

Autoreferat

1. **Imiona i nazwisko:** Wojciech Stanisław Jabłoński

2. **Posiadane dyplomy:**

- a) dyplom magistra matematyki uzyskany 30 czerwca 1995 roku na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie; tytuł pracy magisterskiej: *O pewnych podpółgrupach grupy L_s^1* ; promotor: prof. dr hab. Stanisław Midura,
- b) dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany 6 maja 2003 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach; tytuł rozprawy doktorskiej: *Stabilność równania jednorodności*; promotor: prof. dr hab. Józef Tabor.

3. **Zatrudnienie w jednostkach naukowych:**

- od 1 października 1995 do 30 sierpnia 2001 asystent w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie,
- od 1 września 2001 do 30 czerwca 2003 asystent w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego (utworzenie UR),
- od 1 lipca 2003 do 30 października 2013 adiunkt w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego,
- od 1 listopada 2013 do 16 lutego 2014 adiunkt w Katedrze Metod Algebraicznych i Przybliżonych na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Rzeszowskiego (reorganizacja wydziału),
- od 17 lutego 2014 adiunkt w Katedrze Matematyki na Wydziale Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej.

4. **Osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16 ust. 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki:** dzieło opublikowane w całości

- a) **Tytuł:** *Iteracje w pierścieniach formalnych szeregów potęgowych*
- b) **Dane rozprawy:** *Iterations in rings of formal power series*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2015, 114 pp.
- c) **Omówienie celu naukowego rozprawy i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania**

1 Wprowadzenie

Teoria iteracji ma swoje źródła w problemach rozważanych już w dziewiętnastym wieku. Od tamtego czasu pojawiło się wiele nowych wyników (jednymi z najlepszych monografii w tym temacie są [66] oraz [30]), które rozrosły się w szeroką teorię z wieloma tak zaawansowanymi gałęziami, że trudno w jednej monografii ująć ze szczegółami istotę wszystkich badanych zagadnień. Nawet pewne szczególne gałęzie tej teorii jak holomorficzne układy dynamiczne, dyskretne układy dynamiczne, czy też rzeczywiste układy dynamiczne, rozrosły się do samodzielnych teorii z własnymi monografiami i pracami przeglądowymi. Dlatego też zaznaczymy tutaj jedynie te problemy i zagadnienia, które są ściśle związane z prezentowanymi dalej wynikami.

Dla niepustego zbioru X oraz dla funkcji $f : X \rightarrow X$ przez $f^{\circ n}$ oznaczmy n -tą iterację funkcji f zdefiniowaną indukcyjnie następująco:

$$\begin{aligned} f^{\circ 0} &= \text{id}_X, \\ f^{\circ k} &= f \circ f^{\circ(k-1)} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

gdzie id_X oznacza odwzorowanie identycznościowe na zbiorze X .

W 1815 roku Ch. Babbage [3] rozważał problem istnienia i postaci funkcji $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 2$ warunek

$$\psi^{\circ n}(x) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Uogólnienia problemu rozpatrywanego przez Babbage'a prowadzą do ważnego w teorii iteracji problemu istnienia i postaci *pierwiastków iteracyjnych* odwzorowania $f : X \rightarrow X$, tzn. do wyznaczenia funkcji $\psi : X \rightarrow X$ spełniających dla pewnego ustalonego $n \geq 2$ warunek

$$\psi^{\circ n} = f.$$

Niemal siedemdziesiąt lat później badano problem zanurzenia zadanej funkcji w jednoparametrową grupę odwzorowań. Przypomnijmy, że dla przemiennej grupy $(G, +)$ przez *grupę iteracji* (*jednoparametrową grupę odwzorowań*) rozumiemy rodzinę $(f_t)_{t \in G}$ funkcji $f_t : X \rightarrow X$ spełniającą

$$\begin{cases} f_{t_1+t_2} = f_{t_1} \circ f_{t_2} & \text{dla } t_1, t_2 \in G, \\ f_0 = \text{id}_X. \end{cases}$$

W przypadku $G \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jednoparametrowa grupa odwzorowań nazywana jest też *G-potokiem*. Zakłada się wówczas, że odwzorowanie $G \ni t \mapsto f_t(x) \in X$ jest zgodne ze strukturą zbioru X . W przypadku przestrzeni topologicznych zakłada się ciągłość tego odwzorowania (i mówimy wtedy o *ciągłych grupach iteracji*), zaś w przypadku $X \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$ jego regularność (różniczkowalność lub analityczność). Funkcję $f : X \rightarrow X$ nazywamy *iterowalną* (*zanurzalną w grupę iteracji*), jeśli istnieje taka grupa $(f_t)_{t \in G}$ odwzorowań $f_t : X \rightarrow X$, że

$$f_{t_0} = f \quad \text{dla pewnego } t_0 \in G \setminus \{0\}.$$

Dla $G \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ przyjmuje się $t_0 = 1$.

Problem zanurzania jest ściśle związany z innym ważnym w teorii iteracji zagadnieniem linearyzowalności funkcji. Linearyzowalność odwzorowań holomorficznych badana była pod koniec dziewiętnastego wieku. Wiadomo, że każda lokalnie holomorficzna w otoczeniu punktu stałego $0 \in \mathbb{C}$ funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest reprezentowalna przez zbieżny w otoczeniu tego punktu szereg potęgowy $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathbb{C}_0\{z\}$. Składnik $a_1 z$ nazywamy *częścią liniową* odwzorowania f . Przestrzeń $\mathbb{C}_0\{z\}$ jest oczywiście podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{C}_0[[z]]$ wszystkich

formalnych szeregów potęgowych $f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$. Funkcję $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lokalnie holomorficzną w otoczeniu punktu stałego $0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *formalnie linearyzowalną*, jeśli istnieje taki odwracalny element $\varphi \in \mathbb{C}_0[[z]]$, że z pewnym $\alpha \in \mathbb{C}$ w przestrzeni $\mathbb{C}_0[[z]]$ zachodzi równość

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = \alpha z.$$

Problem linearyzowalności odwzorowania prowadzi więc do znalezienia formalnego rozwiązania $\varphi \in \mathbb{C}_0[[z]]$ równania Schrödera

$$\varphi(f(z)) = \alpha \varphi(z)$$

przy zadanej holomorficznej w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}$ funkcji $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Równanie to po raz pierwszy rozważane było przez E. Schrödera w 1874 roku. Przegląd wszystkich istotnych wyników dotyczących linearyzowalności i zanurzalności zawarty jest w pozycji [1].

Innym istotnym zagadnieniem badanym w XX wieku był problem zanurzenia automorfizmu $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}[[\mathbf{X}]])$ w jednoparametrową grupę Liego $(A_t)_{t \in \mathbb{C}}$ automorfizmów $A_t \in \mathcal{A}(\mathbb{C}[[\mathbf{X}]])$ n zmiennych $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ (por. D. Lewis [31], S. Sternberg [64], K. T. Chen [7], E. Pesschl i L. Reich [41], L. Reich i J. Schwaiger [58]–[59], L. Reich [44], G. Mehring [32], C. Praagman [42]. Szczególnie intensywnie i dokładnie problemy iteracyjne badane były w pierścieniu $\mathbb{C}[[X]]$ szeregów formalnych jednej zmiennej. Dotyczy to zarówno problemu zanurzania (S. Scheinberg [60]), ogólnego opisu jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych (H. Fripertinger i L. Reich [11]–[12], D. Gronau [14], W. Jabłoński i L. Reich [22]–[26], L. Reich [43], S. Scheinberg [60]), opisu i charakteryzacji grup i maksymalnych grup komutujących formalnych szeregów potęgowych (L. Reich [46]–[51]) jak też istnienia i postaci pierwiastków iteracyjnych pewnych formalnych szeregów potęgowych (L. Reich [52]–[56] oraz J. Schwaiger [61]). Omówienie innych istotnych problemów rozważanych w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych jednej zmiennej znaleźć można w pracy przeglądowej I. Babenko [4].

W połowie XX wieku zupełnie niezależnie rozważany był w geometrii różniczkowej problem klasyfikacji obiektów geometrycznych (por. J. Aczél oraz S. Gołąb [2]). Kluczowa jest tutaj grupa Liego L_s^n klas abstrakcji (s -żetów) lokalnych dyfeomorfizmów w otoczeniu punktu stałego $0 \in \mathbb{R}^n$. W przypadku jednowymiarowym grupa L_s^1 ma prosty analityczny opis

$$L_s^1 \ni [f]_{\sim} \mapsto (f'(0), f''(0), \dots, f^{(s)}(0)) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{s-1}.$$

Z punktu widzenia stosowanych w tej klasyfikacji metod i technik ważne było wyznaczanie pewnych podpółgrup i podgrup grupy L_s^1 (por. S. Midura [33]) i opis pewnych homomorfizmów w grupę L_s^1 . Wykorzystanie analitycznego opisu grupy L_s^1 istotnie upraszczało w przypadku $s \in \{2, 3, 4, 5\}$ rozważania i dowody. Opis ten i wykorzystywane metody dowodowe okazały się jednak zdecydowanie niewystarczające przy próbach przeniesienia otrzymanych wyników na przypadek grupy L_s^1 z dowolnym $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wynika to z faktu, że z samego analitycznego opisu grupy L_s^1 trudno jest wywnioskować istotne w dowodach własności struktury grupowej. Okazuje się jednak (co zauważył w 2001 roku L. Reich), że grupa L_s^1 jest izomorficzna z pewną grupą obciętych formalnych szeregów potęgowych nad ciałem $\mathbb{R}$ (analogiczny wynik jest też prawdziwy dla grupy L_s^n i grupy odwracalnych n -elementowych ciągów obciętych formalnych szeregów potęgowych n -zmiennych). Zatem wszystkie wyniki otrzymane dla obciętych formalnych szeregów potęgowych nad ciałem $\mathbb{R}$ można przenieść na grupę L_s^1 .

Na koniec podkreślić należy istotną różnicę pomiędzy iterowalnością funkcji i iterowalnością formalnych szeregów potęgowych. Wiadomo (zob. L. Reich [45], [48]), że zadany automorfizm $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}[[\mathbf{X}]])$ jest zanurzalny w **ciągłą jednoparametrową grupę iteracji** wtedy i tylko wtedy, gdy jest zanurzalny w jednoparametrową grupę iteracji bez założenia jakiegokolwiek

regularności. Wynik ten nie jest prawdziwy dla funkcji rzeczywistych czy też dla funkcji holomorficznych. Różnica ta wynika z faktu (i zostanie to w tym opracowaniu pokazane), że iteracje w pierścieniu $\mathbb{C}[[X]]$ formalnych szeregów potęgowych jednej zmiennej **mają charakter czysto algebraiczny**, tzn. w dowodach wszystkich ważnych wyników nie jest istotna topologiczna i analityczna struktura ciała $\mathbb{C}$.

Zasadniczym celem niniejszego opracowania jest opis wszystkich grup iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych i obciętych formalnych szeregów potęgowych. Problem ten był wcześniej badany dla formalnych szeregów potęgowych jednej zmiennej nad ciałem $\mathbb{C}$ m. in. przez L. Reicha ([43]), H. Friptingera i L. Reicha ([11]–[12]) oraz S. Scheinberga ([60]). D. Gronau rozważał grupy iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad dowolnym ciałem K o charakterystyce 0 zakładając dodatkowo ich pewną abstrakcyjną regularność. We wspólnych pracach napisanych z L. Reichem ([22]–[25]) opisane zostały pewne grupy iteracji (w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych i obciętych formalnych szeregów potęgowych nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) indeksowane elementami dowolnej grupy abelowej $(G, +)$. Próba jednolitego podejścia do opisu tych grup iteracji podjęta została w pracy [26] i niestety opis ten nie był kompletny (stosowanymi tam metodami nie udało się opisać wszystkich możliwych grup iteracji). Nadal problemem było rozwiązanie pewnych układów równań funkcyjnych. Nawet wykorzystanie klasy regularnych grup iteracji do opisu wszystkich rozwiązań tych układów równań nie przyniosło oczekiwanych efektów.

Nowa metoda rozwiązywania problemu jest wolna od tej wady. Nie dość, że przedstawione dalej wyniki udowodniono bez żadnych dodatkowych założeń w pierścieniu (obciętych) formalnych szeregów potęgowych nad dowolnym ciałem o charakterystyce 0, to zaprezentowane tu podejście jest jednolite we wszystkich rozpatrywanych przypadkach. Stało się to możliwe poprzez analizę i głębsze wykorzystanie algebraicznych własności grup komutujących formalnych szeregów potęgowych i obciętych formalnych szeregów potęgowych. Ciężar dowodów został przełożony na algebraiczną charakteryzację **grup komutujących formalnych szeregów potęgowych i maksymalnych grup komutujących formalnych szeregów potęgowych**. W efekcie problem rozwiązywania skomplikowanych (i w wielu przypadkach nieskończonych) układów równań funkcyjnych sprowadzony został do homomorfizmów lub skończonych układów homomorfizmów grupy przemiennej $(G, +)$ w grupy $(K^*, \cdot)$ oraz $(K, +)$.

W dalszej kolejności przytoczymy istotne wiadomości dotyczące pierścienia formalnych szeregów potęgowych i obciętych formalnych szeregów potęgowych. Następnie podamy opis wszystkich istotnych dalej regularnych (w abstrakcyjnym sensie) grup iteracji w pierścieniu (obciętych) formalnych szeregów potęgowych. Skonstruowane regularne grupy iteracji wykorzystamy do opisu grup i maksymalnych grup komutujących formalnych szeregów potęgowych. Otrzymany opis maksymalnych grup komutujących formalnych szeregów potęgowych pozwoli na jasny i precyzyjny opis wszystkich grup iteracji w pierścieniu (obciętych) formalnych szeregów potęgowych. Na koniec pokażemy możliwe zastosowania grup iteracji do rozwiązania problemów dotyczących zanurzenia formalnego szeregu potęgowego w grupę iteracji oraz istnienia i postaci pierwiastków iteracyjnych pewnych szeregów potęgowych. Jednocześnie rozważenie obciętych formalnych szeregów potęgowych pozwoli na podanie opisu pewnych podgrup i homomorfizmów w grupę L_s^1 .

2 Pierścień formalnych szeregów potęgowych

Niech P będzie pierścieniem przemennym z jedynką. Przez $P[[X]]$ oznaczmy pierścień formalnych szeregów potęgowych $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ o współczynnikach z pierścienia P ze zwykłymi operacjami dodawania i mnożenia. W ideale $\mathfrak{m} = (X) = XP[[X]]$ poprawnie można zdefiniować

operację *podstawiania* za zmienną niezależną X wzorem

$$(F_1 \circ F_2)(X) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} d_j X^j \right)^k \quad \text{dla } F_1(X) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X^k, F_2(X) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k X^k \in XP[[X]].$$

Wówczas para $(XP[[X]], \circ)$ jest monoidem z elementem neutralnym X . Ponadto podzbiór

$$\Gamma^{\infty} := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k X^k \in XP[[X]] : c_1 \in U(P) \right\}$$

zawiera wszystkie elementy odwracalne względem podstawiania w ideale $\mathfrak{m}$ i jest on grupą z działaniem podstawiania.

