 1] \to_{sm} Z$ będzie multifunkcją specjalną i taką, że $H(\cdot, 1) : X \times \{1\} \to Z$ jest odwzorowaniem jednowartościowym. Załóżmy, że $H(\cdot, 1)$ ma ciągłe przedłużenie $F : Q \times \{1\} \to Z$. Wtedy istnieje zbiór otwarty $V \subset Q$ taki, że $X \subset V$ i elementarne $\mathbb{D}$-przedłużenie $\Psi : M(X, V, Q) \times [0, 1] \multimap Y$ odwzorowania H.*

Mamy następujący ogólny fakt:

Propozycja 8.5.6. *([35]) Niech $Z \subset_h T$ i niech $g : Z \to X$ będzie ciągłym odwzorowaniem. Załóżmy, że istnieje odwzorowanie u.s.c. $H : Z \times [0,1] \multimap X$ takie, że $H(x,0) = \{g(x)\}$ dla każdego $x \in Z$. Jeżeli istnieje otwarty zbiór $V \subset T$ taki, że $Z \subset V$ i elementarne przedłużenie $\Psi : M(Z,V,T) \times [0,1] \multimap X$ odwzorowania H, to X jest g-retraktem T.*

Z ostatniego faktu wynikają następujące wnioski:

Propozycja 8.5.7. *([35]) Niech T będzie lokalnie zwarta, ośrodkowa i przeliczalnie wymiarowa. Niech $S \subset_h T$ (lub niech S będzie zwarta i przeliczalnie wymiarowa). Załóżmy, że $X \in ANRR(\mathbb{V})$ i istnieją: $Z \in ANC(X, \mathbb{V})$ i multifunkcja specjalna $H : S \times [0,1] \to_m Z$ takie, że $H(x,0) = p(x)$ i $H(x,1) = z_0$ dla każdego $x \in S$, gdzie $z_0 \in Z$ jest ustalonym punktem i $p \in \mathbb{V}(S,Z)$. Wtedy $X \in ARR(\mathbb{V})$.*

Propozycja 8.5.8. *([35]) Niech T będzie lokalnie zwarta, ośrodkowa i przeliczalnie wymiarowa i niech $X \in ANRR(\mathbb{V})$. Załóżmy, że istnieje $Z \in ANC(X, \mathbb{V})$ taka, że $Z \subset_h T$ (lub Z jest zwarta i przeliczalnie wymiarowa) i istnieje multifunkcja specjalna $H : Z \times [0,1] \to_m Z$ taka, że $H(z,0) = z$ i $H(z,1) = z_0$ dla każdego $z \in Z$, gdzie $z_0 \in Z$ jest ustalonym punktem. Wtedy $X \in ARR(\mathbb{V})$.*

Propozycja 8.5.9. *([35]) Niech T będzie lokalnie zwarta, ośrodkowa i przeliczalnie wymiarowa i niech $X \in ANR$. Załóżmy, że $X \subset_h T$ (lub X jest zwarta i przeliczalnie wymiarowa) i istnieje multifunkcja specjalna $H : X \times [0,1] \to_m X$ taka, że $H(x,0) = x$ i $H(x,1) = x_0$ dla każdego $x \in X$, gdzie $x_0 \in X$ jest ustalonym punktem. Wtedy $X \in AR$.*

W szczególności z Propozycji 8.5.8 i 8.5.9 wynika pewna charakteryzacja absolutnych otoczeniowych retraktów w przestrzeniach skończenie lub przeliczalnie wymiarowych.

Propozycja 8.5.10. *([34, 35]) Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym zbiorem (lub niech X będzie zwarta i przeliczalnie wymiarowa) i niech $X \in ANR$. Jeżeli istnieje multifunkcja specjalna $H : X \times [0,1] \to_m X$ taka, że $H(x,0) = x$ i $H(x,1) = x_0$ dla każdego $x \in X$, gdzie $x_0 \in X$ jest ustalonym punktem, to $X \in AR$.*

Zauważmy na koniec, że jeżeli X jest zwarta i ma trywialny kształt, to odwzorowanie wielowartościowe $H : X \times [0,1] \multimap X$ dane wzorem:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{for } (x,t) \in X \times [0, 1/2), \\ X & \text{for } (x,t) \in X \times \{1/2\}, \\ x_0 & \text{for } (x,t) \in X \times (1/2, 1] \end{cases}$$

jest multifunkcją spełniającą założenia Propozycji 8.5.10. Stąd, jeżeli przestrzeń $X \in ANR$ jest zwarta, przeliczalnie wymiarowa (w szczególności, skończenie wymiarowa) i ma trywialny kształt, to $X \in AR$.

8.6 Badanie własności przestrzeni metrycznych.

Relatywna homotopia (w szczególności homotopia multimorfizmów) poszerza naszą wiedzę dotyczącą topologicznego badania acykliczności zbioru. Na początek zauważmy, że (patrz

Definicja 8.1.11, Propozycja 8.1.5 i Definicja 8.1.14) pojęcia multiściągalności w kontekście multimorfizmów i $\mathbb{V}$-ściągalności są równoważne. Zauważmy, że X jest $\mathbb{H}$-ściągalna do punktu wtedy i tylko wtedy, gdy X jest ściągalna do punktu. Podamy przykład przestrzeni X takiej, że X jest $\mathbb{CE}$-ściągalna ($\mathbb{V}$-ściągalna do punktu) i nie jest ściągalna do punktu. Przypomnijmy, że jeśli zwarta przestrzeń jest ściągalna do punktu, to X jest przesuwalna.

Przykład 8.6.1. *Niech X będzie nieprzesuwalną przestrzenią zwartą i taką, że istnieje odwzorowanie cell-like $p : Q \to X$, gdzie Q jest kostką Hilberta. Przestrzeń X nie jest ściągalna do punktu. Niech $x_0 \in X$ i niech $p(z_0) = x_0$. Definiujemy homotopię $h : Q \times [0,1] \to X$ za pomocą wzoru $h(z,t) = p((1-t)z + tz_0)$ dla każdego $(z,t) \in Q \times [0,1]$. Stąd X jest $\mathbb{CE}$-ściągalna ($\mathbb{V}$-ściągalna) do punktu.*

Niech $A \subset X$ będzie niepustym zbiorem i niech $i_A^X : A \hookrightarrow X$ będzie inkluzją. Niech $C_X^{x_0} : X \to X$ będzie odwzorowaniem stałym, to znaczy $C_X^{x_0}(x) = x_0$ dla każdego $x \in X$, gdzie $x_0 \in X$ jest ustalonym punktem.

Definicja 8.6.2. *Niech $X \subset Q$ będzie zbiorem zwartym. Mówimy, że X jest $\mathbb{D}$-ściągalne do punktu w każdym swoim otoczeniu (piszemy, $X \in \mathbb{D}_{TS}$), jeśli istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że dla każdego otwartego otoczenia U przestrzeni X w Q*

$$i_X^U \sim_{\mathbb{D}} (i_X^U \circ C_X^{x_0}).$$

Niech $A \subset X$. Symbolem $O_\varepsilon(A)$ oznaczymy następujący zbiór:

$$O_\varepsilon(A) = \{x \in X;\ \text{istnieje } y \in A \text{ taki, że } d_X(x,y) < \varepsilon\},$$

gdzie d_X jest metryką w przestrzeni X.

Lemat 8.6.3. *Niech $X \in \mathbb{D}_{TS}$. Wtedy istnieje punkt $x_0 \in X$ i $g : Z \to X$, $g \in \mathbb{D}(X)$ takie, że dla każdego otwartego otoczenia U przestrzeni X w Q*

$$i_X^U \sim_g (i_X^U \circ C_X^{x_0}).$$

Proof. Niech $X \in \mathbb{D}_{TS}$. Wtedy dla każdego n istnieje $g_n : Z_n \to X$, $g_n \in \mathbb{D}(X)$ takie, że istnieje homotopia $h_n : Z_n \times [0,1] \to O_{1/n}(X)$ taka, że $h_n(z,0) = g_n(z)$ i $h_n(z,1) = x_0$ dla każdego $z \in Z_n$, gdzie $x_0 \in X$ jest ustalonym punktem. Niech

$$Z = \bigcup_{x \in X} \prod_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}(x) \subset \prod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

i niech $\pi_n : Z \to Z_n$ będzie projekcją dla $n \geq 1$. Jest oczywiste, że Z jest przestrzenią metryzowalną. Definiujemy odwzorowanie $g : Z \to X$ za pomocą wzoru:

$$g(z) = g_1(\pi_1(z)) \text{ dla każdego } z \in Z.$$

Zauważmy, że $g \in \mathbb{D}(X)$ i dla każdego n

$$g_1(\pi_1(z)) = g_n(\pi_n(z))$$

dla każdego $z \in Z$. Niech $U \subset Q$ będzie otwartym otoczeniem przestrzeni X. Istnieje n takie, że $O_{1/n}(X) \subset U \subset Q$. Definiujemy homotopię $h_U : Z \times [0,1] \to U$ za pomocą wzoru

$$h_U(z,t) = h_n(\pi_n(z), t) \text{ dla każdego } (z,t) \in Z \times [0,1].$$

Stąd dla każdego $z \in Z$ mamy

$$h_U(z,0) = h_n(\pi_n(z),0) = g_n(\pi_n(z)) = g(z) \text{ i } h_U(z,1) = h_n(\pi_n(z),1) = x_0$$

i dowód jest zakończony. □

Niech $A \subset X$. Symbolem clA oznaczymy domknięcie zbioru A w przestrzeni X.