Dla ustalonej liczby naturalnej s zbiór $\mathcal{I}_s = \mathfrak{m}^{s+1} = (X^{s+1}) = X^{s+1}P[[X]]$ jest ideałem w $P[[X]]$. Niech $P[[X]]_s$ będzie pierścieniem ilorazowym zawierającym wszystkie *warstwy* $F + \mathcal{I}_s$. Z każdą warstwą wyznaczoną przez formalny szereg potęgowy $F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ zwiążemy tzw. *s-obcięcie* $F^{[s]}$ szeregu F zdefiniowane wzorem

$$F^{[s]}(X) = \sum_{k=0}^s c_k X^k.$$

Jednocześnie rodzina

$$\Gamma^s := \left\{ \sum_{k=1}^s c_k X^k \in XP[[X]]_{s-1} : c_1 \in U(P) \right\}$$

jest grupą (względem operacji podstawiania $\circ_s$ w $XP[[X]]_{s-1}$) zawierającą wszystkie elementy odwracalne względem $\circ_s$ w ideale $\mathfrak{m} = XP[[X]]_{s-1}$.

Niech $P[[X]]_{\infty} := P[[X]]$. Rozważając jednocześnie formalne szeregi potęgowe i obcięte formalne szeregi potęgowe, elementy pierścienia $P[[X]]_s$ dla $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ nazywać będziemy formalnymi szeregami potęgowymi. Pomijany będzie też wskaźnik s w symbolach $\cdot_s$ oraz $\circ_s$. Jeśli nie będzie to dalej osobno zaznaczone, to przyjmujemy, że $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Analizując algebraiczną strukturę grupy Γ^s oraz grup komutujących formalnych szeregów potęgowych wykorzystamy fakt, że grupa Γ^{∞} jest *granicą projektywną* ciągu grup $(\Gamma^s)_{s \in \mathbb{N}}$. Istotnie, dla dowolnych liczb naturalnych s, r spełniających $r \leq s$ projekcje $\pi_r^s : \Gamma^s \rightarrow \Gamma^r$,

$$\pi_r^s(F) = F^{[r]} \quad \text{dla } F \in \Gamma^s$$

są epimorfizmami grup oraz $\pi_k^k = \text{id}_{\Gamma^k}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Projekcje te spełniają warunek

$$\pi_p^r \circ \pi_r^s = \pi_p^s \quad \text{dla wszystkich takich } p, r, s \in \mathbb{N}, \text{ że } p \leq r \leq s.$$

Stąd grupa Γ^{∞} jest *granicą projektywną* ciągu grup $(\Gamma^s)_{s \in \mathbb{N}}$ z *epimorfizmem kanonicznym* (projekcją) $\pi_s^{\infty} : \Gamma^{\infty} \rightarrow \Gamma^s$,

$$\pi_s^{\infty}(F) = F^{[s]} \quad \text{dla } F \in \Gamma^{\infty}.$$

W zaproponowanym podejściu algebraicznym bardzo istotne są też:

- a) multiplikatywna grupa $\mathbf{E}_m \subset U(R)$ pierwiastków z jedności stopnia $m \in \mathbb{N}$ w pierścieniu całkowitym R o charakterystyce 0 ($U(R)$ jest grupą wszystkich elementów odwracalnych w R),

- b) grupa $\mathcal{N}_m^s \subset \Gamma^s$ formalnych szeregów potęgowych nad R w postaci normalnej rzędu $m \in \mathbb{N}$, tj. rodzina formalnych szeregów potęgowych postaci $F(X) = c_1X + \sum_{l=1}^r c_{lm+1}X^{lm+1} \in \Gamma^s$, gdzie $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ jest największą taką liczbę naturalną, że $rm + 1 \leq s$ dla $s \in \mathbb{N}$ oraz $r = \infty$ w przypadku $s = \infty$,

- c) operacja *sprzężenia* (automorfizm wewnętrzny grupy Γ^s) $\mathcal{A}_T : \Gamma^s \rightarrow \Gamma^s$,

$$\mathcal{A}_T(F) = T \circ F \circ T^{-1} \quad \text{dla } F \in \Gamma^s,$$

z pewnym $T \in \Gamma^s$.

Rozważane tu i dalej grupy form normalnych, pomimo skomplikowanego opisu, mają w pewnych przypadkach bardzo prostą charakterystykę algebraiczną. Niech R będzie pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0 i ustalmy $m, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. W zbiorze $\mathbf{E}_m \times R^{k-1}$ wprowadzamy działanie

$$(c_1, c_2, \dots, c_k) \diamond (d_1, d_2, \dots, d_k) = (c_1d_1, c_2 + d_2, \dots, c_k + d_k),$$

dla $(c_1, c_2, \dots, c_k), (d_1, d_2, \dots, d_k) \in \mathbf{E}_m \times R^{k-1}$. Okazuje się, że para $(\mathbf{E}_m \times R^{k-1}, \diamond)$ jest grupą (zob. [20, Lemma 1.13]), a pewne istotne w dalszych rozważaniach grupy formalnych szeregów potęgowych są z nią izomorficzne.

Od strony technicznej w przeprowadzonych rozważaniach i dowodach kluczowe są pochodna formalna w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych oraz analityczna postać operacji podstawiania w ideale $XP[[X]]_{s-1}$. Formalne różniczkowanie $\frac{d}{dX}$ w pierścieniu $P[[X]]_s$ określone wzorem

$$\frac{d}{dX} \left(\sum_{k=0}^s c_k X^k \right) := \sum_{k=1}^s k c_k X^{k-1} \quad \text{dla } \sum_{k=0}^s c_k X^k \in P[[X]]_s$$

jest naturalnym rozszerzeniem formalnego różniczkowania w pierścieniu wielomianów. Spełniona jest tutaj *reguła łańcuchowa* (ang.: *chain rule*)

$$\frac{d}{dX}(F_1 \circ F_2)(X) = \left(\frac{d}{dY} F_1(Y) \Big|_{Y=F_2(X)} \right) \cdot \frac{d}{dX} F_2(X).$$

Na koniec, dla dowolnych takich liczb całkowitych k, l , że $k \leq l$ przez $|k, l|$ oznaczmy zbiór tych liczb całkowitych n , które spełniają $k \leq n \leq l$. Jednocześnie $|k, \infty|$ jest zbiorem tych liczb całkowitych n , dla których $n \geq k$.

Lemat 1 ([20, Lemma 1.4]). *Jeśli $F_1(X) = \sum_{k=1}^s a_k X^k$, $F_2(X) = \sum_{k=1}^s b_k X^k \in XP[[X]]_{s-1}$ oraz $(F_1 \circ F_2)(X) = \sum_{n=1}^s d_n X^n \in XP[[X]]_{s-1}$, to*

$$(1) \quad d_n = \sum_{l=1}^n a_l \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,l}} B_{\bar{u}_n}^l \prod_{j=1}^n b_j^{u_j} \quad \text{dla } n \in |1, s|,$$

gdzie

$$U_{n,l} = \left\{ \bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n) \in |0, l|^n : \sum_{j=1}^n u_j = l, \sum_{j=1}^n j u_j = n \right\} \quad \text{oraz} \quad B_{\bar{u}_n}^l = \frac{l!}{\prod_{j=1}^n u_j!}.$$

W występujących dalej modyfikacjach wzoru (1) przyjmuje się następującą konwencję: jeśli $k > l$, to $|k, l| = \emptyset$, a wówczas $\sum_{t \in \emptyset} a_t = 0$ oraz $\prod_{t \in \emptyset} b_t = 1$.

3 Regularne grupy iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych

Pierwszym etapem rozwiązania omówionych na wstępie problemów jest opisanie wszystkich regularnych jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych nad pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0. Rozważymy tutaj następujące dwa typy takich grup (F_t) , a mianowicie:

1° $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$, $G_1 \subset U(R)$ jest nieskończoną grupą multiplikatywną oraz $F(t, X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G_1$, gdzie $c_j : G_1 \rightarrow R$ dla $j \in |2, s|$,

2° $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 3$, $k \in |2, s-1|$, $G_2 \subset R$ jest nieskończoną grupą addytywną oraz $F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t)X^j \in \Gamma_1^s$ dla $t \in G_2$, gdzie $c_j : G_2 \rightarrow R$ dla $j \in |k+1, s|$.

Założymy tu regularność jednoparametrowych grup $(F_t)_{t \in G}$ ($G \in \{G_1, G_2\}$) formalnych szeregów potęgowych. Regularność ta oznaczać będzie formalną różniczkowalność odwzorowania

$$G \ni t \mapsto F_t \in \Gamma^s.$$

W tym celu przyjmijmy na początek, że dla jednoparametrowej grupy $F_t(X) = F(t, X) = c_1(t)X + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$, gdzie $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$, odwzorowania $c_1 : G \rightarrow U(R)$ oraz $c_j : G \rightarrow R$ dla $j \in |2, s|$ są funkcjami wielomianowymi. Przez *funkcję wielomianową* na R rozumiemy odwzorowanie

$$R \ni t \mapsto w(t) \in R,$$

gdzie $w(x) \in R[x]$ jest wielomianem nad pierścieniem R . Oczywiście w pierścieniu całkowitym R o charakterystyce 0 pierścień funkcji wielomianowych na R jest izomorficzny z pierścieniem wielomianów nad R . W tym przypadku można dalej mówić o formalnej pochodnej

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, X) = \sum_{i=1}^s c'_i(t)X^i \quad \text{dla } t \in G,$$

i taką grupę $(F_t)_{t \in G}$ nazywać będziemy *regularną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych*. Założenie regularności umożliwia podanie opisu rozważanych grup poprzez sprowadzenie problemu do rozwiązania formalnego cząstkowego równania różniczkowego, które jest w istocie układem formalnych równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwiązanie to można skonstruować w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad takim pierścieniem całkowitym R o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q (które jest z oczywistych względów izomorficzne z ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych). Okazuje się też, że w drugim z rozważanych przypadków (dla $s = \infty$) możliwy jest operatorowy opis takiej jednoparametrowej grupy.

Nim opiszemy regularne jednoparametrowe grupy formalnych szeregów potęgowych zdefiniujemy operator całkowania. Niech dalej R będzie takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, zawierającym ciało proste Q . Dla $x_0, x \in R$ definiujemy operator $\int_{x_0}^x (\cdot) dx : R[x] \rightarrow R[x]$,

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{k=0}^n c_k x^k \right) dx =: \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{k-1}}{k} (x^k - x_0^k) \quad \text{dla } \sum_{k=0}^n c_k x^k \in R[x].$$

Innymi słowy dla wielomianu $g \in R[x]$ całka $\int_{x_0}^x g dx$ oznacza jedyny taki wielomian $f \in R[x]$, że $f' = g$ oraz $f(x_0) = 0$.

3.1 Przypadek 1°

Niech $G_1 \subset U(R)$ będzie nieskończoną grupą multiplikatywną, $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i założmy, że $(F_t)_{t \in G_1}$, $F_t(X) = F(t, X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G_1$ jest regularną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych, gdzie $c_j : G_1 \rightarrow R$ dla $j \in |2, s|$ są funkcjami wielomianowymi. Wówczas rodzina $(F(t, X))_{t \in G_1}$ spełnia *równanie translacji*

$$(2) \quad \begin{cases} F(t_1 \cdot t_2, X) = F(t_1, F(t_2, X)) & \text{dla } t_1, t_2 \in G_1, \\ F(1, X) = X, \end{cases}$$

które w rozważanym przypadku jest następującym układem równań funkcyjnych

$$(3) \quad \begin{cases} c_2(t_1 t_2) = t_1 c_2(t_2) + c_2(t_1) t_2^2 & \text{dla } t_1, t_2 \in G_1, \\ c_n(t_1 t_2) = t_1 c_n(t_2) + \sum_{l=2}^{n-1} c_l(t_1) \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,l}} B_{\bar{u}_n}^l t_2^{u_1} \prod_{j=2}^{n-l+1} c_j(t_2)^{u_j} \\ \quad + c_n(t_1) t_2^n & \text{dla } t_1, t_2 \in G_1, n \in |4, s|. \end{cases}$$

Techniki rozwiązywania podobnych układów równań funkcyjnych (zob. [33], [38], [39] dla $s \leq 5$ oraz [16] dla $s \in \mathbb{N}$) są w tym przypadku dalece niewystarczające. Założenie formalnej różniczkowości odwzorowania $G_1 \ni t \mapsto F_t \in \Gamma^s$ pozwala na zastosowanie metod teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Jeśli więc rodzina $(F_t)_{t \in G_1}$,

$$F_t(X) = F(t, X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s \quad \text{dla } t \in G_1,$$

gdzie $c_j : G_1 \rightarrow R$ dla $j \in |2, s|$ są funkcjami wielomianowymi, jest (regularną!) jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych, to (zob. [20, Lemma 2.2]) istnieje taki formalny szereg potęgowy $L \in \Gamma_1^s$, że

$$(4) \quad \begin{cases} t \frac{\partial F}{\partial t}(t, X) = L(F(t, X)) & \text{dla } t \in G_1, \\ F(1, X) = X. \end{cases}$$

Formalne równanie różniczkowe (4) jest w tym przypadku układem formalnych różniczkowych równań zwyczajnych

$$\begin{cases} t c_2'(t) = c_2(t) + \lambda_2 t^2 & \text{dla } t \in G_1, c_2(1) = 0, \\ t c_n'(t) = c_n(t) + \sum_{l=2}^{n-1} (l-1) \lambda_l \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,l}} B_{\bar{u}_n}^l t^{u_1} \prod_{j=2}^{n-l+1} c_j(t)^{u_j} \\ \quad + (n-1) \lambda_n t^n & \text{dla } t \in G_1, c_n(1) = 0, n \in |4, s|. \end{cases}$$

Rozwiązanie formalnego równania różniczkowego (4) opisane jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 1 ([20, Theorem 2.1]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$. Niech R będzie takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q . Niech $G_1 \subset U(R)$ będzie nieskończoną grupą multiplikatywną. Określmy indukcyjnie ciągi $(\tilde{P}_n)_{n \geq 2}$ oraz $(P_n)_{n \geq 2}$ uniwersalnych (niezależnych od s) wielomianów $\tilde{P}_n(x, y_2, \dots, y_{n-1}) \in Q[x, y_2, \dots, y_{n-1}]$ oraz $P_n(x, y_2, \dots, y_n) \in Q[x, y_2, \dots, y_n]$,*

$$(5) \quad \begin{aligned} \tilde{P}_2(x) &= 0, & P_2(x, y_2) &= y_2(x-1) + \tilde{P}_2(x), \\ \tilde{P}_n(x, y_2, \dots, y_{n-1}) &= \int_1^x \left(\sum_{l=2}^{n-1} y_l z^{l-2} \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,l}} B_{\bar{u}_n}^l \prod_{j=2}^{n-l+1} P_j(z, y_2, \dots, y_j)^{u_j} \right) dz \\ P_n(x, y_2, \dots, y_n) &= y_n(x^{n-1} - 1) + \tilde{P}_n(x, y_2, \dots, y_{n-1}) & \text{dla } n \geq 3. \end{aligned}$$

Wówczas dla każdego $L(X) = X + \sum_{j=2}^s (j-1)\lambda_j X^j \in \Gamma_1^s$ formalne cząstkowe równanie różniczkowe (4) ma dokładnie jedno rozwiązanie $F(t, X) = tX + \sum_{n=2}^s c_n(t)X^n \in \Gamma^s$ dla $t \in G_1$, gdzie wielomiany $c_n(x) \in R[x]$ zadane są wzorami

$$c_n(x) = \lambda_n(x^n - x) + x\tilde{P}_n(x, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) = xP_n(x, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad \text{dla } n \in |2, s|.$$

Okazuje się, że każde rozwiązanie $(F_t)_{t \in G_1}$ formalnego cząstkowego równania różniczkowego (4) musi być regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych. Reasumując rozważania w tym przypadku otrzymamy

Twierdzenie 2 ([20, Theorem 2.1]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$. Niech R będzie takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q . Niech $G_1 \subset U(R)$ będzie nieskończoną grupą multiplikatywną.*

Jeśli $(F_t)_{t \in G_1}$ jest regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad R , gdzie $F_t(X) = F(t, X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G_1$ oraz $c_j : G_1 \rightarrow R$ dla $j \in |2, s|$ są funkcjami wielomianowymi, to istnieje taki formalny szereg potęgowy $L \in \Gamma_1^s$, że zachodzi (4).