Propozycja 8.6.4. *Niech $X \in \mathbb{V}_{TS}$. Wtedy X jest przestrzenią acykliczną.*

Proof. Niech dla każdego n $Y_n = cl(O_{1/n}(X))$. Wtedy mamy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = X.$$

Z ciągłości homologii Čecha homomorfizm naturalny

$$j_* : H_*(X) \to \varprojlim H_*(Y_n)$$

dany za pomocą wzoru

$$j_*(a) = (j_{1*}(a), ..., j_{n*}(a), ...) \text{ dla każdego } a \in H_*(X) \tag{8.10}$$

jest izomorfizmem, gdzie dla każdego n j_{n*} jest homomorfizmem indukowanym przez inkluzję $j_n : X \hookrightarrow Y_n$. Z Lematu 8.6.3 istnieje odwzorowanie Vietorisa $p : Z \to X$ takie, że dla każdego n

$$j_n \circ p \sim j_n \circ C_Z^{x_0}.$$

Stąd dla każdego n $j_{n*} \circ p_* = j_{n*} \circ (C_Z^{x_0})_*$. Z (8.10) dostajemy $p_* = (C_Z^{x_0})_*$. Odwzorowanie p_* jest izomorfizmem (patrz, [6]), więc X jest przestrzenią acykliczną i dowód jest zakończony. □

Podamy bardzo prosty przykład, który pokazuje, że $\mathbb{V}$-homotopia jest dobrym narzędziem do topologicznego badania acykliczności zbioru.

Przykład 8.6.5. *Niech X będzie zwarta i nieprzesuwalna i taka, że istnieje odwzorowanie cell-like $p : Q \to X$ (patrz, §3.4). Załóżmy, że Y ma trywialny kształt i nie jest łukowo spójna (patrz, [5]). Niech $Z = X \times Y$. Jest jasne, że przestrzeń $Z \subset Q$ nie ma trywialnego kształtu (Z nie jest przesuwalna, patrz, Propozycja 8.1.10) i Z nie jest $\mathbb{V}$-ściągalna (Z nie jest łukowo spójna, patrz, Propozycja 8.1.12). Niech $U_1, U_2 \subset Q$ będą zbiorami otwartymi takimi, że $X \subset U_1$ i $Y \subset U_2$. Wtedy $U_1 \times U_2 \approx U$ jest otwartym zbiorem w $(Q \times Q) \approx Q$. Definiujemy homotopię $H : Q \times Y \times [0,1] \to U_1 \times U_2$ za pomocą wzoru:*

$$H(x,y,t) = (p((1-t)x + tx_0), h(y,t)) \text{ dla każdego } (x,y,t) \in Q \times Y \times [0,1],$$

gdzie $x_0 \in X$, $h : Y \times [0,1] \to U_2$ jest homotopią taką, że $h(y,0) = y$ i $h(y,1) = y_0 \in Y$ dla dowolnego $y \in Y$ ($Y \subset U_2 \in ANR$ ma trywialny kształt, więc jest ściągalny w każdym swoim otoczeniu). Stąd zbiór Z jest $\mathbb{V}$-ściągalny do punktu w każdym swoim otoczeniu.

Na koniec podamy jeszcze jedno ważne zastosowanie homotopii relatywnej.

Definicja 8.6.6. *Mówimy, że przestrzenie metryzowalne X i Y mają ten sam typ $\mathbb{D}$-homotopii (piszemy, $X \simeq_{\mathbb{D}} Y$), jeśli istnieją odwzorowania ciągłe $f_1 : X \to Y$ i $f_2 : Y \to X$ takie, że*

$$(f_2 \circ f_1) \sim_{\mathbb{D}} Id_X \ \ i \ \ (f_1 \circ f_2) \sim_{\mathbb{D}} Id_Y.$$

Propozycja 8.6.7. *Niech $v : S \to X$ i $f_1, f_2 : X \to Y$ będą ciągłymi funkcjami. Wtedy*

$$(f_1 \sim_{\mathbb{D}} f_2) \Rightarrow (f_1 \circ v) \sim_{\mathbb{D}} (f_2 \circ v).$$

Proof. Z założenia istnieje odwzorowanie $g \in \mathbb{D}(Z, X)$ takie, że $(f_1 \circ g) \sim (f_2 \circ g)$. Definiujemy przestrzeń P następująco (patrz, [6]):

$$P = \{(s, z) \in S \times Z; \ \ v(s) = g(z)\}.$$

Przestrzeń P jest niepusta i metryzowalna. Mamy następujące diagramy:

$$P \xrightarrow{\pi_1} S \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f_1, f_2} Y,$$

$$P \xrightarrow{\pi_2} Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f_1, f_2} Y,$$

gdzie $\pi_1 : P \to S$ i $\pi_2 : P \to Z$ są projekcjami. Zauważmy, że $\pi_1 \in \mathbb{D}(P, S)$ i $v \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$. Jest oczywiste, że

$$f_1 \circ (g \circ \pi_2) \sim f_2 \circ (g \circ \pi_2).$$

Stąd

$$(f_1 \circ v) \circ \pi_1 \sim (f_2 \circ v) \circ \pi_1, \ \text{więc} \ (f_1 \circ v) \sim_{\pi_1} (f_2 \circ v)$$

i dowód jest zakończony. □

Niech $f_1, f_2 : X \to Y$, $u : Y \to T$ i $g : Z \to X$ będą ciągłymi funkcjami. Zauważmy, że z Definicji 8.1.6 i z własności homotopii wynika, że:

$$(8.11) \ \ (f_1 \sim_g f_2) \Leftrightarrow (f_1 \circ g) \sim (f_2 \circ g) \Rightarrow ((u \circ f_1) \circ g) \sim ((u \circ f_2) \circ g) \Leftrightarrow (u \circ f_1) \sim_g (u \circ f_2).$$

Propozycja 8.6.8. *Relacja $\simeq_{\mathbb{D}}$ wprowadzona w Definicji 8.6.6 jest relacją równoważności w klasie przestrzeni metryzowalnych.*

Proof. Jest oczywiste, że relacja $\simeq_{\mathbb{D}}$ jest zwrotna i symetryczna. Udowodnimy, że jest przechodnia. Niech $X \simeq_{\mathbb{D}} Y$ i $Y \simeq_{\mathbb{D}} Z$. Wtedy istnieją odwzorowania ciągłe $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to X$, $f_3 : Y \to Z$ i $f_4 : Z \to Y$ takie, że

$$(f_2 \circ f_1) \sim_{\mathbb{D}} Id_X \ \text{i} \ (f_1 \circ f_2) \sim_{\mathbb{D}} Id_Y$$

i

$$(f_4 \circ f_3) \sim_{\mathbb{D}} Id_Y \ \text{i} \ (f_3 \circ f_4) \sim_{\mathbb{D}} Id_Z.$$

Niech $u = f_3 \circ f_1 : X \to Z$ i $v = f_2 \circ f_4 : Z \to X$. Wtedy z Propozycji 8.6.7 i (8.11) mamy

$$v \circ u = f_2 \circ (f_4 \circ f_3) \circ f_1 \sim_{\mathbb{D}} f_2 \circ f_1 \sim_{\mathbb{D}} Id_X$$

i

$$u \circ v = f_3 \circ (f_1 \circ f_2) \circ f_4 \sim_{\mathbb{D}} f_3 \circ f_4 \sim_{\mathbb{D}} Id_Z.$$

Stąd $X \simeq_{\mathbb{D}} Z$ i dowód jest zakończony. □

Niech X będzie przestrzenią metryzowalną i niech $[X]_{\mathbb{D}}$ oznacza klasę abstrakcji relacji $\simeq_{\mathbb{D}}$. Wtedy mamy

$$[X]_{\mathbb{H}} \subset [X]_{\mathbb{V}} \subset [X]_{\mathbb{P}}.$$

9. MULTIRETRAKTY APROKSYMATYWNE

9.1 Preliminaria

Będziemy potrzebować następujące definicje i fakty:

Propozycja 9.1.1. *([6]) Niech U będze otwartym podzbiorem w przestrzeni unormowanej E i niech X będzie zwartym podzbiorem U. Jeśli inkluzja $i : X \hookrightarrow U$ indukuje monomorfizm $i_* : H_*(X) \to H_*(U)$, to X jest skończonego typu.*

Propozycja 9.1.2. *[6] Niech X będzie zwartym zbiorem w kostce Hilberta Q. Dla dowolnego otoczenia otwartego U zbioru X w Q istnieje zwarta przestrzeń $C \in ANR$ taka, że $X \subset C \subset U$.*

Niech $\mathbb{K}^{n+1}$ będzie domkniętą kulą w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n+1}$ o środku w punkcie 0 i promieniu 1 i niech $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$ będzie sferą. Przypomnijmy, że zwarta przestrzeń $X \subset Q$ ma trywialny kształt, jeśli jest ściągalna w każdym swoim otoczeniu otwartym.