Na odwrót, dla każdego formalnego szeregu potęgowego $L \in \Gamma_1^s$ rodzina $F(t, X) = tX + \sum_{i=2}^s c_i(t)X^i \in \Gamma^s$ dla $t \in G_1$ zdefiniowana przez (4) i opisana w Twierdzeniu 1 spełnia (2), a więc jest regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad R .

Formalny szereg potęgowy $L \in \Gamma_1^s$ jest zdefiniowany przez $L(X) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, X)|_{t=1}$.

3.2 Przypadek 2°

Niech $G_2 \subset R$ będzie nieskończoną grupą addytywną, $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 3$, $k \in |2, s-1|$ i założmy, że $(F_t)_{t \in G_2}$, $F_t(X) = F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t)X^j \in \Gamma_1^s$ dla $t \in G_2$ jest regularną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych, gdzie $c_j : G_2 \rightarrow R$ dla $j \in |k+1, s|$ są funkcjami wielomianowymi. Wówczas spełnione jest równanie translacji

$$(6) \quad \begin{cases} F(t_1 + t_2, X) = F(t_1, F(t_2, X)) & \text{dla } t_1, t_2 \in G_2, \\ F(0, X) = X, \end{cases}$$

które w tym przypadku jest układem równań funkcyjnych postaci

$$c_n(t_1 + t_2) = c_n(t_1) + \sum_{l=k}^{n-k+1} c_l(t_1) \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,l}^k} B_{\bar{u}_n}^l t_2^{u_k} \prod_{j=k+1}^{n-l+1} c_j(t_2)^{u_j} + c_n(t_2) \quad \text{dla } t_1, t_2 \in G_2, n \in |k+1, s|,$$

gdzie $U_{n,l}^k = \{\bar{u}_n \in U_{n,l} : u_j = 0 \text{ dla } j \in |2, k-1|\}$ dla $k \in |2, s|$. Także tutaj metody stosowane w teorii równań funkcyjnych są niewystarczające do konstrukcji rozwiązania ogólnego tego układu równań funkcyjnych. Założenie regularności rozwiązań pozwala zastosować, jak w poprzednim przypadku, metody teorii równań różniczkowych. Wiadomo (zob. [20, Lemma 2.3]), że jeśli rodzina $(F_t)_{t \in G_2}$,

$$F_t(X) = F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t)X^j \in \Gamma_1^s \quad \text{dla } t \in G_2,$$

gdzie $c_j : G_2 \rightarrow R$ dla $j \in |k+1, s|$ są funkcjami wielomianowymi, jest regularną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych, to istnieje taki formalny szereg potęgowy $H(X) = X^k + \sum_{j=k+1}^s h_j X^j \in R[[X]]_s$, że

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, X) = H(F(t, X)) & \text{for } t \in G_2, \\ F(0, X) = X. \end{cases}$$

Okazuje się, że powyższe formalne równanie różniczkowe cząstkowe jest układem formalnych równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$(8) \quad c'_n(t) = h_n + \sum_{l=k}^{n-k+1} h_l \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,l}^k} B_{\bar{u}_n}^l t^{u_k} \prod_{j=k+1}^{n-l+1} c_j(t)^{u_j} \quad \text{dla } t \in G_2, n \in |k+1, s|, c_n(0) = 0.$$

Następujące twierdzenie opisuje wszystkie rozwiązania formalnego cząstkowego równania różniczkowego (7).

Twierdzenie 3 ([20, Theorem 2.3]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 3$, $k \in |2, s-1|$. Niech R będzie takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q i niech $G_2 \subset R$ będzie nieskończoną grupą addytywną. Określmy indukcyjnie ciągi $(\tilde{L}_n^k)_{n \geq k+1}$ oraz $(L_n^k)_{n \geq k+1}$ wielomianów (niezależnych od s) $\tilde{L}_n^k(x, (y_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}) \in Q[x, y_{k+1}, \dots, y_{n-k+1}]$ oraz $L_n^k(x, (y_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}, y_n) \in Q[x, y_{k+1}, \dots, y_{n-k+1}, y_n]$, ($y_k = 1$)*

$$(9) \quad \begin{aligned} \tilde{L}_{k+1}^k(x) &= \int_0^x \left(\sum_{l=k}^2 \sum_{\bar{u}_n \in U_{k+1,l}^k} B_{\bar{u}_n}^l z^{u_k} \right) dz, \\ L_{k+1}^k(x, y_{k+1}) &= y_{k+1}x + \tilde{L}_{k+1}^k(x), \\ \tilde{L}_n^k(x, (y_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}) &= \int_0^x \left(\sum_{l=k}^{n-k+1} y_l \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,l}^k} B_{\bar{u}_n}^l z^{u_k} \prod_{j=k+1}^{n-l+1} \left(L_j^k(z, (y_i)_{i \in |k+1, j-k+1|}, y_j) \right)^{u_j} \right) dz, \\ L_n^k(x, (y_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}, y_n) &= y_n x + \tilde{L}_n^k(x, (y_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}) \quad \text{dla } n \geq k+2. \end{aligned}$$

Wówczas dla każdego $H(X) = X^k + \sum_{j=k+1}^s h_j X^j \in R[[X]]_s$ formalne cząstkowe równanie różniczkowe (7) ma dokładnie jedno rozwiązanie $F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t)X^j \in \Gamma_1^s$ dla $t \in G_2$, gdzie wielomiany $c_j(x) \in R[x]$ dla $j \in |k+1, s|$ opisane są przez

$$c_n(x) = h_n x + \tilde{L}_n^k(x, (h_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}) = L_n^k(x, (h_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}, h_n) \quad \text{dla } n \in |k+1, s|.$$

Także tutaj każde rozwiązanie $(F_t)_{t \in G_2}$ formalnego równania różniczkowego (7) jest regularną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych. Otrzymujemy zatem

Twierdzenie 4 ([20, Theorem 2.4]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 3$, $k \in |2, s-1|$. Niech R będzie takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q i niech $G_2 \subset R$ będzie nieskończoną grupą addytywną.*

Jeśli $(F_t)_{t \in G_2}$ jest regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad R , gdzie $F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t)X^j \in \Gamma_1^s$ dla $t \in G_2$ oraz $c_j : G_2 \rightarrow R$ dla $j \in |k+1, s|$ są funkcjami wielomianowymi, to istnieje taki formalny szereg potęgowy $H(X) = X^k + \sum_{j=k+1}^s h_j X^j \in R[[X]]_s$, że zachodzi (7).

Na odwrót, dla każdego formalnego szeregu potęgowego $H(X) = X^k + \sum_{j=k+1}^s h_j X^j \in R[[X]]_s$ rodzina $F_t(X) = F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t)X^j \in \Gamma_1^s$ dla $t \in G_2$ zdefiniowana przez (7) i opisana w Twierdzeniu 3 spełnia (6), a więc jest regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad R .

Formalny szereg potęgowy $H(X)$ jest zdefiniowany przez $H(X) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, X)|_{t=0}$.

3.3 Postać operatorowa jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych w przypadku 2°

W przypadku 2° dla $s = \infty$ można podać bardziej zwarty operatorowy opis wszystkich regularnych jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych. W tym celu wykorzystamy ideę z pracy S. Scheinberga [60], który wykazał, że wszystkie (w zapisie addytywnym!) jednoparametrowe grupy $(F_t)_{t \in \mathbb{C}}$ formalnych szeregów potęgowych nad $\mathbb{C}$ można opisać wzorem

$$(10) \quad \begin{aligned} F_t(X) = F(t, X) &= e^{tH(X) \frac{\partial}{\partial X}} X := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j \left(H(X) \frac{\partial}{\partial X} \right)^j}{j!} X \\ &= X + tH(X) + \frac{t^2}{2} H(X) \frac{\partial}{\partial X} H(X) + \frac{t^3}{6} H(X) \frac{\partial}{\partial X} \left(H(X) \frac{\partial}{\partial X} H(X) \right) + \dots, \end{aligned}$$

gdzie formalny szereg potęgowy $H(X) := \frac{\partial}{\partial t} F(t, X)|_{t=0}$ nazywany jest *infinitesimalnym generatorem* grupy $(F_t)_{t \in \mathbb{C}}$. Mamy dwa typy takich jednoparametrowych grup są przez dwa typy *infinitesimalnych generatorów*:

$$C1) \quad \text{ord } H(X) = 1,$$

$$C2) \quad \text{ord } H(X) = l \geq 2.$$

W pierwszym przypadku mamy $F(t, X) = e^{\lambda t} X + \dots$ dla $t \in \mathbb{C}$, zaś drugi przypadek prowadzi do grupy postaci $F(t, X) = X + dtX^l + \dots$ dla $t \in \mathbb{C}$ gdzie $\lambda, d \in \mathbb{C}$ są stałymi. Można zauważyć, że w drugim przypadku mamy $\text{ord} \left(\left(H(X) \frac{\partial}{\partial X} \right)^j X \right) = 1 + j(l-1)$, i wtedy (10) zapisane względem kolejnych potęg zmiennej niezależnej X otrzyma postać $F(t, X) = X + dtX + \sum_{j=l+1}^{\infty} c_j(t)X^j$ dla $t \in \mathbb{C}$, gdzie $c_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dla $j \geq l+1$ są takimi funkcjami wielomianowymi, że $\deg c_j = \left[\frac{j-1}{l-1} \right]$. To sugeruje, że wzór (10) może poprawnie opisać rodzinę $F(t, X)$ w przypadku, gdy parametr t przebiega addytywną grupę G_2 takiego pierścienia całkowitego R o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q . Następujące twierdzenie pokazuje, że jest to możliwe.

Twierdzenie 5 ([20, Theorem 2.6]). *Założmy, że R jest takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q . Niech $G_2 \subset R$ będzie nieskończoną grupą addytywną oraz ustalmy $k \in |2, \infty|$.*

- (i) *Jeśli $(F_t)_{t \in G_2}$ jest taką regularną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych $F_t(X) = F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^{\infty} c_j(t)X^j \in \Gamma_1^{\infty}$ dla $t \in G_2$, że $c_j(x) \in R[x]$ dla $j \in |k+1, \infty|$, to istnieje taki formalny szereg potęgowy $H \in R[[X]]$, że $H^{[k]}(X) = X^k$ oraz zachodzi*

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, X) = H(F(t, X)) & \text{dla } t \in G_2, \\ F(0, X) = X. \end{cases}$$

(ii) Dla każdego takiego formalnego szeregu potęgowego $H \in R[[X]]$, że $H^{[k]}(X) = X^k$, rodzina $(F_t)_{t \in G_2}$ zdefiniowana wzorem

$$(12) \quad F_t(X) = F(t, X) = e^{tH(X) \frac{\partial}{\partial X}} X = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j \left(H(X) \frac{\partial}{\partial X} \right)^j}{j!} X \in \Gamma_1^{\infty} \quad \text{dla } t \in G_2$$

jest rozwiązaniem formalnego cząstkowego równania różniczkowego (11), a więc $(F_t)_{t \in G_2}$ jest regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad R .

Otwartym pozostaje problem, czy podobny operatorowy opis jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych jest możliwy w przypadku 1°. Twierdzenie 5 pozwoli dalej na łatwą (co nie oznacza prostoty zapisu!) charakteryzację regularnych jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych w $\overline{\mathcal{N}}_{m,q}^{\infty} = \left\{ F \in \Gamma^{\infty} : F(X) = X + \sum_{l=q}^{\infty} c_{lm+1} X^{lm+1} \right\}$.

Twierdzenie 6 ([20, Corollary 2.3]). *Załóżmy, że R jest takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q . Niech $G_2 \subset R$ będzie nieskończoną grupą addytywną oraz ustalmy $m, q \in \mathbb{N}$ oraz $k \in |2, \infty|$.*

Załóżmy, że $(F_t)_{t \in G_2}$ jest regularną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych $F_t(X) = F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^{\infty} c_j(t)X^j \in \Gamma^{\infty}$ dla $t \in G_2$, gdzie $c_j(x) \in R[x]$ dla $j \in |k+1, \infty|$, spełniającą formalne cząstkowe równanie różniczkowe (11) z infinitezimalnym generatorem $H \in R[[X]]_{\infty}$. Wówczas $F_t \in \overline{\mathcal{N}}_{m,q}^{\infty}$ dla $t \in G_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = qm+1$ oraz $H(X) = X^{qm+1} + \sum_{j=q+1}^{\infty} h_{jm+1} X^{jm+1} \in R[[X]]_{\infty}$.

Powyższy Wniosek umożliwia podanie skomplikowanego, ale niezmiernie ważnego dalej opisu wszystkich jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych w $\overline{\mathcal{N}}_{m,q}^{\infty}$.

Twierdzenie 7 ([20, Theorem 2.7]). *Niech R będzie pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0 zawierającym ciało proste Q , $G_2 \subset R$ niech będzie nieskończoną grupą addytywną i ustalmy $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $r \geq 2$, $q \in |1, r-1|$. Zdefiniujmy ciągi $(\tilde{L}_{nm+1}^{m,q})_{n \geq q+1}$ oraz $(L_{nm+1}^{m,q})_{n \geq q+1}$ (niezależnych od r) wielomianów $\tilde{L}_{nm+1}^{m,q}(x, (y_{im+1})_{i \in |q+1, n-q|}) \in Q[x, y_{(q+1)m+1}, \dots, y_{(n-q)m+1}]$ oraz $L_{nm+1}^{m,q}(x, (y_{im+1})_{i \in |q+1, n-q|}, y_{nm+1}) \in Q[x, y_{(q+1)m+1}, \dots, y_{(n-q)m+1}, y_{nm+1}]$, ($h_{qm+1} = 1$)*

$$(13) \quad \begin{aligned} \tilde{L}_{(q+1)m+1}^{m,q}(x) &= \int_0^x \left(\sum_{l=q}^1 \sum_{\substack{\bar{u}_{(q+1)m+1} \in U_{(q+1)m+1, lm+1}^{m,q}}} B_{\bar{u}_{(q+1)m+1}}^{lm+1} x^{u_{qm+1}} \right) dx, \\ L_{(q+1)m+1}^{m,q}(x, y_{(q+1)m+1}) &= y_{(q+1)m+1} x + \tilde{L}_{(q+1)m+1}^{m,q}(x), \\ \tilde{L}_{nm+1}^{m,q}(x, (y_{im+1})_{i \in |q+1, n-q|}) \\ &= \int_0^x \left(\sum_{l=q}^{n-q} y_{lm+1} \sum_{\bar{u}_{nm+1} \in U_{nm+1, lm+1}^{m,q}} B_{\bar{u}_{nm+1}}^{lm+1} \cdot \left(x^{u_{qm+1}} \prod_{j=q+1}^{n-l} \left(L_{jm+1}^{m,q}(x, (y_{im+1})_{i \in |q+1, j-q|}, y_{jm+1}) \right)^{u_{jm+1}} \right) \right) dx, \\ L_{nm+1}^{m,q}(x, (y_{im+1})_{i \in |q+1, n-q|}, y_{nm+1}) \\ &= y_{nm+1} x + \tilde{L}_{nm+1}^{m,q}(x, (y_{im+1})_{i \in |q+1, n-q|}) \quad \text{dla } n \geq q+1. \end{aligned}$$

Jeśli $(F_t)_{t \in G_2}$ jest taką regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad R , że $F_t(X) = F(t, X) = X + tX^{qm+1} + \sum_{j=q+1}^r c_{jm+1}(t)X^{jm+1} \in \overline{\mathcal{N}}_{m,q}^{r, m+1}$ dla $t \in G_2$

oraz $c_{jm+1}(x) \in R[x]$ dla $j \in |q+1, r|$, to istnieje taki formalny szereg potęgowy $H(X) = X^{qm+1} + \sum_{j=q+1}^r h_{jm+1} X^{jm+1} \in R[[X]]_{rm+1}$, że

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, X) = H(F(t, X)) & \text{dla } t \in G_2, \\ F(0, X) = X. \end{cases}$$

Na odwrót, dla każdego $H(X) = X^{qm+1} + \sum_{j=q+1}^r h_{jm+1} X^{jm+1} \in R[[X]]_{rm+1}$ rodzina $F_t(X) = F(t, X) = X + tX^{qm+1} + \sum_{j=q+1}^r c_{jm+1}(t) X^{jm+1} \in \mathcal{N}_m^{rm+1}$ dla $t \in G_2$ zdefiniowana przez (14) z funkcjami wielomianowymi

$$\begin{aligned} c_{nm+1}(t) &= h_{nm+1}t + \tilde{L}_{nm+1}^{m,q}(t, h_{(q+1)m+1}, \dots, h_{(n-q)m+1}) \\ &= L_{nm+1}^{m,q}(t, h_{(q+1)m+1}, \dots, h_{(n-q)m+1}, h_{nm+1}) \quad \text{dla } t \in G_2, n \in |q+1, r|, \end{aligned}$$

jest regularną grupą iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad R .

3.4 Przedłużalność jednoparametrowych grup obciętych formalnych szeregów potęgowych

Przedyskutujemy tutaj problem postawiony w 1991 roku przez L. Reicha [50], dotyczący w oryginalnej postaci przedłużalności homomorfizmów w grupę L_s^1 . Załóżmy, że $s \in \mathbb{N}$.

Niech P będzie pierścieniem przemiennym z jedynką, $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ i niech $(G, +)$ będzie grupą przemienną. Grupę iteracji $(F_t)_{t \in G} \subset \Gamma^s$ w pierścieniu obciętych formalnych szeregów potęgowych nad P nazywamy l -przedłużalną, jeśli istnieje taka grupa iteracji $(\bar{F}_t)_{t \in G} \subset \Gamma^{s+l}$, że

$$\bar{F}_t^{[s]} = F_t \quad \text{dla } t \in G.$$

Problem przedłużalności sprowadza się więc do odpowiedzi na pytanie, czy dla dowolnej grupy iteracji $(F_t)_{t \in G}$ takich obciętych formalnych szeregów potęgowych $F_t(X) = F(t, X) = \sum_{j=1}^s c_j(t) X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G$, że $c_1 : G \rightarrow U(P)$ oraz $c_j : G \rightarrow P$ dla $j \in |2, s|$, istnieją funkcje $c_j : G \rightarrow P$ dla $j \in |s+1, s+l|$, dla których rodzina $(\bar{F}_t)_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych $\bar{F}_t(X) = \bar{F}(t, X) = \sum_{j=1}^{s+l} c_j(t) X^j \in \Gamma^{s+l}$ dla $t \in G$ jest grupą iteracji w Γ^{s+l} . Wykorzystując uniwersalność (niezależność od s) ciągów wielomianów $(\tilde{P}_n)_{n \geq 2}$, $(P_n)_{n \geq 2}$, $(\tilde{L}_n^k)_{n \geq k+1}$ oraz $(L_n^k)_{n \geq k+1}$ użytych do opisu regularnych jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych można wykazać następujące

Twierdzenie 8 ([20, Theorem 2.5]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N}$. Niech R będzie takim pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0, który zawiera ciało proste Q . Załóżmy, że $(F_t)_{t \in G}$ jest regularną grupą formalnych szeregów potęgowych $F_t \in \Gamma^s$ dla $t \in G$, spełniającą jeden z warunków:*

- (i) $s \geq 2$, $G = G_1 \subset U(R)$ jest nieskończoną grupą multiplikatywną oraz $F_t(X) = F(t, X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t) X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G_1$, gdzie $c_j : G_1 \rightarrow R$ dla $j \in |2, s|$ są funkcjami wielomianowymi,
- (ii) $s \geq 3$, $k \in |2, s-1|$, $G = G_2 \subset R$ jest nieskończoną grupą addytywną oraz $F_t(X) = F(t, X) = X + tX^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t) X^j \in \Gamma_1^s$ dla $t \in G_1$, gdzie $c_j : G_2 \rightarrow R$ dla $j \in |k+1, s|$ są funkcjami wielomianowymi.

Wtedy $(F_t)_{t \in G}$ jest l -przedłużalna dla każdego $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ z zachowaniem regularności. W obu przypadkach istnieje więc taka regularna jednoparametrowa grupa $(\bar{F}_t)_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych $\bar{F}_t \in \Gamma^\infty$ dla $t \in G$, że $\bar{F}_t^{[s]} = F_t$ dla $t \in G$.

3.5 Regularność jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych

Przedyskutujemy teraz problem regularności grup iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych. Założenie regularności badanych grup iteracji nie jest sztuczne. Okazuje się, że w rozpatrywanych tu przypadkach grupy iteracji są regularne albo pewne ich obcięcia są regularnymi grupami iteracji w pierścieniu obciętych formalnych szeregów potęgowych. Uzyskanie tej regularności wymaga jednak silniejszego założenia odnośnie struktury zbioru współczynników formalnych szeregów potęgowych. Rozważać będziemy tu grupy iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad **ciałem** o charakterystyce 0.

Twierdzenie 9 ([20, Corollary 2.4, Corollary 2.5]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0.*

- (i) *Założmy, że $s \geq 2$ oraz niech $G_1 \subset K^*$ będzie nieskończoną grupą multiplikatywną. Jeśli $(F_t)_{t \in G_1}$ jest jednoparametrową grupą takich formalnych szeregów potęgowych $F_t(X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G_1$, że $c_j : G_1 \rightarrow K$ dla $j \in [2, s]$, to*
 - (a) *grupa $(F_t)_{t \in G_1}$ jest regularna,*
 - (b) *dla $s \in \mathbb{N}$ grupa $(F_t)_{t \in G_1}$ jest l -przedłużalna z dowolnym $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*
- (ii) *Założmy, że $s \geq 3$, $k \in [2, s-1]$ i niech $G_2 \subset K$ będzie nieskończoną grupą addytywną. Jeśli $(F_t)_{t \in G_2}$ jest jednoparametrową grupą takich formalnych szeregów potęgowych $F_t(X) = X + tX^k + \sum_{j=k+2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma_1^s$ dla $t \in G_2$, że $c_j : G_2 \rightarrow K$ dla $j \in [k+1, s]$, to*
 - (a) *dla $s = \infty$ grupa $(F_t)_{t \in G_2}$ jest regularna,*
 - (b) *dla $s \in \mathbb{N}$ grupa $(F_t^{[s-k+1]})_{t \in G_2}$ jest regularna oraz l -przedłużalna z dowolnym $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

4 Grupy komutujących formalnych szeregów potęgowych

Przypomnijmy, że przez rodzinę komutujących formalnych szeregów potęgowych rozumiemy każdy taki zbiór $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ odwracalnych formalnych szeregów potęgowych, że

$$F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1 \quad \text{dla } F_1, F_2 \in \mathcal{F}^s.$$

Takie rodziny były wcześniej badane (dla $R = \mathbb{C}$ oraz $s = \infty$) przez L. Reicha w serii publikacji [47, 48, 51, 54]. Przedstawiona w tych pracach charakteryzacja grup komutujących formalnych szeregów potęgowych wykorzystuje formalne równanie różniczkowe Aczéla-Jabotinsky'ego

$$(15) \quad \frac{d\Phi}{dX} \cdot H(X) = (H \circ \Phi)(X)$$

oraz linearyzacje [46, 47]). W przypadku $s = \infty$ zbiór rozwiązań równania (15) (zob. [46]) jest, w zależności od $H \in \mathbb{C}[[X]]$, jedno- lub dwuparametrową grupą abelową. Co więcej, z wyników udowodnionych w [47] wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10. *Niech $k \in \mathbb{N}$ i ustalmy $H(X) = X^k + \sum_{l=k+1}^\infty h_l X^l \in \mathbb{C}[[X]]$. Wówczas zbiór rozwiązań równania różniczkowego (15) jest maksymalną grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych nad $\mathbb{C}$.*

Jeśli $\mathcal{F}^\infty \subset \Gamma^\infty$ jest rodziną komutujących formalnych szeregów potęgowych, to istnieje taki formalny szereg potęgowy $H(X) \in \mathbb{C}[[X]]$, że każdy element $\Phi \in \mathcal{F}^\infty$ spełnia (15). Poza przypadkiem, gdy grupa generowana przez rodzinę $\mathcal{F}^\infty$ jest skończona, formalny szereg potęgowy $H \in \mathbb{C}[[X]]$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez skalar.

Z przeprowadzonych wspólnie z L. Reichem badań wynika, że analogiczne twierdzenie nie jest w pełnej ogólności prawdziwe dla obciętych formalnych szeregów potęgowych¹⁾ (wynik ten pozostaje prawdziwy jedynie dla $k = 1$). Zatem do wspólnej charakteryzacji rodzin komutujących formalnych szeregów potęgowych i rodzin obciętych formalnych szeregów potęgowych nie można użyć równania (15).

Oczywiście każdą rodzinę komutujących formalnych szeregów potęgowych można zanurzyć w grupę komutujących formalnych szeregów potęgowych. Rozważanie grup komutujących formalnych szeregów potęgowych jest wygodniejsze ze względu na ich strukturę i możliwe własności algebraiczne. W pewnych przypadkach grupy te będą jednoparametrowymi grupami formalnych szeregów potęgowych. Przypadek grup komutujących obciętych formalnych szeregów potęgowych jest jednak, jak to zobaczymy dalej, dużo bardziej skomplikowany. O ile grupy komutujących formalnych szeregów potęgowych są jedno-lub dwuparametrowymi grupami abelowymi (zob. [47]), to w przypadku obciętych formalnych szeregów potęgowych tych parametrów może być więcej (choć będzie ich nadal skończenie wiele!).

Założmy, że $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i niech R będzie pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0. Następujące zbiory (w istocie grupy) będą użyteczne w klasyfikacji i opisie grup komutujących formalnych szeregów potęgowych w Γ^s . Ustalmy więc $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ i niech

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}^s &= \{F \in \mathcal{F}^s : F^{[1]} = L_1\}, \\ \mathbf{F}_1^s &= \{c \in U(R) : F^{[1]} = L_c \text{ dla pewnego } F \in \mathcal{F}^s\}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\overline{\mathcal{F}}^s = \ker \pi_1^s|_{\mathcal{F}^s}$, co oznacza, że $\overline{\mathcal{F}}^s$ jest normalną podgrupą w grupie $\mathcal{F}^s$. Możliwe przypadki dotyczące grup $\mathcal{F}^s$ oraz $\mathbf{F}_1^s$ prowadzą do następującej klasyfikacji grup komutujących formalnych szeregów potęgowych:

- A) $\text{card } \mathcal{F}^s < s$ (wówczas $\text{card } \mathbf{F}_1^s < s$, więc $\mathbf{F}_1^s$ jest skończona) lub $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$,
- B) $\mathbf{F}_1^s = \mathbf{E}_m$ dla pewnego $m \in |1, s-1|$ oraz grupa $\mathcal{F}^s$ jest nieskończona (co oznacza, że w tym przypadku również podgrupa $\overline{\mathcal{F}}^s$ jest nieskończona).

Zapisując równość $\mathbf{F}_1^s = \mathbf{E}_m$ dla pewnego $m \in |1, s-1|$ zakładamy dalej, że grupa $\mathbf{E}_m$ zawiera pierwiastek pierwotny stopnia m z jedności.

4.1 Grupy komutujących formalnych szeregów potęgowych w przypadku A)

Przypadek ten nie jest bardzo skomplikowany w swoim opisie. Algebraiczną charakteryzację tego przypadku można podać w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0. Analityczny opis wymaga jednak mocniejszego założenia, a mianowicie rozważania problemu w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych nad ciałem o charakterystyce 0.

Twierdzenie 11 ([20, Theorem 3.1, Corollary 3.3]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i niech R będzie pierścieniem całkowitym o charakterystyce 0. Załóżmy, że $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ jest taką grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych z odpowiadającą jej grupą współczynników wiodących $\mathbf{F}_1^s$, że $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$ lub grupa $\mathcal{F}^s$ jest skończona. Wówczas*

$$(i) \quad \mathcal{F}^s \cong \mathbf{F}_1^s,$$

¹⁾wyniki te są aktualnie przygotowywane do publikacji

(ii) odwzorowanie

$$(16) \quad \mathbf{F}_1^s \ni t \mapsto F_t(X) = F(t, X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \mathcal{F}^s$$

jest bijektywną parametryzacją grupy $\mathcal{F}^s$ z funkcjami $c_j : \mathbf{F}_1^s \rightarrow R$ dla $j \in |2, s|$ (co oznacza, że $\mathcal{F}^s$ jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych),

(iii) jeśli ponadto $\mathbf{F}_1^s = U(R)$, to $\mathcal{F}^s$ jest maksymalną grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych.

Opis analityczny rozważanych tu grup komutujących formalnych szeregów potęgowych zawarty jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 12 ([20, Corollary 3.4, Corollary 3.5, Theorem 3.2, Corollary 3.6]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i załóżmy, że K jest ciałem o charakterystyce 0. Niech $(\tilde{P}_n)_{n \geq 2}$ będzie ciągiem wielomianów zdefiniowanym przez (5).*

(i) *Rodzina $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ jest taką grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych nad K z multiplikatywną grupą współczynników wiodących $\mathbf{F}_1^s \subset K^*$, że grupa $\mathbf{F}_1^s$ jest nieskończona lub grupa $\mathcal{F}^s$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}^s = (F_t)_{t \in \mathbf{F}_1^s}$ jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych $F_t(X) = tX + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in \mathbf{F}_1^s$ oraz istnieje taki ciąg $(\lambda_j)_{j \in |2, s|}$ stałych $\lambda_j \in K$ dla $j \in |2, s|$, że współczynniki $c_j : \mathbf{F}_1^s \rightarrow K$ dla $j \in |2, s|$ określone są wzorami*

$$(17) \quad c_j(t) = \lambda_j(t^j - t) + t\tilde{P}_j(t, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}) \quad \text{dla } t \in \mathbf{F}_1^s, j \in |2, s|.$$

Jeśli grupa $\mathbf{F}_1^s$ jest nieskończona, to ciąg $(\lambda_j)_{j \in |2, s|}$ dla grupy $\mathcal{F}^s$ jest wyznaczony jednoznacznie.