Definicja 9.1.3. *Niech $A \subset X$ będzie zwartym zbiorem. Mówimy, że A jest ∞-proksymalnie spójny w X, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta < \varepsilon$ takie, że dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$ i dla dowolnego odwzorowania ciągłego $g : \mathbb{S}^n \to O_\delta(A)$ istnieje odwzorowanie ciągłe $\widetilde{g} : \mathbb{K}^{n+1} \to O_\varepsilon(A)$ takie, że $\widetilde{g}(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{S}^n$.*

Uwaga 9.1.4. *[1, 6] Niech $X \subset Q$ będzie zwartą przestrzenią. Stosując Twierdzenie Hymana (patrz, [12]) można pokazać, że przestrzeń X jest ∞-proksymalnie spójna wtedy i tylko wtedy, gdy ma trywialny kształt.*

Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną, $A \subset X$ będzie niepustym zbiorem i niech $\varepsilon > 0$. Symbolem $O_\varepsilon(A)$ będziemy oznaczać następujący zbiór:

$$O_\varepsilon(A) = \{y \in X;\ \text{istnieje } x \in A \text{ takie, że } d_X(x, y) < \varepsilon\}.$$

Definicja 9.1.5. *Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odzworowaniem wielowartościowym u.s.c. i niech $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie ciągłe $f : X \to Y$ jest ε-aproksymacją φ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$, $f(x) \in O_\varepsilon(\varphi(O_\varepsilon(x)))$.*

Uwaga 9.1.6. *Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym u.s.c.. Mówimy, że φ ma przybliżony selektor, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ε-aproksymacja φ.*

Twierdzenie 9.1.7. *[6] Niech X będzie zwartym ANR i niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie u.s.c.. Załóżmy, że dla każdego $x \in X$ zbiór $\varphi(x)$ jest ∞-proksymalnie spójny. Wtedy φ ma przybliżony selektor.*

Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odzworowaniem wielowartościowym i niech $A \subset X$ będzie niepustym zbiorem. Symbolem $\varphi_A : A \to X$ oznaczymy odwzorowanie dane wzorem $\varphi_A(x) = \varphi(x)$ dla każdego $x \in A$.

Definicja 9.1.8. *Niech $A \subset X$ ($A \neq X$) będzie niepustym zbiorem. Niech $\varphi : A \multimap Y$ będzie u.s.c.. Odzworowanie u.s.c. $\widetilde{\varphi} : X \multimap Y$ nazywamy elementarnym przedłużeniem odwzorowania φ, jeśli $\widetilde{\varphi}_{X\setminus A} : X\setminus A \to Y$ jest funkcją ciągłą i $\widetilde{\varphi}_A = \varphi$.*

Propozycja 9.1.9. *[29, 23] Niech X będzie przestrzenią zwartą, $Y \in ANR$ ($Y \in AR$) i niech $A \subset X$ ($A \neq X$) będzie zbiorem niepustym, domkniętym i przeliczalnie wymiarowym (w szczególności, skończenie wymiarowym). Załóżmy, że $\varphi : A \multimap Y$ jest u.s.c. i takie, że dla każdego $x \in X$, zbiór $\varphi(x)$ ma trywialny kształt. Wtedy φ ma elementarne przedłużenie $\widetilde{\varphi} : U \multimap Y$ ($\widetilde{\varphi} : X \multimap Y$), gdzie $U \subset X$ jest pewnym zbiorem otwartym i takim, że $A \subset U$.*

Definicja 9.1.10. *Niech $X \in ANR$ i niech $X_0 \subset X$ będzie domkniętym podzbiorem. Mówimy, że X_0 jest przesuwalna w X, jeżeli dla każdego otoczenia U przestrzeni X_0 istnieje otoczenie otwarte U' przestrzeni X_0, $U' \subset U$ takie, że dla dowolnego otoczenia U'' przestrzeni X, $U'' \subset U$ istnieje homotopia $H\colon U' \times [0,1] \to U$, taka, że $H(x,0) = x$ i $H(x,1) \in U''$, dla dowolnego $x \in U'$.*

Definicja 9.1.11. *Niech X będzie przestrzenią zwartą. Mówimy, że X jest przesuwalna jeżeli istnieje $Z \in ANR$ i zanurzenie $e : X \to Z$ takie, że $e(X)$ jest przesuwalna w Z.*

Odnotujmy, że własność przesuwalności jest własnością absolutną, to znaczy, że jeśli A jest przesuwalna w pewnej przestrzeni $X \in ANR$ i $j : A \to X'$ jest zanurzeniem przestrzeni A w przestrzeni $X' \in ANR$, to $j(A)$ jest przesuwalna w X' (patrz, [2]).

Uwaga 9.1.12. *[2] Przestrzeniami przesuwalnymi są między innymi przestrzenie typu: AR, ANR, AANR (w sensie Clappa), FAR i FANR.*

Propozycja 9.1.13. *[2] Niech X i Y będą przestrzeniami zwartymi. Przestrzeń $X \times Y$ jest przesuwalna wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y są przesuwalne.*

Twierdzenie 9.1.14. *([6]) Niech X będzie zwartą przestrzenią skończonego typu. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdej zwartej przestrzeni Y i dla każdych dwóch odwzorowań ciągłych $f, g : Y \to X$, jeśli $d_X(f(y), g(y)) < \varepsilon$ dla każdego $y \in Y$, to $f_* = g_*$, gdzie d_X jest metryką w X.*

Twierdzenie 9.1.15. *(Künneth, patrz [6]) Niech X i Y będą zwartymi przestrzeniami skończonego typu. Wtedy istnieje izomorfizm*

$$L : H_*(X \times Y) \to H_*(X) \otimes H_*(Y).$$

Powyższe twierdzenie można uogólnić na dowolną, ale skończoną liczbę przestrzeni zwartych, skończonego typu.

Propozycja 9.1.16. *([1]) Niech dla każdego n, X_n będzie zwartą przestrzenią i niech $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Jeśli dla każdego n, X_n ma trywialny kształt, to X ma trywialny kształt.*

Propozycja 9.1.17. *([37]) Niech dla każdego n, X_n będzie zwartą przestrzenią i niech $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Jeśli dla każdego n, X_n jest acykliczna, to X jest acykliczna.*

9.2 Aproksymatywne relatywne retrakty.

Aproksymatywne multiretrakty można oczywiście zdefiniować w następujący sposób (patrz, [37]):

Definicja 9.2.1. *Niech X będzie zwartą przestrzenią. Mówimy, że X jest aproksymatywnym $ANMR$ (piszemy, $X \in AANMR$) pod warunkiem, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń unormowana E_ε i zbiór otwarty $U_\varepsilon \subset E_\varepsilon$, odwzorowanie ciągłe $r_\varepsilon : U_\varepsilon \to X$ i multifunkcja $\varphi_\varepsilon : X \to_m U_\varepsilon$ taka, że dla każdego $x \in X$*

$$r_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x)) \subset B(x, \varepsilon),$$

gdzie $B(x, \varepsilon)$ jest otwartą kulą w X o środku w punkcie x i promieniu ε.

Definicja 9.2.2. *Nech X będzie zwartą przestrzenią. Mówimy, że X jest aproksymatywnym AMR (piszemy, $X \in AAMR$) pod warunkiem, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń unormowana E_ε, odwzorowanie ciągłe $r_\varepsilon : E_\varepsilon \to X$ i multifunkcja $\varphi_\varepsilon : X \to_m E_\varepsilon$ taka, że dla każdego $x \in X$*

$$r_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x)) \subset B(x, \varepsilon),$$

gdzie $B(x, \varepsilon)$ jest otwartą kulą w X o środku w punkcie x i promieniu ε.

Nasze rozważania zaczniemy od zdefiniowania relatywnego aproksymatywnego retraktu (patrz, [38]) i podamy kilka jego własności oraz udowodnimy, że Definicje 9.2.2 i 9.2.1 są równoważne odpowiednio Definicjom 9.2.4 i 9.2.5 (patrz poniżej). Niech X będzie przestrzenią metryzowalną. Symbolem d_X oznaczymy metrykę w przestrzeni X.

Definicja 9.2.3. *Niech $\varepsilon > 0$, $Z \subset Y$ i niech $g : Z \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Przestrzeń metryzowalną X naywamy ε-(g-retraktem) przestrzeni metryzowalnej Y (to znaczy, jest ε-retraktem względem g), jeśli istnieje ciągłe odwzorowanie $r : Y \to X$ takie, że*

$$d_X(r(z), g(z)) < \varepsilon \text{ dla każdego } z \in Z.$$

Przestrzeń Z nazywamy ε-(g-nośnikiem) przestrzeni X w przestrzeni Y (piszemy, $Z \in C^\varepsilon_Y(X, g)$), a odwzorowanie r będziemy nazywać ε-(g-retrakcją).

Niech $\mathbb{D}$ będzie rodziną zbiorów zwartych, zdefiniowaną w preliminariach rozdziału siódmego.

Definicja 9.2.4. *Mówimy, że przestrzeń metryzowalna X jest aproksymatywnym absolutnym relatywnym retraktem (piszemy, $X \in AARR(\mathbb{D})$) jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń Z_ε taka, że dla każdej przestrzeni T i dla każdego domkniętego zanurzenia $h : Z_\varepsilon \to T$ istnieje $g_\varepsilon : h(Z_\varepsilon) \to X$, $g_\varepsilon \in \mathbb{D}_T(X)$ takie, że $h(Z_\varepsilon) \in C^\varepsilon_T(X, g_\varepsilon)$. Niech $\varepsilon > 0$. Przestrzeń Z_ε będziemy nazywać absolutnym ε-nośnikiem przestrzeni X i będziemy pisać $Z_\varepsilon \in AC^\varepsilon(X, \mathbb{D})$.*

Definicja 9.2.5. *Mówimy, że przestrzeń metryzowalna X jest aproksymatywnym absolutnym otoczeniowym retraktem (piszemy, $X \in AANRR(\mathbb{D})$), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń metryzowalna Z_ε taka, że dla każdej przestrzeni metryzowalnej T i dla każdego zanurzenia domkniętego $h : Z_\varepsilon \to T$ istnieje $g_\varepsilon : h(Z_\varepsilon) \to X$, $g_\varepsilon \in \mathbb{D}_T(X)$ i zbiór otwarty $U_\varepsilon \subset T$ taki, że $h(Z_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$ i $h(Z_\varepsilon) \in C^\varepsilon_{U_\varepsilon}(X, g_\varepsilon)$. Niech $\varepsilon > 0$. Przestrzeń Z_ε będziemy nazywać absolutnym otoczeniowym ε-nośnikiem przestrzeni X i będziemy pisać $Z_\varepsilon \in ANC^\varepsilon(X, \mathbb{D})$.*

Zauważmy, że:

$$(X \in ARR(\mathbb{D})) \Rightarrow (X \in AARR(\mathbb{D})),$$

$$(X \in ANRR(\mathbb{D})) \Rightarrow (X \in AANRR(\mathbb{D})),$$

$$(X \in AARR(\mathbb{D})) \Leftrightarrow (\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \;\; AC^\varepsilon(X, \mathbb{D}) \neq \emptyset) \text{ i}$$

$$(X \in AANRR(\mathbb{D})) \Leftrightarrow (\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \;\; ANC^\varepsilon(X, \mathbb{D}) \neq \emptyset).$$

Niech Q będzie kostką Hilberta.