(ii) *Każdą taką grupę $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ komutujących formalnych szeregów potęgowych nad K z multiplikatywną grupą $\mathbf{F}_1^s \subset K^*$, że grupa $\mathbf{F}_1^s$ jest nieskończona lub grupa $\mathcal{F}^s$ jest skończona, można zanurzyć w taką jednoparametrową grupę $\widehat{\mathcal{F}}^s = (\widehat{F}_t)_{t \in K^*}$ formalnych szeregów potęgowych $\widehat{F}_t(X) = tX + \sum_{j=2}^s \widehat{c}_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in K^*$, że funkcje $\widehat{c}_j : K^* \rightarrow K$ określone są wzorami*

$$(18) \quad \widehat{c}_j(t) = \widehat{\lambda}_j(t^j - t) + t\tilde{P}_j(t, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_{j-1}) \quad \text{dla } t \in K^*, j \in |2, s|,$$

oraz $(\widehat{\lambda}_j)_{j \in |2, s|}$ jest ciągiem stałych w K .

Grupa $\widehat{\mathcal{F}}^s$ jest wyznaczona jednoznacznie przez grupę $\mathcal{F}^s$ w przypadku, gdy grupa $\mathbf{F}_1^s$ jest nieskończona.

Oprócz przedstawionego w powyższym twierdzeniu analitycznego opisu grup komutujących formalnych szeregów potęgowych możliwy jest też ich algebraiczny opis wykorzystujący sprzężenia. Okazuje się, że w analizowanym tu przypadku istnieje linearyzacja, która jednocześnie transformuje wszystkie elementy rozpatrywanej grupy komutujących formalnych szeregów liniowych na grupę form liniowych. Istnienie transformacji $\mathcal{A}_T$ z odpowiednim $T \in \Gamma_1^s$ jest konsekwencją faktu, że w rozważanym przypadku odpowiednie równanie Schrödera ma rozwiązanie. Otrzymujemy w ten sposób

Twierdzenie 13 (cf. [47]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ jest taką grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych z multiplikatywną grupą współczynników wiodących $\mathbf{F}_1^s$, że $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$ lub grupa $\mathcal{F}^s$ jest skończona. Wówczas istnieje taki formalny szereg potęgowy $T \in \Gamma_1^s$, że*

$$(19) \quad \mathcal{F}^s \ni F_t = \mathcal{A}_{T^{-1}}(L_t) = T^{-1} \circ L_t \circ T \quad \text{dla } t \in \mathbf{F}_1^s.$$

W przypadku $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$ formalny szereg potęgowy $T \in \Gamma_1^s$ jest wyznaczony jednoznacznie przez $\mathcal{F}^s$.

Powyższy opis implikuje jednocześnie następujący rezultat dotyczący zanurzalności badanych grup w maksymalną grupę komutujących formalnych szeregów potęgowych.

Wniosek 1. *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ jest taką grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych z multiplikatywną grupą współczynników wiodących $\mathbf{F}_1^s$, że $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$ lub grupa $\mathcal{F}^s$ jest skończona. Wtedy $\mathcal{F}^s$ może być zanurzona w maksymalną grupę $\widetilde{\mathcal{F}}^s = (\tilde{F}_t)_{t \in K^*}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych mającą izomorficzną parametryzację postaci*

$$(20) \quad K^* \ni t \mapsto \tilde{F}_t = \mathcal{A}_{T^{-1}}(L_t) \in \widetilde{\mathcal{F}}^s.$$

Zanurzenie to jest jednoznaczne w przypadku $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$.

4.2 Grupy komutujących formalnych szeregów potęgowych w przypadku B)

W tym przypadku charakteryzacja i analityczny opis grup komutujących formalnych (obciętych dla $s \in \mathbb{N}$) szeregów potęgowych jest znacznie bardziej skomplikowany (nawet przypadek $s = \infty$ nie jest tu prosty (zob. [47])). Także w tym przypadku możliwe jest jednak zaproponowanie izomorficznej parametryzacji badanych grup, ale na ogół nie będą to grupy jedno- lub dwuparametrowe.

Niech więc $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ będzie taką nieskończoną grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych, że grupa $\mathbf{F}_1^s$ współczynników wiodących jest skończona, tzn. $\mathbf{F}_1^s = E_m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Okazuje się, że w tym przypadku istnieje takie sprzężenie $\mathcal{A}_T$, które przekształca grupę $\mathcal{F}^s$ na grupę komutujących formalnych szeregów potęgowych w postaci normalnej rzędu m . Istotnie, jeśli $\mathbf{F}_1^s = E_m$ zawiera pierwiastek pierwotny stopnia $m \geq 2$ (przypadek $m = 1$ jest trywialny), to znajdziemy takie $T \in \Gamma_1^s = \{F \in \Gamma^s : F^{[1]} = L_1\}$, że $\mathcal{A}_T(F) \in \mathcal{N}_m^s$, a wówczas otrzymamy

Lemat 2 ([20, Lemma 3.4]). *If $\mathcal{F}^s$ is a group of commuting formal power series such that $\mathbf{F}_1^s = E_m$ for some $m \in [1, s-1]$, then there exists a formal power series $T \in \Gamma_1^s$ such that $\mathcal{A}_T(\mathcal{F}^s) \subset \mathcal{N}_m^s$.*

Wynik ten wraz z Lematem 3.6 z [20] sprowadza badanie grup komutujących formalnych szeregów do rozważania grup $\mathcal{F}^{rm+1} \subset \mathcal{N}_m^{rm+1} \subset \Gamma^{rm+1}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych w postaci normalnej rzędu m . Rozważając dalej taką nieskończoną grupę $\mathcal{F}^{rm+1} \subset \mathcal{N}_m^{rm+1}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych, że $\mathbf{F}_1^s = E_m$, na podstawie [20, Lemma 3.6] znajdziemy takie q , że

$$\mathcal{F}^{rm+1} \subset \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1} = \left\{ F \in \mathcal{N}_m^{rm+1} : F(X) = cX + \sum_{l=q}^r c_{lm+1} X^{lm+1} \text{ oraz } c \in E_m \right\}.$$

Kolejnym krokiem upraszczającym skomplikowany opis w tym przypadku jest rozkład grupy $\mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}$ na sumę prostą (względem podstawiania) $\mathcal{L}_{E_m} \odot \overline{\mathcal{N}}_{m,q}^{rm+1}$ podgrup

$$\mathcal{L}_{E_m} = \{L_c \in \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1} : c \in E_m\} \quad \text{oraz} \quad \overline{\mathcal{N}}_{m,q}^{rm+1} = \{F \in \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1} : F^{[1]} = L_1\}.$$

Wówczas

Twierdzenie 14 ([20, Corollary 3.9]). *Ustalmy $m, q \in \mathbb{N}$ oraz $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Jeśli $\mathcal{F}^{rm+1} \subset \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}$ jest taką grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych nad R , że $F_1^{rm+1} = E_m$ oraz $k(\mathcal{F}^{rm+1}) = qm + 1$, to $\mathcal{F}^{rm+1}$ jest iloczynem prostym grup $\mathcal{L}_{E_m}$ oraz $\mathcal{N}_{\mathcal{F}^{rm+1}}$, tzn.*

$$\mathcal{F}^{rm+1} = \mathcal{L}_{E_m} \odot \mathcal{N}_{\mathcal{F}^{rm+1}},$$

gdzie

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}^{rm+1}} = \left\{ (F^{[1]})^{-1} \circ F \in \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1} : F \in \mathcal{F}^{rm+1} \right\} \subset \overline{\mathcal{N}}_{m,q}^{rm+1}.$$

W tym przypadku równość $\mathcal{F}^{rm+1} = \mathcal{L}_{E_m} \odot \mathcal{N}_{\mathcal{F}^{rm+1}}$ oznacza przedstawienie

$$\mathcal{F}^{rm+1} \ni F(X) = c_1 X + \sum_{l=q}^r c_{lm+1} X^{lm+1} = c_1 \left(X + \sum_{l=q}^r \frac{c_{lm+1}}{c_1} X^{lm+1} \right) \in \mathcal{L}_{E_m} \odot \mathcal{N}_{\mathcal{F}^{rm+1}}.$$

Ostatecznie otrzymamy w tym przypadku następujące

Twierdzenie 15 ([20, Corollary 3.15]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Załóżmy, że $\mathcal{F}^s \subset \Gamma^s$ jest taką nieskończoną grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych, że $F_1^s = E_m$ dla pewnego $m \in |1, s-1|$. Wtedy istnieje taki formalny szereg potęgowy $T \in \Gamma_1^s$ oraz takie liczby $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $q \in |1, r|$, że $\mathcal{A}_T(\mathcal{F}^s) \subset \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}$ oraz $\mathcal{F}^s$ jest podgrupą grupy $\mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^{rm+1})$, gdzie $\widehat{\mathcal{F}}^{rm+1} \subset \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}$ jest taką nieskończoną maksymalną grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych, że $\widehat{F}_1^{rm+1} = E_m$. Grupa $\mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^{rm+1})$ ma (w zależności od r) jedną z następujących parametryzacji:*

(i) dla $r = \infty$

$$E_m \times K \ni (t_1, t_{qm+1}) \mapsto T^{-1} \circ F_{(t_1, t_{qm+1})} \circ T \in \mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^\infty),$$

jest izomorficzną parametryzacją grupy $\mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^\infty)$ oraz

$$E_m \times K \ni (t_1, t_{qm+1}) \mapsto F_{(t_1, t_{qm+1})} = t_1 \left(X + t_{qm+1} X^{qm+1} + \sum_{l=q+1}^\infty c_{lm+1}(t_{qm+1}) X^{lm+1} \right),$$

(ii) dla $r \in |2q, \infty|$

$$E_m \times K^{q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1}) \mapsto T^{-1} \circ F_{(t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1})} \circ T \in \mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^{rm+1})$$

jest izomorficzną parametryzacją grupy $\mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^{rm+1})$ oraz

$$\begin{aligned} E_m \times K^{q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1}) \\ \mapsto F_{(t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1})} = t_1 \left(X + t_{qm+1} X^{qm+1} \right. \\ \left. + \sum_{l=q+1}^{r-q} c_{lm+1}(t_{qm+1}) X^{lm+1} + \sum_{l=r-q+1}^r (t_{lm+1} + c_{lm+1}(t_{qm+1})) X^{lm+1} \right), \end{aligned}$$

(iii) dla $r \in |q, 2q - 1|$

$$\mathbf{E}_m \times K^{r-q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1}) \mapsto$$

$$T^{-1} \circ F_{(t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1})} \circ T \in \mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^{rm+1}) = \mathcal{A}_{T^{-1}}(\mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}),$$

jest izomorficzną parametryzacją grupy $\mathcal{A}_{T^{-1}}(\widehat{\mathcal{F}}^{rm+1})$ oraz

$$\mathbf{E}_m \times K^{r-q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1}) \mapsto F_{(t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1})} = t_1 \left(X + \sum_{j=q}^r t_{jm+1} X^{jm+1} \right),$$

gdzie funkcje $c_{jm+1} : K \rightarrow K$ dla $j \in |q+1, r|$ określone są przez

$$c_{jm+1}(t) = h_{jm+1}t + \tilde{L}_{jm+1}^{m,q}(t, h_{(q+1)m+1}, \dots, h_{(j-q)m+1}) \quad \text{dla } t \in H, j \in |q+1, r|,$$

zaś $(\tilde{L}_{nm+1}^{m,q})_{n \geq q+1}$ jest ciągiem wielomianów zdefiniowanym przez (13) oraz $(h_{jm+1})_{j \in |q+1, r|}$ jest ciągiem stałych w K .

5 Zastosowania

Wykorzystując wyniki zaprezentowane w poprzednim rozdziale udzielimy odpowiedzi na ważne problemy iteracyjne w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych. Ponadto wyznaczymy postać pewnych podgrup grupy L_s^1 oraz pewnych homomorfizmów w grupę L_s^1 . Wyjdziemy od opisu wszystkich jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych i obciętych formalnych szeregów potęgowych nad ciałem o charakterystyce 0. Opis ten pozwoli na przedyskutowanie problemu zanurzenia danego (obciętego) formalnego szeregu potęgowego w jednoparametrową grupę iteracji (zob. [26], [44], [45], [48], [57]), jak też na zbadanie istnienia pierwiastków iteracyjnych pewnych (obciętych) formalnych szeregów potęgowych (zob. [52]–[56]). Na koniec uzyskamy postać pewnych homomorfizmów w grupę L_s^1 , skąd wynika opis pewnych szczególnych podgrup grupy L_s^1 .

5.1 Jednoparametrowe grupy formalnych szeregów potęgowych

Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Niech $(G, +)$ będzie grupą przemienną i załóżmy, że P jest pierścieniem przemiennym z jedyneką. Przypomnijmy, że przez *jednoparametrową grupę formalnych szeregów potęgowych* rozumiemy dowolny homomorfizm $\Theta : G \rightarrow \Gamma^s$ grupy G w grupę Γ^s wszystkich formalnych szeregów potęgowych nad P lub równoważnie, każdą rodzinę $(F_t)_{t \in G} \subset$ formalnych szeregów potęgowych $F_t \in \Gamma^s$ dla $t \in G$ spełniającą

$$(21) \quad \begin{cases} F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2} & \text{dla } t_1, t_2 \in G, \\ F(0) = X. \end{cases}$$

Jeśli $\Theta(t)(X) = F_t(X) = F(t, X) = c_1(t)X + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G$, gdzie $c_1 : G \rightarrow U(P)$ oraz $c_j : G \rightarrow P$ dla $j \in |2, s|$, to dla $s = \infty$ z (21) wynika

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t_1 + t_2)X^n = \sum_{l=1}^{\infty} c_l(t_1) \left(\sum_{j=2}^{\infty} c_j(t_2)X^j \right)^l \quad \text{dla } t_1, t_2 \in G,$$

zaś dla $s \in \mathbb{N}$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^s c_n(t_1 + t_2)X^n = \sum_{l=1}^s c_l(t_1) \left(\sum_{j=1}^s c_j(t_2)X^j \right)^l \mod X^{s+1} \quad \text{dla } t_1, t_2 \in G.$$

Oba przypadki prowadzą do układu równań funkcyjnych

$$(22) \quad \begin{cases} c_1(t_1 + t_2) = c_1(t_1)c_1(t_2) & \text{dla } t_1, t_2 \in G \\ c_2(t_1 + t_2) = c_1(t_1)c_2(t_2) + c_2(t_1)c_1(t_2)^2 & \text{dla } t_1, t_2 \in G \\ \vdots \\ c_n(t_1 + t_2) = c_1(t_1)c_n(t_2) + \sum_{k=2}^{n-1} c_k(t_1) \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,k}} B_{\bar{u}_n} \prod_{j=1}^{n-k+1} c_j(t_2)^{u_j} \\ \quad + c_n(t_1)c_1(t_2)^n & \text{dla } t_1, t_2 \in G, n \in [3, s]. \end{cases}$$

Zauważmy, że c_1 jest wówczas funkcją wykładniczą, tzn. c_1 jest homomorfizmem grupy $(G, +)$ w grupę $(U(P), \cdot)$. Pełne rozwiązanie tego układu równań nawet w przypadku $P = \mathbb{C}$ nie jest znane. Opiszemy rozwiązania tego układu wykorzystując wiedzę dotyczącą charakteryzacji wszystkich maksymalnych grup komutujących formalnych szeregów potęgowych. Zauważmy, że jeśli $\Theta : G \rightarrow \Gamma^s$ jest ustaloną jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych, to rodzina $\mathcal{F}^s := (F_t)_{t \in G}$ gdzie $F_t = \Theta(t)$ dla $t \in G$, jest grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych. Każdą taką grupę komutujących formalnych szeregów potęgowych zanurzyć można w odpowiedniej maksymalnej grupie komutujących formalnych szeregów potęgowych $\widehat{\mathcal{F}}^s \subset \Gamma^s$. Jeśli z kolei

$$\tilde{G} \ni \alpha \mapsto \Phi(\alpha) = F_\alpha \in \widehat{\mathcal{F}}^s$$

jest izomorficzną parametryzacją takiej grupy, to jednoparametrowa grupa $\Theta : G \rightarrow \mathcal{F}^s \subset \widehat{\mathcal{F}}^s$ formalnych szeregów potęgowych musi być postaci $\Theta = \Phi \circ i$, gdzie $i : G \rightarrow \tilde{G}$ jest homomorfizmem grup.