Propozycja 9.2.6. *([38]) Niech X będzie przestrzenią metryzowalną.*
9.2.6.1 *Przestrzeń $X \in AARR(\mathbb{D})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń zwarta $Z \subset Q$, $g : Z \to X$, $g \in \mathbb{D}_Q(X)$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ $Z \in C^{\varepsilon}_Q(X, g)$.*
9.2.6.2 *Przestrzeń $X \in AANRR(\mathbb{D})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń zwarta $Z \subset Q$, $g : Z \to X$ $g \in \mathbb{D}_Q(X)$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje otwarty zbiór $U_\varepsilon \subset Q$ taki, że $Z \subset U_\varepsilon$ i $Z \in C^{\varepsilon}_{U_\varepsilon}(X, g)$.*

Podobnie, jak Propozycję 9.2.6, można udowodnić następujący fakt:

Propozycja 9.2.7. *([38]) Niech X będzie przestrzenią metryzowalną.*
9.2.7.1 *Przestrzeń $X \in AARR(\mathbb{D})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń unormowana E, przestrzeń zwarta $Z \subset E$, $g : Z \to X$, $g \in \mathbb{D}_E(X)$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ $Z \in C^{\varepsilon}_E(X, g)$.*
9.2.7.2 *Przestrzeń $X \in AANRR(\mathbb{D})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń unormowana E, przestrzeń zwarta $Z \subset E$, $g : Z \to X$ $g \in \mathbb{D}_E(X)$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje otwarty zbiór $U_\varepsilon \subset E$ taki, że $Z \subset U_\varepsilon$ i $Z \in C^{\varepsilon}_{U_\varepsilon}(X, g)$.*

Korzystając z Propozycji 9.2.6 lub Propozycji 9.2.7 wprowadzimy następującą definicję:

Definicja 9.2.8. *Niech X będzie przestrzenią metryzowalną.*
9.2.8.1 *Przestrzeń X będziemy nazywać aproksymatywnym absolutnym otoczeniowym relatywnym retraktem w sensie Noguchi (piszemy, $X \in AANRR_N(\mathbb{D})$), jeśli istnieją: otwarty zbiór $U \subset Q$ ($U \subset E$), zwarta przestrzeń $Z \subset U$, $g : Z \to X$, $g \in \mathbb{D}_Q(X)$ ($g \in \mathbb{D}_E(X)$) takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ $Z \in C^{\varepsilon}_U(X, g)$, gdzie E jest pewną przestrzenią unormowaną.*
9.2.8.2 *Przestrzeń X będziemy nazywać aprksymatywnym absolutnym otoczeniowym relatywnym retraktem w sensie Clappa (piszemy, $X \in AANRR_C(\mathbb{D})$), jeśli istnieje przestrzeń zwarta $Z \subset Q$ ($Z \subset E$), $g : Z \to X$, $g \in \mathbb{D}_Q(X)$ ($g \in \mathbb{D}_E(X)$) takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje otwarty zbiór $U_\varepsilon \subset Q$ ($U_\varepsilon \subset E$) taki, że $Z \subset U_\varepsilon$ i $Z \in C^{\varepsilon}_{U_\varepsilon}(X, g)$, gdzie E jest pewną przestrzenią unormowaną.*

Definicja 9.2.8 dotyczy tylko przestrzeni $AANRR(\mathbb{D})$, ponieważ z Propozycji 9.2.6 (warunek 9.2.6.1) wynika, że:

$$AARR_C(\mathbb{D}) = AARR_N(\mathbb{D}). \tag{9.1}$$

Symbolem $AANR_N$ oznaczymy klasę aproksymatywnych absolutnych otoczeniowych retraktów w sensie Noguchi i symbolem $AANR_C$ - klasę aproksymatywnych absolutnych otoczeniowych retraktów w sensie Clappa. Zauważmy, że:

$$X \in AARR(\mathbb{H}) \Leftrightarrow X \in AAR,$$

$$X \in AANRR_N(\mathbb{H}) \Leftrightarrow X \in AANR_N,$$

$$X \in AANRR_C(\mathbb{H}) \Leftrightarrow X \in AANR_C.$$

Jest jasne, że jeśli $X \in AANRR_N(\mathbb{D})$, to $X \in AANRR_C(\mathbb{D})$. Później wykażemy, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Przypomnijmy, że jeśli $g : Z \to X$ jest odwzorowaniem Vietorisa, to $g_* : H_*(Z) \to H_*(X)$ jest izomorfizmem (patrz, [6]).

Propozycja 9.2.9. *([38]) Niech $X \in AANRR_N(\mathbb{V})$. Wtedy X jest skończonego typu.*

Podobnie, jak Propozycję 9.2.9, można udowodnić następujący fakt (patrz, (9.1)):

Propozycja 9.2.10. *([38]) Niech $X \in AARR(\mathbb{V})$. Wtedy X jest przestrzenią acykliczną.*

Udowodniliśmy, że Definicje 9.2.2 i 9.2.1 są równoważne odpowiednio Definicjom 9.2.4 i 9.2.5.

Propozycja 9.2.11. *([38]) Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną.*
9.2.11.1 $X \in AAMR \Leftrightarrow X \in AARR(\mathbb{V})$,
9.2.11.2 $X \in AANMR \Leftrightarrow X \in AANRR(\mathbb{V})$.

Propozycja 9.2.12. *([38]) Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną i niech $g : Z \to X$ będzie odwzorowniem takim, że $g \in \mathbb{V}_Q(X)$. Załóżmy, że dla dowolnego n i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją: przestrzenie zwarte $Z_n \subset Z$, $X_n \subset X$ i otwarte otoczenia U_n^ε przestrzeni Z_n w Q takie, że*

$$Z_n \in C^\varepsilon_{U_n^\varepsilon}(X_n, g_n) \ \ (Z_n \in C^\varepsilon_Q(X_n, g_n)),$$

gdzie $g_n \in \mathbb{V}_Q(X_n)$, $g_n : Z_n \to X_n$. Jeżeli dla dowolnego n istnieje odwzorowanie ciągłe $f_n : Z \to Z_n$ takie, że $d_X(g_n(f_n(z)), g(z)) < 1/n$, to $X \in AANRR(\mathbb{V})$ $(X \in AARR(\mathbb{V}))$.

9.3 Przykłady aproksymatywnych relatywnych retraktów.

W tym paragrafie podamy przykłady aproksymatywnych relatywnych retraktów (aproksymatywnych multiretraktów), które nie są aproksymatywnymi retraktami (patrz, [37, 38]). Z definicji łatwo wynika, że jeżeli przestrzeń zwarta $X \in ANRR(\mathbb{V})$, to jest lokalnie spójna.

Propozycja 9.3.1. *([38]) Niech $X \in AANRR_C(\mathbb{V})$ $(X \in AANRR_N(\mathbb{V}))$. Jeśli $p : X \to Y$ jest odwzorowaniem Vietorisa, to $Y \in AANRR_C(\mathbb{V})$ $(Y \in AANRR_N(\mathbb{V}))$. Natomiast, jeśli $X \in AARR(\mathbb{V})$ to $Y \in AARR(\mathbb{V})$.*

Propozycja 9.3.2. *([37, 38]) Niech $X_n \in AANRR_C(\mathbb{V})$ $(X_n \in AARR(\mathbb{V}))$ dla każdego n i niech $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$. Wtedy $X \in AANRR_C(\mathbb{V})$ $(X \in AARR(\mathbb{V}))$.*

Podobnie można udowodnić następujący fakt:

Propozycja 9.3.3. *([37, 38]) Niech $X_k \in AANRR_N(\mathbb{V})$ dla każdego $1 \leq k \leq n$ i nech $X = \prod_{k=1}^n X_k$. Wtedy $X \in AANRR_N(\mathbb{V})$.*

Przykład 9.3.4. *Niech $f = M_a : Q \to X_{ma} = X$ będzie odwzorowaniem J. van Milla. Przypomnijmy, że dla każdego $x \in X$, $f^{-1}(x) \in AR$ i X jest przestrzenią nieprzesuwalną. Z Twierdzenia 8.4.2 i Przykładu 8.4.4 wynika, że*

$$dim X = \infty.$$

Stąd istnieje ciąg $(x_n) \subset X$ zbieżny do punktu $x_0 \in X$ i taki, że dla każdego n, $x_n \neq x_0$. Oznaczmy

$$A = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(x_n) \times Q, \ \ A' = \bigcup_{n=1}^\infty \{x_n\} \times X,$$

$$Y = A \cup (f^{-1}(x_0) \times Q) \cup (Q \times f^{-1}(x_0)), \ \ Z = A' \cup (\{x_0\} \times X) \cup (X \times \{x_0\}).$$

Łatwo zauważyć, że przestrzenie Y i Z są zwarte i spójne. Zauważmy również, że $Y \in AAR$. Definiujemy odwzorowanie Vietorisa $p : Y \to Z$ za pomocą wzoru:

$$p(x, y) = (f(x), f(y))$$

dla każdego $(x, y) \in Y$. Z Propozycji 9.3.1 przestrzeń $Z \in AARR(\mathbb{V})$. Zauważmy, że przestrzeń Z nie jest lokalnie spójna dla punktów $x \in (\{x_0\} \times X)$, więc $Z \notin ANRR(\mathbb{V})$. Niech $S \in ANRR(\mathbb{V})$ będzie przestrzenią zwartą, która nie jest acykliczna. Wtedy $(S \times Z) \in AANRR_N(\mathbb{V})$ (patrz, Propozycja 9.3.3) i $(S \times Z) \notin AARR(\mathbb{V})$ (patrz, Propozycja 9.2.10).