Opiszemy teraz jednoparametrowe grupy formalnych szeregów potęgowych we wszystkich przypadkach wyznaczonych przez możliwe grupy komutujących formalnych szeregów potęgowych. Ustalmy zatem $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Niech $\Theta : G \rightarrow \Gamma^s$ będzie jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych $\Theta(t)(X) = c_1(t)X + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G$, gdzie $c_1 : G \rightarrow K^*$ oraz $c_j : G \rightarrow K$ dla $j \in [2, s]$. Wówczas $\mathcal{F}^s = (\Theta(t))_{t \in G}$ jest grupą komutujących formalnych szeregów potęgowych z multiplikatywną grupą $\mathbf{F}_1^s$ współczynników wiodących i rozważymy następujące przypadki wyznaczone przez możliwe parametryzacje grupy $\mathcal{F}^s$:

- A) $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$ lub $\text{card } \mathcal{F}^s < s$ (wtedy także $\text{card } \mathbf{F}_1^s < s$),
- B) $\mathbf{F}_1^s = \mathbf{E}_m$ dla pewnego $m \in [1, s-1]$, istnieje taki formalny szereg potęgowy $T \in \Gamma_1^s$ oraz istnieją takie liczby $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $q \in \mathbb{N}$, że $\mathcal{A}_T(\mathcal{F}^s) \subset \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}$ oraz
 - B1) $r = \infty$,
 - B2) $r \in [2q, \infty]$,
 - B3) $r \in [q, 2q-1]$.

5.1.1 Przypadek A)

Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Załóżmy, że jednoparametrowa grupa $(F_t)_{t \in G} = (\Theta(t))_{t \in G}$ ($F_t = \Theta(t)$) formalnych szeregów potęgowych jest taką grupą $\mathcal{F}^s := (\Theta(t))_{t \in G}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych z multiplikatywną grupą współczynników wiodących $\mathbf{F}_1^s$, że $\text{card } \mathbf{F}_1^s \geq s$ lub $\text{card } \mathcal{F}^s < s$. Grupę $\mathcal{F}^s$ można wtedy zanurzyć (zob. Twierdzenie 12 (ii) oraz Wniosek 1) w maksymalną grupę $\widehat{\mathcal{F}}^s = (\widehat{F}_t)_{t \in K^*}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych z dwoma możliwymi parametryzacjami:

P1) $K^* \ni t \mapsto \Phi_1(t)(X) = \widehat{F}_t(X) = tX + \sum_{j=2}^s \widehat{c}_j(t)X^j \in \widehat{\mathcal{F}}^s$ z funkcjami $\widehat{c}_j : K^* \rightarrow K$ określonymi wzorami

$$\widehat{c}_j(t) = \widehat{\lambda}_j(t^j - t) + t\widetilde{P}_j(t, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_{j-1}) \quad \text{dla } t \in K^*, j \in |2, s|,$$

gdzie $(\widetilde{P}_n)_{n \geq 2}$ jest ciągiem wielomianów zdefiniowanych przez (5) oraz $(\widehat{\lambda}_j)_{j \in |2, s|}$ jest ciągiem stałych $\lambda_j \in K$ dla $j \in |2, s|$,

P2) $K^* \ni t \mapsto \Phi_1(t)(X) = \widetilde{F}_t(X) = \mathcal{A}_{T^{-1}}(L_t)(X) = T^{-1}(tT(X)) \in \widehat{\mathcal{F}}^s$, gdzie $T \in \Gamma_1^s$.

Niech $\widetilde{G} = K^*$. Wówczas $\Theta : G \rightarrow \mathcal{F}^s \subset \widehat{\mathcal{F}}^s$ jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K wtedy i tylko wtedy, gdy $\Theta = \Phi_1 \circ c$ oraz $c : G \rightarrow K^*$ jest homomorfizmem grupy $(G, +)$ w grupę $(K^*, \cdot)$. Stąd $c : G \rightarrow K^*$ jest funkcją wykładniczą i w tym przypadku otrzymamy

Twierdzenie 16 ([20, Theorem 4.1]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i załóżmy, że K jest ciałem o charakterystyce 0. Niech $(\widetilde{P}_n)_{n \geq 2}$ będzie ciągiem uniwersalnych (niezależnych od s) wielomianów zdefiniowanych przez (5).*

(i) *Dla każdej funkcji eksponencjalnej $c : G \rightarrow K^*$ i dla dowolnego ciągu $(\lambda_j)_{j \in |2, s|}$ stałych w K rodzina $(F_t)_{t \in G}$, $F_t(X) = c_1(t)X + \sum_{j=2}^s c_j(t)X^j \in \Gamma^s$ dla $t \in G$ z funkcjami $c_1 : G \rightarrow K^*$, $c_j : G \rightarrow K$ dla $j \in |2, s|$ określonymi przez*

$$(23) \quad \begin{aligned} c_1(t) &= c(t) & \text{dla } t \in G, \\ c_j(t) &= \lambda_j(c(t)^j - c(t)) + c(t)\widetilde{P}_j(c(t), \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}) & \text{dla } t \in G, j \in |2, s|, \end{aligned}$$

jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K .

(ii) *Dla każdej funkcji eksponencjalnej $c : G \rightarrow K^*$ i dla dowolnego $T \in \Gamma_1^s$ rodzina $(F_t)_{t \in G}$ określona przez*

$$F_t(X) = T^{-1}(c(t)T(X)) \quad \text{dla } t \in G,$$

jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K .

Grupy te są jedynymi jednoparametrowymi grupami formalnych szeregów potęgowych w rozważanym przypadku.

5.1.2 Przypadek B1)

Niech $s = \infty$. Załóżmy, że jednoparametrowa grupa $(F_t)_{t \in G} = (\Theta(t))_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych jest taką grupą $\mathcal{F}^\infty := (\Theta(t))_{t \in G}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych z multiplikatywną grupą $\mathbf{F}_1^\infty$ współczynników wiodących, że $\mathbf{F}_1^\infty = \mathbf{E}_m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Niech dalej $T \in \Gamma_1^\infty$ będzie taki, że $\mathcal{A}_T(\mathcal{F}^\infty) \subset \mathcal{N}_{m,q}^\infty$ dla pewnego $q \in \mathbb{N}$ (dla $m = 1$ przyjmujemy $T = L_1$). Na podstawie Twierdzenia 15 (i) grupę $\mathcal{F}^\infty$ można zanurzyć w grupę $\widehat{\mathcal{F}}^\infty$ komutujących formalnych szeregów potęgowych, mającą izomorficzną parametryzację postaci

$$\mathbf{E}_m \times K \ni (t_1, t_{qm+1}) \mapsto \Phi_2(t_1, t_{qm+1})(X) = (T^{-1} \circ \widehat{F}_{(t_1, t_{qm+1})} \circ T)(X) \in \widehat{\mathcal{F}}^\infty,$$

gdzie

$$\mathbf{E}_m \times K \ni (t_1, t_{qm+1}) \mapsto \widehat{F}_{(t_1, t_{qm+1})}(X) = t_1 \left(X + t_{qm+1} X^{qm+1} + \sum_{l=q+1}^{\infty} c_{lm+1}(t_{qm+1}) X^{lm+1} \right),$$

funkcje $c_{lm+1} : K \rightarrow K$ dla $l \in |q+1, \infty|$ określone są przez

$$c_{lm+1}(t) = h_{lm+1}t + \tilde{L}_{lm+1}^{m,q}(t, h_{(q+1)m+1}, \dots, h_{(l-q)m+1}) \quad \text{dla } t \in K, l \in |q+1, \infty|,$$

z ciągiem $(\tilde{L}_{nm+1}^{m,q})_{n \geq q+1}$ wielomianów zdefiniowanych wzorem (13) oraz ciągiem $(h_{jm+1})_{j \in |q+1, \infty|}$ stałych $h_{jm+1} \in K$ dla $j \in |q+1, \infty|$.

Niech $\tilde{G} = \mathbf{E}_m \times K$. Odwzorowanie $\Theta : G \rightarrow \mathcal{F}^\infty \widehat{\mathcal{F}}^\infty$ jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K wtedy i tylko wtedy, gdy $\Theta = \Phi_2 \circ b$ oraz $b : G \rightarrow \mathbf{E}_m \times K$ jest homomorfizmem grupy $(G, +)$ w grupę $(\mathbf{E}_m \times K, \diamond)$. Stąd

$$b(t) = (c(t), a(t)) \quad \text{dla } t \in G,$$

gdzie $c : G \rightarrow \mathbf{E}_m$ jest funkcją wykładniczą, zaś $a : G \rightarrow K$ jest funkcją addytywną. Mamy w tym przypadku następujący opis wszystkich jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych.

Twierdzenie 17 ([20, Theorem 4.2]). *Ustalmy $m, q \in \mathbb{N}$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Niech dalej $(\tilde{L}_{nm+1}^{m,q})_{n \geq q+1}$ będzie ciągiem uniwersalnych wielomianów zdefiniowanych przez (13). Dla każdej funkcji eksponencjalnej $c : G \rightarrow \mathbf{E}_m$, dowolnej funkcji addytywnej $a : G \rightarrow K$ i dla wszystkich ciągów $(h_{jm+1})_{j \in |q+1, \infty|}$ stałych liczbowych $h_{jm+1} \in K$ dla $j \in |q+1, \infty|$, rodzina $(F_t)_{t \in G}$,*

$$G \ni t \mapsto F_t = T^{-1} \circ \tilde{F}_t \circ T,$$

gdzie

$$G \ni t \mapsto \tilde{F}_t(X) = c(t) \left(X + a(t) X^{qm+1} + \sum_{l=q+1}^{\infty} c_{lm+1}(t) X^{lm+1} \right),$$

z funkcjami $c_{lm+1} : G \rightarrow K$ dla $l \in |q+1, \infty|$ określonymi wzorami

$$c_{lm+1}(t) = h_{lm+1}a(t) + \tilde{L}_{lm+1}^{m,q}(a(t), h_{(q+1)m+1}, \dots, h_{(l-q)m+1}) \quad \text{dla } t \in G, l \in |q+1, \infty|,$$

jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K .

Grupy te są jedynymi jednoparametrowymi grupami formalnych szeregów potęgowych nad K w przypadku B1).

5.1.3 Przypadek B2)

Ustalmy $s \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że jednoparametrowa grupa $(F_t)_{t \in G} = (\Theta(t))_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych jest taką grupą $\mathcal{F}^s := (\Theta(t))_{t \in G}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych z multiplikatywną grupą $\mathbf{F}_1^s$ współczynników wiodących, że $\mathbf{F}_1^s = \mathbf{E}_m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Niech dalej $T \in \Gamma_1^s$ będzie taki, że $\mathcal{A}_T(\mathcal{F}^s) \subset \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}$ z takimi $r, q \in \mathbb{N}$, że $s - m < rm + 1 \leq s$ oraz $r \geq 2q$. Na mocy Twierdzenia 15 (ii) grupa $\mathcal{F}^s$ może być zanurzona w grupę $\widehat{\mathcal{F}}^s$ komutujących formalnych szeregów potęgowych z izomorficzną parametryzacją postaci

$$\mathbf{E}_m \times K^{q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1}) \mapsto$$

$$\Phi_3(t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1})(X) = \left(T^{-1} \circ \widehat{F}_{(t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1})} \circ T \right)(X) \in \widehat{\mathcal{F}}^s,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m \times K^{q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1}) &\mapsto \widehat{F}_{(t_1, t_{qm+1}, t_{(r-q+1)m+1}, \dots, t_{rm+1})}(X) \\ &= t_1 \left(X + t_{qm+1} X^{qm+1} + \sum_{l=q+1}^{r-q} c_{lm+1}(t_{qm+1}) X^{lm+1} + \sum_{l=r-q+1}^r (t_{lm+1} + c_{lm+1}(t_{qm+1})) X^{lm+1} \right), \end{aligned}$$

funkcje $c_{lm+1} : K \rightarrow K$ dla $l \in |q+1, r|$ określone są wzorami

$$c_{lm+1}(t) = h_{lm+1}t + \tilde{L}_{lm+1}^{m,q}(t, h_{(q+1)m+1}, \dots, h_{(l-q)m+1}) \quad \text{dla } t \in K, l \in |q+1, r|,$$

z ciągiem $(\tilde{L}_{nm+1}^{m,q})_{n \geq q+1}$ wielomianów zdefiniowanych przez (13) oraz ciągiem $(h_{jm+1})_{j \in |q+1, r|}$ stałych $h_{jm+1} \in K$ dla $j \in |q+1, r|$.

Przyjmijmy $\tilde{G} = \mathbf{E}_m \times K^{q+1}$. Wówczas funkcja $\Theta : G \rightarrow \mathcal{F}^{\subset \widehat{\mathcal{F}}^s}$ jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K wtedy i tylko wtedy, gdy $\Theta = \Phi_3 \circ b$ oraz $b : G \rightarrow \mathbf{E}_m \times K^{q+1}$ jest homomorfizmem grupy $(G, +)$ w grupę $(\mathbf{E}_m \times K^{q+1}, \diamond)$. Zatem

$$b(t) = (c(t), a(t), a_{(r-q+1)m+1}(t), \dots, a_{rm+1}(t)) \quad \text{dla } t \in G,$$

gdzie $c : G \rightarrow \mathbf{E}_m$ jest funkcją wykładniczą oraz $a, a_{(r-q+1)m+1}, \dots, a_{rm+1} : G \rightarrow K$ są funkcjami addytywnymi. Ostatecznie otrzymamy

Twierdzenie 18 ([20, Theorem 4.3]). *Ustalmy takie $m, q, r \in \mathbb{N}$, że $r \in |2q, \infty|$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Niech dalej $(\tilde{L}_{nm+1}^{m,q})_{n \geq q+1}$ będzie ciągiem uniwersalnych wielomianów zdefiniowanym przez (13). Dla każdej funkcji eksponencjalnej $c : G \rightarrow \mathbf{E}_m$, dla wszystkich funkcji addytywnych $a, a_{(r-q+1)m+1}, \dots, a_{rm+1} : G \rightarrow K$ i dla każdego ciągu $(h_{jm+1})_{j \in |q+1, r|}$ stałych $h_{jm+1} \in K$ dla $j \in |q+1, r|$, rodzina $(F_t)_{t \in G}$,*

$$G \ni t \mapsto F_t = T^{-1} \circ \tilde{F}_t \circ T,$$

gdzie

$$\begin{aligned} G \ni t \mapsto \tilde{F}_t(X) &= c(t) \left(X + a(t) X^{qm+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=q+1}^{r-q} c_{lm+1}(t) X^{lm+1} + \sum_{l=r-q+1}^r (a_{lm+1}(t) + c_{lm+1}(t)) X^{lm+1} \right), \end{aligned}$$

z funkcjami $c_{jm+1} : G \rightarrow K$ dla $j \in |q+1, r|$ określonymi wzorami

$$c_{nm+1}(t) = h_{nm+1}a(t) + \tilde{L}_{nm+1}^{m,q}(a(t), h_{(q+1)m+1}, \dots, h_{(n-q)m+1}) \quad \text{dla } t \in G, n \in |q+1, \infty|,$$

jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K .