Przykład 9.3.5. *Niech $f = M_a : Q \to X_{ma} = X$ będzie odwzorowaniem J. van Milla. Przypomnijmy, że dla każdego $x \in X$, $f^{-1}(x) \in AR$ i X jest przestrzenią nieprzesuwalną. Niech $(x_n) \subset X$ będzie ciągiem zbieżnym do punktu $x_0 \in X$ i takim, że dla każdego n, $x_n \neq x_0$. Bierzemy punkt $u \in X$ taki, że $u \neq x_0$. Oznaczmy*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(x_n) \times Q, \;\; B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \times X,$$

$$Y = A \cup (f^{-1}(x_0) \times Q) \cup (Q \times f^{-1}(x_0)) \cup (Q \times f^{-1}(u)),$$
$$Z = B \cup (\{x_0\} \times X) \cup (X \times \{x_0\}) \cup (X \times \{u\}).$$

Łatwo zauważyć, że przestrzenie Y i Z są zwarte i spójne. Zauważmy również, że $Y \in AANR_C$, ale $Y \notin AANR_N$, ponieważ nie jest skończonego typu. Rzeczywiście, można wykazać, że przestrzeń Y jest retraktem przestrzeni

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{1/n\} \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}).$$

Definiujemy odwzorowanie Vietorisa $p : Y \to Z$ za pomocą wzoru (patrz, Przykład 9.3.4):

$$p(x, y) = (f(x), f(y))$$

dla każdego $(x, y) \in Y$. Z Propozycji 9.3.1 przestrzeń $Z \in AANRR_C(\mathbb{V})$. Z drugiej strony przestrzeń $Z \notin AANRR_N(\mathbb{V})$, ponieważ nie jest skończonego typu.

Przykład 9.3.6. *Niech $f = K : Q \to X_k = X$ będzie odwzorowaniem Kieslinga Jest jasne, że $X \in ARR(\mathbb{V})$. Przypomnijmy, że dla każdego $x \in X$, $f^{-1}(x)$ ma trywialny kształt i X jest przestrzenią nieprzesuwalną. Niech $Y \in AANR_C$ będzie przestrzenią taką, że Y nie jest skończonego typu i niech $Z \in AANR_N$ będzie przestrzenią taką, że Z nie jest lokalnie spójna. Wtedy mamy*

$$(X \times Y) \in AANRR_C(\mathbb{V}), \;\; (X \times Y) \notin AANRR_N(\mathbb{V}),$$
$$(X \times Z) \in AANRR_N(\mathbb{V}), \;\; (X \times Z) \notin ANRR(\mathbb{V}).$$

Przykład 9.3.7. *Niech $f = M_a : Q \to X_{ma} = X$ będzie odwzorowaniem J. van Milla. Niech dla każdego n, $Y_n = \mathbb{BC}(n+1, u, v, X)$ będzie kostką brzegową przestrzeni X i niech $Y = \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$, gdzie $u, v \in X$ i $u \neq v$. Przypomnijmy, że dla dowolnego n przestrzeń Y_n jest skończonego typu i jest nieacykliczna. Z Propozycji 9.3.2 wynika, że przestrzeń $Y \in AANRR_C(\mathbb{V})$. Korzystając z Twierdzenia Künnetha (patrz, Twierdzenie 9.1.15) można wykazać, że przestrzeń Y nie jest skończonego typu. Stąd $Y \notin AANRR_N(\mathbb{V})$. Niech $Z = \prod_{n=1}^{n_0} Y_n \times \prod_{n=n_0+1}^{\infty} S_n$, gdzie dla każdego $n > n_0$ $S_n \in ANRR(\mathbb{V})$ jest przestrzenią acykliczną i $S_n \notin ARR(\mathbb{V})$. Wtedy $Z \in AANRR_C(\mathbb{V})$ i z twierdzenia Künnetha jest przestrzenią skończonego typu.*

9.4 Zastosowania

Podamy kilka zastosowań aproksymatywnych multiretraktów (patrz, [38]).

Propozycja 9.4.1. *([37, 38]) Niech $X \in AANRR_C(\mathbb{V})$. Jeśli X jest skończonego typu, to X ma własność punktu stałego.*

Podamy teraz kilka potrzebnych faktów. Niech X będzie przestrzenią metryzowalną, $x \in X$ i $v > 0$. Symbolem $B(x, v)$ będziemy oznaczać kulę otwartą w X o środku w punkcie x i promieniu v.

Propozycja 9.4.2. *([38]) Niech X będzie przestrzenią metryzowalną. Załóżmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją: otwarty zbiór $U_\varepsilon \subset Q$, odwzorowanie u.s.c $\varphi_\varepsilon : X \multimap U_\varepsilon$ i odwzorowanie ciągłe $r_\varepsilon : U_\varepsilon \to X$ takie, że są spełnione następujące warunki:*
9.4.2.1 *dla każdego $x \in X$ $r_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x)) \subset B(x, \varepsilon)$,*
9.4.2.2 *φ_ε ma przybliżony selektor. Wtedy $X \in AANR$. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon = Q$, to $X \in AAR$.*

Z Propozycji 9.4.2 dostajemy następujący fakt:

Propozycja 9.4.3. *([38]) Niech $X \in AANRR(\mathbb{D})$ $(X \in AARR(\mathbb{D}))$. Niech $g : Z \to X$ będzie odwzorowaniem takim, że $g \in \mathbb{D}_Q(X)$ i dla dowlonego $\varepsilon > 0$ istnieje otwarty zbiór $U_\varepsilon \subset Q$ taki, że $Z \subset U_\varepsilon$ i $Z \in C^\varepsilon_{U_\varepsilon}(X, g)$ $(Z \in C^\varepsilon_Q(X, g))$ (patrz, Propozycja 9.2.6). Niech $i_\varepsilon : Z \hookrightarrow U_\varepsilon$ będzie inkluzją. Jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ multifunkcja $\varphi_\varepsilon : X \to_m U_\varepsilon$ $(\varphi_\varepsilon : X \to_m Q)$ wyznaczona przez $(\varphi_\varepsilon)_m = [(g, i_\varepsilon)]_m$ ma przybliżony selektor, to $X \in AANR$ $(X \in AAR)$.*

Aproksymatywne relatywne retraty można wykorzystać do charakteryzacji aproksymatywnych retraktów w przestrzeniach zwartych, przeliczalnie wymiarowych.

Propozycja 9.4.4. *([38]) Niech $X \in AANRR(\mathbb{CE})$ $(X \in AARR(\mathbb{CE}))$. Załóżmy, że X jest przeliczalnie wymiarowa (w szczególności, skończenie wymiarowa). Wtedy $X \in AANR$ $(X \in AAR)$.*

Jest jasne, że $AANR_N \subset AANRR_N(\mathbb{CE})$ i $AANR_C \subset AANRR_C(\mathbb{CE})$. Tych inkluzji nie można odwrócić (patrz, Przykłady 9.3.5 i 9.3.6). Podamy teraz przykład, który wykorzystuje aproksymatywne relatywne retrakty do teorii przybliżonych selektorów. Zauważmy, że założenia $X \in ANR$ w Twierdzeniu 9.1.7 nie można pominąć.

Przykład 9.4.5. *Niech X będzie zwartą i nieprzesuwalną przestrzenią. Z Uwagi 9.1.12 wynika, że $X \notin ANR$. Można udowodnić, że $X \in ARR(\mathbb{V})$ (patrz, [26]). Niech $p : Q \to X$ będzie odwzorowaniem takim, że dla każdego $x \in X$ $p^{-1}(x)$ ma trywialny kształt (patrz, [14]). Definiujemy multifunkcję $\varphi : X \to_m Q$ wzorem $\varphi(x) = p^{-1}(x)$ dla każdego $x \in X$. Odwzorowanie φ jest wyznaczone przez $\varphi_m = [(p, Id_Q)]_m$ i dla każdego $x \in X$ zbiór $\varphi(x)$ ma trywialny kształt (to znaczy jest ∞-proksymalnie spójny (patrz, Uwaga 9.1.4). Wykażemy, że φ nie ma przybliżonego selektora. Załóżmy, przeciwnie, że istnieje przybliżony selektor odwzorowania φ. Przyjmując w Propozycji 9.4.3 dla każdego $\varepsilon > 0$ $\varphi_\varepsilon = \varphi$, $U_\varepsilon = Q$ i $r_\varepsilon = p$ (patrz, Propozycja 9.4.2) doastajemy, że $X \in AAR$, ale to jest sprzeczność, ponieważ X jest nieprzesuwalna (patrz, Uwaga* 9.1.12*).*

Konstrukcje poprzedniego i następnego przykładu są możliwe dzięki pewnym własnościom aproksymatywnych relatywnych retraktów. Następny przykład pokazuje zastosowanie aproksymatywnych relatywnych retraktów do teorii przedłużania odwzorowań wielowartościowych.

Przykład 9.4.6. *Niech $\varphi : X \to_m Q$ będzie multifunkcją taką, jak w Przykładzie 9.4.5. Załóżmy, że istnieje otwarty zbiór $V \subset Q$ taki, że $X \subset V$ i istnieje ciągłe przedłużenie $\widetilde{\varphi} : V \to_m Q$ takie, że dla każdego $x \in V$ zbiór $\widetilde{\varphi}(x)$ ma trywialny kształt (to znaczy jest ∞-proksymalnie spójny, patrz, Uwaga 9.1.4). Wtedy z Propozycji* 9.1.2 *istnieje zwarta przestrzeń $C \in ANR$ taka, że $X \subset C \subset V$. Z Twierdzenia* 9.1.7 *odwzorowanie $\widetilde{\varphi}_C : C \to_m Q$ dane wzorem $\widetilde{\varphi}_C(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ dla każdego $x \in C$ ma przybliżony selektor. Stąd φ ma przybliżony selektor, ale to, jak już wiemy nie jest możliwe (patrz, Przykład 9.4.5). To oznacza, że φ nie ma u.s.c. przedłużenia (o tych samych obrazach) na żaden zbiór otwarty $V \subset Q$ taki, że $X \subset V$ mimo, że $Q \in AR$.*

10. INNE OSIĄGNIĘCIA NAUKOWO-BADAWCZE

10.1 Preliminaria

Definicja 10.1.1. *([6]) Odwzorowanie $\varphi : X \multimap X$ nazywamy zwartą pochłaniającą kontrakcją (piszemy $\varphi \in CAC(X)$) jeżeli istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że:*
(10.1.1.1) *$\varphi(U) \subset U$ i $\varphi_U : U \multimap U$, $\varphi_U(x) = \varphi(x)$ dla każdego $x \in X$ jest zwarte ($\overline{\varphi(U)} \subset U$),*
(10.1.1.2) *dla każdego $x \in X$ istnieje $n = n_x$ takie, że $\varphi^n(x) \subset U$.*

Niech $\varphi : X \multimap Y$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym i niech $A \subset X$ będzie zbiorem niepustym. Symbolem $\varphi_A : A \to X$ będziemy oznaczać odwzorowanie dane wzorem

$$\varphi_A(x) = \varphi(x) \text{ dla każdego } x \in A.$$

10.2 Odwzorowania lokalnie dopuszczalne

W literaturze matematycznej bardzo dobrze znane są odwzorowania dopuszczalne L. Górniewicza. Do ich zbadania, szczególnie w kontekście punktów stałych L. Górniewicz użył metod homologicznych (patrz, [6]). W pracach ([39, 40]) wprowadziliśmy pojęcie odwzorowania lokalnie dopuszczalnego i pokazaliśmy, że klasa odwzorowań lokalnie dopuszczalnych jest istotnie szersza. Do jej zbadania w kontekście punktów stałych również użyliśmy metod homologicznych. Przypomnijmy, że parę (p, q) odwzorowań jednowartościowych, ciągłych nazywamy parą selektywną odwzorowania $\varphi : X \multimap Y$ (piszemy, $(p, q) \subset \varphi$), jeśli istnieje przestrzeń metryzowalna Z taka, że spełnione są następujące warunki:

(i) $p : Z \to X$ jest odwzorowaniem Vietorisa,

(ii) $q(p^{-1}(x)) \subset \varphi(x)$ dla dowolnego $x \in X$, gdzie $q : Z \to Y$.

Odwzorowanie wielowartościowe $\varphi\colon X \multimap Y$ nazywamy dopuszczalnym, jeśli istnieje para selektywna (p, q) odwzorowania φ. Niech $\varphi : X \multimap X$ będzie odwzorowaniem dopuszczalnym. Załóżmy, że dla każdej pary selektywnej $(p, q) \subset \varphi$ homomorfizm

$$q_* \circ p_*^{-1} : H_*(X) \to H_*(X)$$

jest endomorfizmem Leraya, wtedy definiujemy zbiór Lefschetza (patrz, [6]):

$$\Lambda(\varphi) = \{\Lambda(q_* \circ p_*^{-1});\ \ (p, q) \subset \varphi\}.$$

Niech X będzie przestrzenią metryzowalną, $\varphi : X \multimap X$ odwzorowaniem wielowartościowym i niech

$$\Omega_{AD}(\varphi) = \{V \subset X : V \text{ jest otwarty, } \overline{\varphi(V)} \subset V \text{ i } \varphi_V : V \multimap V \text{ jest dopuszczalne}\}.$$

Oczywiście powyższa rodzina zbiorów może być pusta. Definiujemy następującą klasę odwzorowań wielowartościowych:

$$ADL = \{\varphi : X \multimap X,\ \ \Omega_{AD}(\varphi) \neq \emptyset\}.$$

W szczególności wszystkie odwzorowania dopuszczalne $\varphi : X \multimap X$ należą do tej klasy, ponieważ $X \in \Omega_{AD}(\varphi)$. Przypomnijmy, że odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \multimap X$ jest acykliczne, jeżeli dla każdego $x \in X$ zbiór $\varphi(x)$ jest acykliczny i zwarty. Wiemy, że odwzorowanie acykliczne jest dopuszczalne i odwzorowania

(10.1) $\quad r, s : \Gamma \to X$ dane wzorem $r(x, y) = x, \; s(x, y) = y$ dla każdego $(x, y) \in \Gamma$,

gdzie $\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y ; \; y \in \varphi(x)\}$, są parą selektywną $(r, s) \subset \varphi$. Załóżmy, że dla pewnego odwzorowania acyklicznego $\varphi : X \multimap X$ homomorfizm $s_* r_*^{-1} : H_*(X) \to H_*(X)$ jest endomorfizmem Leraya, wtedy zbiór Lefschetza $\Lambda(\varphi)$ jest jednoelementowy i

$$\Lambda(\varphi) = \{\Lambda(s_* r_*^{-1})\}.$$

Zdefinujemy uogólniony zbiór Lefschetza $\Lambda^G(\varphi)$ dla odwzorowań wielowartościowych $\varphi \in ADL$. Niech $\varphi : X \to X$ będzie odwzorowaniem dopuszczalnym. Mówimy, że zbiór $\Lambda(\varphi)$ jest poprawnie zdefiniowany, jeśli dla każdego $(p, q) \subset \varphi$ odwzorowanie $q_* \circ p_*^{-1} : H_*(X) \to H_*(X)$ jest endomorfizmem Leraya.

Definicja 10.1.2. *Załóżmy, że dla odwzorowania wielowartościowego $\varphi : X \multimap X$ istnieje niepusta rodzina zbiorów $\Upsilon_{AD}(\varphi) \subset \Omega_{AD}(\varphi)$ taka, że jeśli dla każdego $V \in \Upsilon_{AD}(\varphi)$, $\Lambda(\varphi_V)$ jest poprawnie zdefiniowany, wtedy spełnione są następujące warunki:*
10.1.2.1 *Jeśli $\varphi : X \multimap X$ jest acykliczne, to $\Lambda^G(\varphi) = \{\Lambda(s_* r_*^{-1})\}$ (patrz (10.1)).*
10.1.2.2 *Jeśli $\varphi : X \multimap X$ jest dopuszczalne, to $X \in \Upsilon_{AD}(\varphi)$ i*

$$(\Lambda(\varphi) \neq \{0\}) \Rightarrow (\Lambda^G(\varphi) \neq \{0\}).$$

10.1.2.3 $(\Lambda^G(\varphi) \neq \{0\}) \Rightarrow$ *(istnieje $V \in \Upsilon_{AD}(\varphi)$ takie, że $\Lambda(\varphi_V) \neq \{0\}$).*

Definicja 10.1.3. *Mówimy, że odwzorowanie $\varphi \in ADL$ jest uogólnionym odwzorowaniem Lefschetza, jeśli spełnione są następujące warunki:*
10.1.3.1 *istnieje $\Upsilon_{AD}(\varphi) \neq \emptyset$ takie, że są spełnione warunki* 10.1.2.1- 10.1.2.3.
10.1.3.2 *dla każdego $V \in \Upsilon_{AD}(\varphi)$ $\Lambda(\varphi_V)$ jest poprawnie zdefiniowany.*

Głównym twierdzeniem o punkcie stałym jest następujące:

Twierdzenie 10.1.4. *([39]) Niech $X \in ANRR(\mathbb{V})$. Załóżmy, że są spełnione następujące warunki:*
10.1.4.1 *$\varphi \in CAC(X)$,*
10.1.4.2 *istnieje $\Upsilon_{AD}(\varphi) \neq \emptyset$ taka, że są spełnione warunki* 10.1.2.1- 10.1.2.3. *Wtedy φ jest uogólnionym odwzorowaniem Lefschetza i jeżeli $\Lambda^G(\varphi) \neq \{0\}$, to $Fix(\varphi) \neq \emptyset$.*

Definicja 10.1.5. *Odzworowanie wielowartościowe $\varphi : X \multimap Y$ nazywamy lokalnie dopuszczalnym, jeżeli dla każdego zwartego i niepustego zbioru $K \subset X$ istnieje zbiór otwarty $V \subset X$ taki, że $K \subset V$ i odwzorowanie $\varphi_V : V \multimap X$ jest dopuszczalne, gdzie $\varphi_V : V \multimap X$ dane jest wzorem $\varphi_V(x) = \varphi(x)$ dla każdego $x \in V$.*

Podamy przykłady odwzorowań lokalnie dopuszczalnych, które nie są dopuszczalne. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych i niech $\mathbb{N}$ będzie zbiorem liczb naturalnych.