Grupy tej postaci są jedynymi jednoparametrowymi grupami formalnych szeregów potęgowych nad K w przypadku B2).

5.1.4 Przypadek B3)

Podobnie jak poprzednim przypadku, ustalmy $s \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że jednoparametrowa grupa $(F_t)_{t \in G} = (\Theta(t))_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych jest taką grupą $\mathcal{F}^s := (\Theta(t))_{t \in G}$ komutujących formalnych szeregów potęgowych z multiplikatywną grupą $\mathbf{F}_1^s$ współczynników wiodących, że $\mathbf{F}_1^s = \mathbf{E}_m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Niech dalej $T \in \Gamma_1^s$ będzie taki, że $\mathcal{A}_T(\mathcal{F}^s) \subset \mathcal{N}_{m,q}^{rm+1}$ z takimi $r, q \in \mathbb{N}$, że $s - m < rm + 1 \leq s$ oraz $r \in |q, 2q - 1|$. Wykorzystując Twierdzenie 15 (iii) otrzymamy, że grupa $\mathcal{F}^s$ może być zanurzona w grupę $\widehat{\mathcal{F}}^s$ komutujących formalnych szeregów potęgowych z izomorficzną parametryzacją postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m \times K^{r-q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1}) &\mapsto \\ \Phi_4(t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1})(X) &= (T^{-1} \circ \widehat{F}_{(t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1})} \circ T)(X) \in \widehat{\mathcal{F}}^{rm+1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathbf{E}_m \times K^{r-q+1} \ni (t_1, t_{qm+1}, \dots, t_r) \mapsto \widehat{F}_{(t_1, t_{qm+1}, \dots, t_{rm+1})}(X) = t_1 \left(X + \sum_{j=q}^r t_{jm+1} X^{jm+1} \right).$$

Niech teraz $\widetilde{G} = \mathbf{E}_m \times K^{r-q+1}$. Funkcja $\Theta : G \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}^s$ jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K wtedy i tylko wtedy, gdy $\Theta = \Phi_4 \circ b$ oraz $b : G \rightarrow \mathbf{E}_m \times K^{r-q+1}$ jest homomorfizmem grupy $(G, +)$ w grupę $(\mathbf{E}_m \times K^{r-q+1}, \diamond)$. Wówczas

$$b(t) = (c(t), a_{qm+1}(t), \dots, a_{rm+1}(t)) \quad \text{dla } t \in G,$$

gdzie $c : G \rightarrow \mathbf{E}_m$ jest funkcją wykładniczą oraz $a_{qm+1}, \dots, a_{rm+1} : G \rightarrow K$ są funkcjami addytywnymi. Zatem otrzymamy

Twierdzenie 19 ([20, Theorem 4.4]). *Ustalmy $m, q \in \mathbb{N}$ oraz $r \in |q, 2q - 1|$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Dla dowolnej funkcji eksponencjalnej $c : G \rightarrow \mathbf{E}_m$ i dla wszystkich funkcji addytywnych $a_{qm+1}, \dots, a_{rm+1} : G \rightarrow K$ rodzina $(F_t)_{t \in G}$,*

$$G \ni t \mapsto F_t = T^{-1} \circ \widetilde{F}_t \circ T$$

gdzie

$$G \ni t \mapsto \widetilde{F}_t(X) = c(t) \left(X + \sum_{j=q}^r a_{jm+1}(t) X^{jm+1} \right),$$

jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K .

Grupy te są jedynymi jednoparametrowymi grupami formalnych szeregów potęgowych nad K w przypadku B3).

5.1.5 Jednoparametrowe grupy formalnych szeregów potęgowych w Γ_1^s

Z Twierdzeń 17, 18 oraz 19 wyprowadza się postać jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych w $\Gamma_1^s = \{F \in \Gamma^s : F^{[1]} = L_1\}$. Jak łatwo można zauważyć, jest to szczególnie przypadkowy prezentowany wynik dla $m = 1$. Można w tym przypadku przyjąć też $T = L_1$ (zob. dowód Lematu 3.4 w [20]). Okazuje się, że dla $m = 1$ mamy

$$\widetilde{L}_{n+1}^{q+1}(x, (y_i)_{i \in |q+2, n+1-(q+1)+1|}) := \widetilde{L}_{n+1}^{1,q}(x, (y_{i+1})_{i \in |q+1, n-q|}) \quad \text{dla } n \geq q,$$

gdzie ciągi wielomianów $(\widetilde{L}_{n+1}^{q+1})_{n \geq q}$ oraz $(\widetilde{L}_{n+1}^{1,q})_{n \geq q}$ zdefiniowane są przez, odpowiednio, (9) oraz (13). Wówczas mamy

Wniosek 2 ([20, Corollary 4.1]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 3$, $k \in |2, s|$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Niech dalej $(\tilde{L}_n^k)_{n \geq k+1}$ będzie ciągiem wielomianów określonych indukcyjnie przez (9). Rodzina $(F_t)_{t \in G}$, $F_t(X) = X + c_k(t)X^k + \sum_{j=k+1}^s c_j(t)X^j$ dla $t \in G$, gdzie $c_j : G \rightarrow K$ dla $j \in |k, s|$ oraz $c_k \neq 0$, jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych nad K wtedy i tylko wtedy, gdy $c_k : G \rightarrow K$ jest niezerową funkcją addytywną oraz*

(i) *dla $s = \infty$ funkcje $c_j : G \rightarrow K$ dla $j \in |k+1, \infty|$ określone są wzorami*

$$c_n(t) = h_n c_k(t) + \tilde{L}_n^k(c_k(t), (h_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}) \quad \text{dla } t \in G, n \in |k+1, \infty|,$$

gdzie $(h_j)_{j \geq k+1}$ jest dowolnym ciągiem stałych w K ,

(ii) *dla $s \in |2k-1, \infty|$ funkcje $c_j : G \rightarrow K$ dla $j \in |k+1, s|$ określone są wzorami*

$$c_n(t) = h_n c_k(t) + \tilde{L}_n^k(c_k(t), (h_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}) \quad \text{dla } t \in G, n \in |k+1, s-k+1|,$$

$$c_n(t) = a_n(t) + \tilde{L}_n^k(c_k(t), (h_i)_{i \in |k+1, n-k+1|}) \quad \text{dla } t \in G, n \in |s-k+2, s|,$$

gdzie $(h_j)_{j \in |k+1, s-k+1|}$ jest dowolnym ciągiem stałych w K oraz $a_{s-k+2}, \dots, a_s : G \rightarrow K$ są dowolnymi funkcjami addytywnymi,

(iii) *dla $s \in |k+1, 2k-2|$ funkcje $c_j : G \rightarrow K$ dla $j \in |k+1, s|$ określone są wzorami*

$$c_n(t) = a_n(t) \quad \text{dla } t \in G, n \in |k+1, s|,$$

gdzie $a_{k+1}, \dots, a_s : G \rightarrow K$ są dowolnymi funkcjami addytywnymi.

5.2 Iterowalność formalnych szeregów potęgowych

Rozważymy tutaj bardzo ważny w teorii iteracji problem zanurzania w jednoparametrową grupę iteracji. Niech P będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką. Przypomnijmy, że dla ustalonego $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ formalny szereg potęgowy $F \in \Gamma^s$ nazywamy *iterowalnym* (lub *zanurzalnym*) jeśli istnieje (w zapisie addytywnym) taka jednoparametrowa grupa $(F_t)_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych $F_t \in \Gamma^s$, że $F_{t_0} = F$ dla pewnego $t_0 \in G \setminus \{0\}$. Okazuje się, że przy dodatkowych założeniach pewne formalne szeregi potęgowe są iterowalne. W tym celu wystarczy wykorzystać wyniki z poprzedniego rozdziału zawierające opis wszystkich jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych. Wyniki te w przypadku $P \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ uzyskane zostały w [26].

Niech więc $(G, +)$ będzie grupą przemienną i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Przez $\mathcal{E}(G, K^*)$ oznaczmy niepustą rodzinę wszystkich funkcji wykładniczych $c : G \rightarrow K^*$. Niech dalej

$$\mathcal{E}(G) = \bigcup_{c \in \mathcal{E}(G, K^*)} c(G) \subset K^*.$$

Przypomnijmy też, że $\mathbf{E} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_m$ jest grupą wszystkich pierwiastków z jedynki w K^* . Wówczas

Twierdzenie 20 ([20, Theorem 4.5, Corollary 4.2]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Niech $(G, +)$ będzie grupą przemienną i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Wówczas każdy taki formalny szereg potęgowy $F(X) = b_1 X + \sum_{j=2}^s b_j X^j \in \Gamma^s$, że $b_1 \in \mathcal{E}(G) \setminus \mathbf{E}$ jest zanurzalny w jednoparametrową grupę $(F_t)_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych nad K .*

W szczególnym przypadku $G = K$ formalny szereg potęgowy $F(X) = b_1 X + \sum_{j=2}^s b_j X^j \in \Gamma^s$ dla $b_1 \in \mathcal{E}(K) \setminus \mathbf{E}$ jest zanurzalny w regularną jednoparametrową grupę formalnych szeregów potęgowych nad K .

Prosty w rozstrzygnięciu jest też przypadek $F(X) = X + \sum_{k=2}^s c_k X^k \in \Gamma^s$. Dla przemiennej grupy $(G, +)$ przez $\mathcal{A}(G, K)$ oznaczmy przestrzeń liniową wszystkich addytywnych funkcji $a : G \rightarrow K$. Wtedy otrzymamy następujący rezultat.

Twierdzenie 21 ([26, Theorem 7], [20, Theorem 4.6, Corollary 4.3]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Niech $(G, +)$ będzie grupą przemenną i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Jeśli przestrzeń $\mathcal{A}(G, K)$ jest nietrywialna, to każdy formalny szereg potęgowy $F(X) = X + \sum_{k=2}^s b_k X^k \in \Gamma_1^s$ jest zanurzalny w jednoparametrową grupę $(F_t)_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych nad K .*

W szczególnym przypadku $G = K$ formalny szereg potęgowy $F(X) = X + \sum_{k=2}^s b_k X^k \in \Gamma_1^s$ jest zanurzalny w regularną jednoparametrową grupę formalnych szeregów potęgowych nad K .

Zauważmy na koniec, że w przypadku $K = G = \mathbb{R}$ poprzez odpowiedni dobór w Twierdzeniu 20 funkcji eksponencjalnej c oraz funkcji addytywnej c_k w Twierdzeniu 21, potrafimy skonstruować zanurzenie w nieciągłą jednoparametrową grupę iteracji.

5.3 Pierwiastki iteracyjne w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych

Problem istnienia i postaci pierwiastków iteracyjnych jest jednym z najstarszych zagadnień badanych w teorii iteracji. Istnienie pierwiastków iteracyjnych z identyczności w klasie funkcji rzeczywistych badał już w 1815 roku Ch. Babbage [3]. W przypadku formalnych szeregów potęgowych jednej zmiennej problem ten badany był głównie przez L. Reicha w serii publikacji [52]–[56]. Zaczniemy od zbadania istnienia i postaci pierwiastków iteracyjnych z jedynki $L_1 \in \Gamma^s$. Przyjmijmy tu terminologię używaną dla pierwiastków z jedności w pierścieniu całkowitym. Przypomnijmy więc, że formalny szereg potęgowy $F \in \Gamma^s$ nazywamy *iteracyjnym pierwiastkiem* rzędu $m \in \mathbb{N}$ z jedności $L_1 \in \Gamma^s$, jeśli

$$F^{\circ m} = L_1.$$

Iteracyjny pierwiastek $F \in \Gamma^s$ rzędu $m \geq 2$ z jedności L_1 nazywać będziemy *pierwotnym* jeśli $F^{\circ n} \neq L_1$ dla wszystkich takich $n \in \mathbb{N}$, że $n < m$. Charakteryzacja iteracyjnych pierwiastków z $L_1 \in \Gamma^s$ podana jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 22 ([20, Theorem 4.7]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0. Załóżmy, że dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, multiplikatywna grupa $\mathbf{E}_m$ pierwiastków stopnia m z jedynki zawiera pierwiastek pierwotny stopnia m .*

- (i) *Dla każdego $T \in \Gamma_1^s$ i dla dowolnego $t \in \mathbf{E}_m$ formalny szereg potęgowy $F_t = T^{-1} \circ L_t \circ T \in \Gamma^s$ jest iteracyjnym pierwiastkiem rzędu m z jedności $L_1 \in \Gamma^s$.*
- (ii) *Formalny szereg potęgowy $F_t = T^{-1} \circ L_t \circ T \in \Gamma^s$ jest pierwiastkiem pierwotnym rzędu m , jeśli $t \in \mathbf{E}_m$ jest pierwiastkiem pierwotnym.*
- (iii) *Jeśli $s \geq 2$, to w Γ^s istnieje nieskończenie wiele pierwiastków iteracyjnych rzędu m z jedności L_1 .*

Rozważymy na koniec problem istnienia pierwiastków iteracyjnych dla pewnych elementów $F \in \Gamma^s \setminus \{L_1\}$. Okazuje się, że niezwykle przydatna będzie tu iterowalność F w odpowiednią grupę iteracji (zanurzalność w jednoparametrową grupę formalnych szeregów potęgowych). W sformułowaniu kolejnych wyników użyteczne będzie pojęcie *podzielności* w grupie. Przypomnijmy, że dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, grupę $(G, +)$ nazywamy *n -podzielną*, jeśli dla każdego $b \in G$ równanie $n \cdot x = b$ ma rozwiązanie $x \in G$. Jeśli rozwiązanie to jest jedyne, to grupę G nazywamy *jednoznacznie n -podzielną*. W tym przypadku jedyne rozwiązanie równania

$n \cdot x = b$ oznacza się przez $\frac{1}{n}b$. Na koniec, grupę G nazywać będziemy *podzielną*, jeśli G jest n -podzielna dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Jednocześnie G nazywamy *jednoznacznie podzielną*, jeśli jest jednoznacznie n -podzielna dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Wykorzystując m.in. Twierdzenia 20 oraz 21, otrzymamy

Twierdzenie 23 ([20, Corollary 4.3, Corollary 4.4]). *Ustalmy $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $s \geq 2$ i niech K będzie ciałem o charakterystyce 0.*