Przykład 10.1.6. *Niech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *będzie ciągiem danym wzorem:*

$$a_n = \begin{cases} 1, & dla \;\; n = 1 \\ a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}, & dla \;\; n > 1. \end{cases}$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/2^n) = 3$. *Niech dla* $n = 1, 2, ...$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem danym wzorem*

$$f_n(x) = (1/2^n)\, sinx + (a_n/2^n)$$

i niech $k : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *będzie odwzorowaniem danym wzorem* $k(x) = int(|x|)$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$, *gdzie* $int(|x|)$ *oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż* $|x|$. *Mamy* $f_n(R) = [(a_n - 1)/2^n, (a_n + 1)/2^n]$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$. *Czytelnik łatwo sprawdzi, że dla dowolnych dwóch różnych liczb naturalnych* n, m *mamy*

$$f_n(\mathbb{R}) \cap f_m(\mathbb{R}) = \emptyset. \tag{10.2}$$

Jest jasne, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_0$, *gdzie* $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest odwzorowaniem stałym danym wzorem* $f_0(x) = 3$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$. *Niech* $\varphi : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$, $\varphi^k : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ *będą odwzorowaniami wielowartościowymi danymi wzorami:*

$$\varphi(x) = \{f_0(x), f_1(x), ...f_n(x), ...\},$$

$$\varphi^k(x) = \{f_0(x), f_1(x), ..., f_{k(x)}(x)\}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. *Definiujemy odwzorowanie* $\psi : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ *za pomocą wzoru:*

$$\psi(x) = \varphi(x) \backslash \varphi^k(x) \quad dla\ każdego \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{10.3}$$

Z konstrukcji φ *i z* (10.2) *wynika, że pary* $(Id_{\mathbb{R}}, f_n)$, $n = 1, 2, ...$ *są jedynymi parami selektywnymi odwzorowania* φ. *Pokażemy, że odwzorowanie* ψ *jest lokalnie dopuszczalne, ale nie jest dopuszczalne. Niech* $K \subset \mathbb{R}$ *będzie zbiorem zwartym, wtedy istnieje liczba naturalna* n_0 *taka, że dla każdego* $x \in K$ $k(x) \leq n_0$ *i niech*

$$V = \{x \in \mathbb{R} : \;\; dist(x, K) < 1/2\}.$$

Wtedy dla $n = n_0 + 1, n_0 + 2, ...$ $(Id_{\mathbb{R}}, f_n) \subset \psi_V$ *i* $\psi_V : V \multimap \mathbb{R}$ *jest dopuszczalne. Niech dla pewnego* $n' \in \mathbb{N}$ $(Id_{\mathbb{R}}, f_{n'}) \subset \psi$ *i niech* $x_0 \in \mathbb{R}$ *takie, że* $k(x_0) > n'$ *wtedy* $f_{n'}(x_0) \notin \psi(x_0)$, *co daje oczywistą sprzeczność. W konsekwencji odwzorowanie* ψ *nie jest dopuszczalne.*

Niech $\mathbb{C}$ oznacza zbiór liczb zespolonych i niech $\mathbb{S}^r \subset \mathbb{C}$ będzie sferą o środku w punkcie 0 i promieniu $r > 0$

Przykład 10.1.7. *Niech* $X = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ *i niech* $\gamma : X \multimap S^1$ *będzie dopuszczalne, u.s.c. i dla każdego* $x \in X$ $\gamma(x)$ *jest zwarty. Załóżmy, że mamy ciąg* $(\{r_n\}_{n=1}^{\infty}) \subset \mathbb{R}$ *taki, że* $r_1 = 1$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 2$. *Definiujemy odwzorowania* $\gamma_n : X \multimap S^{r_n}$, $\gamma_0 : X \multimap S^2$ *dane wzorami* $\gamma_n(x) = r_n \cdot \gamma(x)$, $\gamma_0(x) = 2 \cdot \gamma(x)$ *dla każdego* $x \in X$. *Łatwo sprawdzić, że dla dwóch dowolnych i różnych liczb naturalnych* n, m *mamy*

$$\gamma_n(X) \cap \gamma_m(X) = \emptyset. \tag{10.4}$$

Jest jasne, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ γ_n jest dopuszczalne i $\gamma_1 = \gamma$. Niech $f : X \to (0,2)$ będzie ciągłą funkcją daną wzorem $f(x) = \frac{4}{\pi}\arctan|x|$ dla każdego $x \in X$ i niech $g : X \to [2,\infty)$ będzie ciągłą funkcją daną wzorem

$$g(x) = \begin{cases} 5 - |x|, & dla \;\; 0 < |x| < 3 \\ 2, & dla \;\; |x| \geq 3. \end{cases}$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 2$ i $0 < f(x) < g(x)$ dla każdego $x \in X$. Symbolem $\psi : X \multimap X$ oznaczmy odwzorowanie dane wzorem

$$\psi(x) = \{y \in X;\;\; f(x) \leq |y| \leq g(x)\}$$

dla każdego $x \in X$. Niech $\Gamma : X \multimap X$ będzie odwzorowaniem danym wzorem

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n(x), & dla \;\; 0 < |x| < 3 \\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x), & dla \;\; |x| \geq 3. \end{cases}$$

Definiujemy odwzorowanie $\varphi : X \multimap X$ za pomocą wzoru

$$\varphi(x) = \Gamma(x) \cap \psi(x) \;\; dla\ każdego \;\; x \in X.$$

Z (10.4) wynika, ze jedynymi parami selektywnymi (p,q) odwzorowania Γ a tym samym odwzorowania φ są pary $(p,q) \subset \gamma_n$ dla pewnego n. Poakażemy, że odwzorowanie φ jest lokalnie dopuszczalne. Niech $K \subset X$ będzie zbiorem zwartym, wtedy istnieje liczba rzeczywista dodatnia s taka, że $s < 2$ i dla każdego $x \in K$ $f(x) \leq s$. Niech $U = \{x \in X;\;\; dist(x,K) < t\}$, gdzie $s < t < 2$. Dla pewnego n istnieje r_n takie, że $t < r_n < 2$. Bierzemy odwzorowanie $\gamma_n : X \to S^{r_n}$ i parę selektywną $(p,q) \subset \gamma_n \subset \varphi$. Odzworowanie φ nie jest dopuszczalne. Niech dla pewnego $n' \in \mathbb{N}$ $(p,q) \subset \gamma_{n'}$ będzie parą selektywną $(p,q) \subset \varphi$. Istnieje $x_0 \in X$ takie, że $f(x_0) > r_{n'}$ wtedy $q(p^{-1}(x_0)) \nsubseteq \varphi(x_0)$, co daje oczywistą sprzeczność. Jest również oczywiste, że odwzorowanie φ jest zwarte. Zauważmy, że odwzorowanie $\varphi_U : U \multimap U$, gdzie $U = \{x \in X;\;\; 0 < |x| < 3\}$ jest u.s.c i dla każdego $x \in U$ $\varphi_U(x)$ jest zwarty.

Złożenie dwóch odwzorowań lokalnie dopuszczalnych jest odwzorowaniem lokalnie dopuszczalnym.

Twierdzenie 10.1.8. *([40]) Niech $\varphi : X \multimap Y$ i $\psi : Y \multimap Z$ będą lokalnie dopuszczalne. Wtedy odwzorowanie $\psi \circ \varphi : X \multimap Z$ jest lokalnie dopuszczalne.*

Prostym wnioskiem z Twierdzenia 10.1.4 jest następujący fakt:

Propozycja 10.1.9. *([39]) Niech $X \in ANRR(\mathbb{V})$, $\varphi : X \multimap X$ będzie lokalnie dopuszczalne (niekoniecznie dopuszczalne) i niech $\varphi \in CAC(X)$. Wtedy φ jest uogólnionym odwzorowaniem Lefschetza i jeżeli $\Lambda^G(\varphi) \neq \{0\}$, to $Fix(\varphi) \neq \emptyset$.*

11. PODSUMOWANIE

Inspiracją do badań multiretraktów były prace A. Suszyckiego (patrz, [23, 24]). Do zbadania własności multiretraktów zastosowaliśmy multifunkcje, czyli pewną wersję odwzorowań silnie dopuszczalnych (patrz, [6]). Przestrzenie metryzowalne wraz z multifunkcjami tworzą kategorię, która jest naturalnym rozszerzeniem kategorii przestrzeni metryzowalnych wraz z funkcjami ciągłymi. Zdefiniowaliśmy homotopię multifunkcji, która jest relacją równoważności. Przestrzenie metryzowalne ściągalne do punktu w sensie tej homotopii (multiściągalne) są łukowo spójne. Mimo to klasa przestrzeni multiściągalnych jest istotnie szersza niż klasa przestrzeni ściągalnych i obejmuje również przestrzenie, które mogą być nieprzesuwalne. W związku z tym należałoby uogólnić pojęcie przesuwalności przestrzeni, wykorzystując multifunkcje. Zauważmy, że multiretrakty mają podobne własności do retraktów w sensie Borsuka, pod warunkiem, że użyjemy do ich badań multifunkcji. Multifunkcje są naturalnym uogólnieniem funkcji ciągłych, zatem teoria multidominacji jest naturalnym uogólnieniem teorii dominacji Borsuka. Warto też zauważyć, że multifunkcje są dobrym narzędziem topologicznym do badania zbiorów acyklicznych. W związku z tym podaliśmy definicję zbioru multiściągalnego w każdym swoim otoczeniu. Udowodniliśmy, że jest zbiorem acyklicznym w sensie homologii Čecha. Multidominację przestrzeni metrycznych podzieliliśmy na prawostronną i lewostronną. Wykazaliśmy, że multiretrakty prawostronne są różne od multiretraktów lewostronnych. Multiretrakty prawostronne, naszym zdaniem, można uważać jako uzupełnienie retraktów w sensie Borsuka, ponieważ mają podobne własności. Natomiast multiretrakty lewostronne mają wiele cech fundamentalnych retraktów Borsuka. Wprowadziliśmy też pojęcie relatywnego retraktu. Udowodniliśmy, że klasa relatywnych retraktów obejmuję klasę multiretraktów prawostronnych. Dzięki relatywnym retraktom uzyskaliśmy nowe własności multiretraktów prawostronnych. Warto nadmienić, że relatywne retrakty mają wiele ciekawych zastosowań do teorii punktów stałych, teorii koincydencji i do badania własności zbiorów. Konsekwencją relatywnych retraktów jest homotopia relatywna i relatywne przedłużanie odwzorowań ciągłych. Wykazaliśmy, że homotopia relatywna jest relacją równoważności i ma wiele ciekawych zastosowań do teorii punktów stałych i badania własności przestrzeni metrycznych. Warto również nadmienić, że wprowadziliśmy pojęcie aproksymatywnych relatywnych retraktów. Zbadaliśmy ich własności i wykazaliśmy, że są istotnym uogólnieniem multiretraktów prawostronnych. Aproksymatywne relatywne retrakty podzieliliśmy na dwa zbiory. Pierwszy zbiór to aproksymatywne relatywne retrakty w sensie Noguchi, natomiast drugi zbiór to aproksymatywne relatywne retrakty w sensie Clappa. Podaliśmy przykłady na to, że są istotnie szersze od znanych w literaturze matematycznej aproksymatywnych retraktów w sensie Noguchi i w sensie Clappa. Aproksymatywne relatywne retrakty (w szczególności, aproksymatywne multiretrakty) zastosowaliśmy do teorii punktów stałych i do charakteryzacji aproksymatywnych retraktów w przestrzeniach przeliczalnie wymiarowych. Podaliśmy też przykłady wykorzystania aproksymatywnych relatywnych retraktów do teorii przedłużania multifunkcji i do teorii aproksymatywnych selektorów odwzorowań wielowartościowych. W autoreferacie podaliśmy dowody niektórych faktów, ponieważ znajdują się w pracy "The Properties and Applications of Relative Homotopy", która otrzymała pozytywną recenzję w czasopismie "Topology and its Applications", ale do chwili obecnej nie została wydrukowana. Warto zwrócić uwagę na bardzo ważny fakt. W autoreferacie wielokrotnie skorzystaliśmy z odkrycia Profesora L. Górniewicza dotyczącego odwzorowań dopuszczalnych i silnie dopuszczalnych. W wielu dowodach korzystamy z pewnego przekształcenia diagramu, które nazywa się "pull back". Przypomnijmy, że jeżeli mamy diagram

$$Z_1 \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} Z_2,$$

gdzie f_1 lub f_2 jest surjekcją, to przekształceniem "pull back" tego diagramu nazywamy diagram:

$$Z_1 \xleftarrow{\pi_1} Z_1 \triangle Z_2 \xrightarrow{\pi_2} Z_2,$$

gdzie $Z_1 \triangle Z_2 = \{(z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2;\ f_1(z_1) = f_2(z_2)\}$ oraz $\pi_1(z_1, z_2) = z_1$ i $\pi_2(z_1, z_2) = z_2$ dla każdego $(z_1, z_2) \in Z_1 \triangle Z_2$. Podsumowując, prowadzimy badania multiretraktów w dwóch kierunkach. Pierwszy kierunek, to zastosowanie multifunkcji wyznaczonych przez multimorfizmy do teorii multidominacji. Drugi kierunek badań, to teoria relatywnych retraktów. Naszym zdaniem, jeden i drugi kierunek badań jest ważny i potrzebny, przede wszystkim ze względu na wiele ciekawych zastosowań. Warto też nadmienić, że zarówno teoria multidominacji, jak i teoria relatywnych retraktów zostały pozytywnie przyjęte przez recenzentów dobrych czasopism matematycznych, takich jak: "Topology and its Applications", "Fixed Point Theory", "Fixed Point Theory and Applications" i "Journal of Fixed Point Theory and its Applications".

12. Literatura

[1] K. Borsuk, Theory of Retracts, Monografie Matematyczne, Tom 44, PWN, Warsaw, 1967.

[2] K. Borsuk, Theory of Shape, Lecture Notes Series, No. 28, Matematisk Institut, Aarhaus Universitet, Aarhaus, 1971.

[3] M.H. Clapp, On a generalization of absolute neighborhood retracts, Fund. Math. **70** (1971), 117-130.

[4] R. J. Daverman and J. J. Walsh, Example of cell-like maps that are not shape equivalences, Michigan Math. J. **30** (1983), 17-30.

[5] R. Engelking, General Topology, PWN, Warsaw, 1977.

[6] L. Górniewicz, Topological Methods in Fixed Point Theory of Multi-valued Mappings, Springer, 2006.

[7] L. Górniewicz, Topological degree and its applications to differential inclusions, Raccolta di Seminari del Dipartimento di Matematica dell'Universita degli Studi della Calabria, March-April 1983.

[8] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer, 2003.

[9] W. E. Haver, Mappings between ANRs that are fine homotopy equivalences, Pacific J. Math. **58** (1975), 457-461.

[10] W. Holsztyński, Une generalisation du theoreme de Brouwer sur les points inwariants, Bull. Acad. Poln. Sci. **10** (1964), 603-606.

[11] W. Holsztyński, Universal mappings and fixed point theorems, Bull. Acad. Poln. Sci. **15** (1967), 433-438.

[12] B. M. Hyman, On decreasing sequence of compact absolute retracts, Fund. Math. **64** (1959), 91-97.

[13] J. Jaworowski, Continuous homology properties of approximative retracts, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences **18**(7) (1970), 359-362.

[14] J. E. Keesling, A non-movable trivial shape decomposition of the Hilbert Cube, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **23** (1975), 997-998.

[15] R. J. Knill, Cones, products and fixed points, Fund. Math. **60** (1967), 35-46.

[16] W. Kryszewski, Topological and Approximation Methods of Degree Theory of Set-valued Maps, Dissertationes Mathematicae, CCXXXVI, Warsaw 1994.

[17] J. van Mill, A counterexample in ANR theory, Topology Appl. **12** (1981), 315-320.

[18] J. van Mill, Local contractibility, cell-like maps and dimension, Proc. Amer. Math Soc. **98** (1986), 534-536.

[19] J. van Mill, Infinite-Dimensional Topology, Prerequisties and Introduction, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[20] H. Noguchi, A generalization of absolute neighborhood retracts, Kodai Math. Sem. Rep. **5**(1) (1953), 20-22.

[21] J. J. Rotman, An introduction to algebraic topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, New-York, 1988.

[22] S. Smale, A Vietoris mapping theorem for homotopy, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 604-610.

[23] A. Suszycki, Elementary extensions of multi-valued maps, Proceedings of the International Conference On Geometric Topology PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1980.

[24] A. Suszycki, Retracts and homotopies for multi-maps, Fund. Math. **115**(1) (1983), 9-26.

[25] J. L. Taylor, A counterexample in shape theory, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 629-632.

[26] R. Skiba, M. Ślosarski, On a generalization of absolute neighborhood retracts, Topology Appl. **156** (2009), 697-709.

[27] M. Ślosarski, The Fixed Points of Abstract Morphisms, British Journal of Mathematics and Computer Science **4**(21) (2014), 3077-3089.

[28] M. Ślosarski, A generalized Vietoris mapping, British Journal of Mathematics and Computer Science **8**(2) (2015), 89-100.

[29] M. Ślosarski, Elementary extension of multi-valued mappings and its application Pioneer J. Math. Math. Sci. **7**(2) (2013), 191-205.

[30] M. Ślosarski, The multi-valued domination of metric spaces, Fixed Point Theory and Applications **2012**, 2012, 1-9.

[31] M. Ślosarski, The properties of the multi-valued domination of metric spaces, Topology Appl. **160** (2013), 730-738.

[32] M. Ślosarski, The multi-morphisms and their properties and applications, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. **14** (2015), 5-25.

[33] M. Ślosarski, Multidomination of metric spaces in the context of multimorphisms, Journal of Fixed Point Theory and Applications **17**(4) (2015), 641-657.

[34] M. Ślosarski, The single-valued character of some class of multi-valued admissible mappings, British Journal of Mathematics and Computer Science **4**(4) (2014), 453-459.

[35] M. Ślosarski, The generalized theorem on the elementary extension of homotopies, JP Journal of Geometry and Topology **15**(1) (2014), 1-16.

[36] M. Ślosarski, The properties and applications of relative retracts, Journal of Fixed Point Theory and its Applications, DOI: 10.1007/s11784-016-0293-0.

[37] M. Ślosarski, On a generalization of approximative absolute neighborhood retracts, Fixed Point Theory **10**(2) (2009), 329-346.

[38] M. Ślosarski, Theory of Approximative Relative Retracts and Its Applications, British Journal of Mathematics and Computer Science **13**(3)(2016), 1-19.

[39] M. Ślosarski, Generalized Lefschetz Sets, Fixed Point Theory and Applications **2011**, 2011, 1-11.

[40] M. Ślosarski, Locally admissible multi-valued maps, Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization **31** (2011), 115-132. 6.

[41] M. Ślosarski, The Properties and Applications of Relative Homotopy, Topology Appl. (2016), (preprint).

Mirosław Ślosarski