- (i) *Każdy formalny szereg potęgowy $F(X) = X + \sum_{j=2}^s b_j X^j \in \Gamma_1^s \setminus \{L_1\}$ ma pierwotny pierwiastek iteracyjny dowolnego rzędu.*
- (ii) *Jeśli grupa $(K^*, \cdot)$ jest m -podzielna dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, to każdy taki formalny szereg potęgowy $F(X) = b_1 X + \sum_{j=2}^s b_j X^j \in \Gamma^s$, że $b_1 \in K^* \setminus \mathbf{E}$, posiada pierwotny pierwiastek iteracyjny rzędu m .*

5.4 Podgrupy i homomorfizmy w grupę L_s^1

Powrócimy na koniec do pewnych nierozwiązanych dotychczas problemów dotyczących wyznaczania pewnych podpółgrup i podgrup grupy L_s^1 oraz opisu wszystkich homomorfizmów przemiennej grupy $(G, +)$ w grupę L_s^1 . Przypomnijmy, że dla $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ grupą L_s^1 nazywać będziemy zbiór

$$\{\bar{x}_s := (x_n)_{n \in |1, s|} \in \mathbb{R}^s : x_1 \neq 0\}$$

wraz z operacją $\bar{x}_s \cdot \bar{y}_s = \bar{z}_s$, przy czym wyrazy z_n dla $n \in |1, s|$ ciągu $\bar{z}_s$ określone są wzorem

$$z_n = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,k}} A_{\bar{u}_n} \prod_{j=1}^n y_j^{u_j} \quad \text{dla } n \in |1, s|,$$

gdzie

$$U_{n,k} := \left\{ \bar{u}_n := (u_1, \dots, u_n) \in |0, k|^n : \sum_{j=1}^n u_j = k, \sum_{j=1}^n j u_j = n \right\} \quad \text{oraz} \quad A_{\bar{u}_n} := \frac{n!}{\prod_{j=1}^n (u_j! (j!)^{u_j})}.$$

Analizowane tu problemy ”wyrósł” z badanej intensywnie w latach 60-tych i 70-tych dwudziestego wieku klasyfikacji czysto różniczkowalnych jednowymiarowych obiektów geometrycznych (por. [2]). W szczególności badano istnienie podpółgrup takich podpółgrup i podgrup, w których pewne elementy ciągu $\bar{x}_s$ są funkcjami pozostałych elementów wolnych tego ciągu (por. [17], [18], [33]–[38]). W [17] rozstrzygnięto istnienie i ewentualną postać pewnych takich podpółgrup. Praca [18] zawiera konstrukcję pewnego homomorfizmu w grupę L_s^1 , z której wynika istnienie pewnych badanych podpółgrup i podgrup w grupie L_s^1 . Okazuje się, że w pewnych przypadkach opis poszukiwanych podpółgrup sprowadza się do wyznaczenia postaci odpowiednich homomorfizmów w grupę L_s^1 .

Zajmijmy się więc dalej homomorfizmami w grupę L_s^1 . Okazuje się, że postać tych homomorfizmów można łatwo opisać wykorzystując postać jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych w Γ^s nad ciałem $\mathbb{R}$. Wynika to z podobieństwa (a w istocie z izomorfizmu) obu struktur. Porównując opis działania w grupie L_s^1 z opisem operacji podstawiania w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych podanym w Lemacie 1 trudno oprzeć się wrażeniu, że oba działania mają podobną strukturę. Jest to oczywiste, jeśli weźmiemy pod uwagę źródło podanego opisu grupy L_s^1 , tj. grupę klas abstrakcji lokalnych dyfeomorfizmów w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}$.

Po raz pierwszy grupy iteracji w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych i grupy iteracji w grupie L_s^1 (homomorfizmy w grupę L_s^1) badane były jednocześnie we wspólnej pracy z L. Reichem [22]. Wykorzystany został tam fakt (zob. [22, Theorem 1]), że grupy L_s^1 oraz grupa Γ^s (odwracalnych formalnych szeregów potęgowych nad $\mathbb{R}$) są izomorficzne. Funkcją ustalającą ten izomorfizm jest z oczywistych względów odwzorowanie $\Psi : L_s^1 \rightarrow \Gamma^s$,

$$\Psi\left((x_j)_{j \in |1,s|}\right) = \sum_{j=1}^s \frac{x_j}{j!} X^j \quad \text{dla } (x_j)_{j \in |1,s|} \in L_s^1.$$

Niech zatem $(G, +)$ będzie grupą przemenną i niech $\Theta = \{\Theta_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną wszystkich jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych nad $\mathbb{R}$, tj. rodziną wszystkich homomorfizmów $\Theta_i : G \rightarrow \Gamma^s$. Rodzinę tę tworzą cztery klasy jednoparametrowych grup $(F_t)_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych $F_t(X) = \Theta(t)(X) = c_1(t)X + \sum_{k=2}^s c_k(t)X^k$ opisane w Twierdzeniach 16–19. Jeśli teraz $\Phi : G \rightarrow L_s^1$, $\Phi(t) = (f_j(t))_{j \in |2,s|}$ dla $t \in G$ jest homomorfizmem w grupę L_s^1 , gdzie $f_1 : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ oraz $f_n : G \rightarrow \mathbb{R}$ dla $n \in |2, s|$, to $\Psi \circ \Phi : G \rightarrow \Gamma^s$ jest jednoparametrową grupą formalnych szeregów potęgowych, co oznacza, że istnieje takie $\Theta \in \Theta$ opisane w Twierdzeniach 16–19, że

$$(\Psi \circ \Phi)(t)(X) = \Theta(t)(X) = c_1(t)X + \sum_{k=2}^s c_k(t)X^k \quad \text{dla } t \in G.$$

Wtedy $\Phi = \Psi^{-1} \circ \Theta$,

$$\Phi(t) = \Psi^{-1}\left(c_1(t)X + \sum_{k=2}^s c_k(t)X^k\right) = (j!c_j(t))_{j \in |1,s|} \quad \text{dla } t \in G.$$

Zatem $f_j(t) = j!c_j(t)$ dla $t \in G$ oraz wszystkich $j \in |1, s|$. Wykorzystując teraz postać funkcji c_j z Twierdzeń 16–19 (przypadki A) oraz B3) są elementarnie proste) można podać postać funkcji f_j . Przypadki B1) oraz B2) są znacznie bardziej skomplikowane (w opisie wykorzystuje się sprzężenie). W tych przypadkach analityczny opis postaci funkcji f_j , choć możliwy, jest znacznie bardziej skomplikowany. Należy też zaznaczyć, że uzyskany opis w przypadkach B1) i B2) nie byłby możliwy bez algebraicznego podejścia do rozwiązania badanego problemu, gdyż sama teoria równań funkcyjnych wsparta równaniami różniczkowymi nie dostarczają tutaj wystarczających narzędzi.

Zaznaczmy na koniec, że możliwy tu do uzyskania opis wszystkich homomorfizmów w grupę L_s^1 pozwala wskazać szeroką klasę homomorfizmów grupy L_s^1 w grupę L_r^1 dla $s \in \mathbb{R}$ oraz $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Postać takich homomorfizmów dla $r \leq 3$ opisana została w [21]. Wykazano też, że jeśli $\Phi : L_s^1 \rightarrow L_r^1$,

$$\Phi(\bar{x}_s) = (f_j(\bar{x}_s))_{j \in |1,r|} \quad \text{dla } \bar{x}_s \in L_s^1,$$

gdzie $f_1 : L_s^1 \rightarrow \mathbb{R}^*$ oraz $f_j : L_s^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dla $j \in |2, r|$, to istnieje taka funkcja multiplikatywna $m : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, że $f_1(\bar{x}_s) = m(x_1)$ dla $\bar{x}_s \in L_s^1$ (zob. [19, Theorem 1] oraz [21, Corollary 1]). Wiadomo też ([21, Theorem 3]), że jeśli funkcja $\Phi : L_s^1 \rightarrow L_r^1$, $\Phi = (f_j)_{j \in |1,r|}$ jest homomorfizmem oraz $f_1(\bar{x}_s) = m(x_1)$, to dla szerokiej klasy funkcji multiplikatywnych musi istnieć taki homomorfizm $\bar{\Phi} = (g_j)_{j \in |1,r|} : R^* \rightarrow L_r^1$, że $\Phi = \bar{\Phi} \circ \pi_1^s$, tzn.

$$\Phi(\bar{x}_s) = \bar{\Phi}(x_1) = (g_j(x_1))_{j \in |1,r|} \quad \text{dla } \bar{x}_s \in L_s^1$$

oraz $g_1(x_1) = m(x_1)$. Zatem szeroka klasa homomorfizmów grupy L_s^1 w grupę L_r^1 jest złożeniem projekcji π_1^s grupy L_s^1 na grupę $L_1^1 \cong \mathbb{R}^*$ z homomorfizmem tej ostatniej grupy w grupę L_r^1 .

5. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

- (a) Wykaz opublikowanych prac naukowych nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 4.

- [J1] W. Jabłoński, *On some subsemigroups of the group L_s^1* , Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. No. 14 (1997), 101–119.
- [J2] *J. Chudziak, P. Drygaś, W. Jabłoński, S. Midura, Homomorphisms of the group L_2^1 into L_2^1 and L_3^1* , Demonstratio Math. 31 (1998), no. 1, 143–152.
- [J3] W. Jabłoński, *On extensibility of some homomorphisms*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. No. 16 (1999), 35–43.
- [J4] W. Jabłoński, *On the stability of the homogeneous equation*, Publ. Math. Debrecen 55 (1999), no.1-2, 33–45.
- [J5] W. Jabłoński, *On a class of sets connected with a convex function*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 69 (1999), 205–210.
- [J6] W. Jabłoński, *Stability of the Pexider-type homogeneous equation*, Demonstratio Math. 32 (1999), no. 3, 759–766.
- [J7] W. Jabłoński, *A. Pełka, Stability of generalized mean value type functional equation*, Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya 46 (2003), no. 4, 110–113.
- [J8] W. Jabłoński, *L. Reich, On the solution of the translation equation in rings of formal power series*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 75 (2005), 179–201.
- [J9] W. Jabłoński, *L. Reich, On the form of homomorphisms into the differential group L_s^1 and their extensibility*, Result. Math. 47 (2005), 61–68.
- [J10] W. Jabłoński, *Sum of graphs of continuous functions and boundedness of additive operators*, J. Math. Anal. Appl. 312 (2005), 527–534.
- [J11] W. Jabłoński, *J. Schwaiger, Stability of homogeneity and completeness*, Sitzungber. Abt. II 214 (2005), Österreichische Akademie der Wissenschaften, 111–132.
- [J12] W. Jabłoński, *On some subsemigroups of the groups L_s^1 and L_∞^1* , Demonstratio Math. 39 (2006), 305–316.
- [J13] W. Jabłoński, *Jacek Tabor, Józef Tabor, Generalized shadowing for discrete semidynamical systems*, Ann. Polon. Math. 88.3 (2006), 263–269.
- [J14] W. Jabłoński, *Homogeneity equation almost everywhere*, Acta Math. Hungar. 113 (1-2) (2006), 73–83.
- [J15] W. Jabłoński, *On subsemigroups of the group L_s^1* , Demonstratio Math. 39 (2006), 815–823.
- [J16] W. Jabłoński, *L. Reich, Stability of the translation equation in rings of formal power series and partial extensibility of one parameter groups of truncated formal power series*, Sitzungber. Abt. II 215 (2006), Österreichische Akademie der Wissenschaften, 127–137.
- [J17] W. Jabłoński, *"Pexiderized" homogeneity almost everywhere*, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007), 675–684.

- [J18] W. Jabłoński, *Stability of homogeneity almost everywhere*, Acta Math. Hungar. 117 (2007), 219–229.
- [J19] W. Jabłoński, L. Reich, *On the standard form of the solution of the translation equation in rings of formal power series*, Math. Panon. 18/2 (2007), 169–187.
- [J20] W. Jabłoński, *On existence of subsemigroups of the group L_s^1 and extensibility of homomorphisms into L_s^1* , Aequationes Math. 74 (2007), 219–225.
- [J21] W. Jabłoński, *Homomorphisms of the group L_s^1 into the group L_r^1 for $r \leq 3$* , Aequationes Math. 74 (2007), 287–309.
- [J22] W. Jabłoński, *Stability of Pexiderized homogeneity almost everywhere*, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 1310–1319.
- [J23] W. Jabłoński, L. Reich, *On homomorphisms of an abelian group into the group of invertible formal power series*, Publ. Math. Debrecen 73/1-2 (2008), 25–47.
- [J24] W. Jabłoński, *Iterations in rings of formal power series*, in: Festkolloquium für L. Reich aus Anlass seines 70. Geburtstages, H. Friepertinger, W. Prager und J. Schwaiger (eds.), Grazer Math. Ber. 359 (2011), 25–45.
- [J25] W. Jabłoński, *One-parameter Groups of Formal Power Series of One Indeterminate*, in: Functional Equations in Mathematical Analysis, Th. M Rassias and J. Brzdęk (eds.), Springer Optimization and Its Applications (2012), 523–545.
- [J26] W. Jabłoński, L. Reich, *A new approach to the description of one-parameter groups of formal power series in one indeterminate*, Aequationes Math. 87 (2014), 247–284.
- [J27] W. Jabłoński, *Additive involutions and Hamel bases*, Aequationes Math. 89 (2015), 575–582.
- [J28] W. Jabłoński, *Homomorphisms of the group L_s^1 into the group L_r^1 for $r \geq 4$* , in: L. Reich 75. A Tribute by Students, Colleagues, and Friends, H. Friepertinger, W. Prager, J. Schwaiger and Jörg Tomaschek (eds.), Grazer Math. Ber. 363 (2015), 81–105.
- [J29] W. Jabłoński, *Additive iterative roots of identity and Hamel bases*, Aequationes Math. DOI 10.1007/s00010-015-0376-9

(b) Omówienie tematyki prac ujętych w punkcie 5(a).

Mój pozostały dorobek podzielić można na kilka grup. Najliczniejszą tworzą publikacje, w których rozważane były problemy dotyczące istnienia i postaci podpółgrup i podgrup w grupie L_s^1 , własności i postać homomorfizmów przemiennej grupy $(G, +)$ w grupę L_s^1 dla $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ oraz jednoparametrowe grupy formalnych szeregów potęgowych. Dużą grupę stanowią publikacje dotyczące stabilności równań funkcyjnych, głównie równania φ -jednorodności. Zajmowałem się też pewną klasą zbiorów ”małych” A , dla których algebraiczna suma $A + A$ jest ”duża” oraz pewną rodziną addytywnych pierwiastków iteracyjnych z identyczności, która jest gęsta w przestrzeni funkcji addytywnych. Jedna z prac analizuje też problem śledzenia w teorii układów dynamicznych.

1. Prace [J1, J12, J15] poświęcone były problemowi istnienia takich podpółgrup i podgrup grupy L_s^1 , w których pewne elementy ciągu $\bar{x}_s = (x_j)_{j \in [1, s]}$ są funkcjami pozostałych elementów

tego ciągu. W pracach tych sformułowano warunki, przy których takie podpółgrupy i podgrupy nie istnieją. Ponadto, w pewnych szczególnych przypadkach podany został kompletny opis istniejących podpółgrup i podgrup.

2. W serii prac [J2, J3, J20, J21, J28] rozważano homomorfizmy w grupę L_s^1 .

W pozycji [J2] podano postać wszystkich homomorfizmów grupy L_2^1 w grupę L_s^1 dla $s \in \{2, 3\}$, zaś praca [J21], stanowiąca kontynuację tych badań, zawiera kompletny opis wszystkich możliwych klas homomorfizmów grupy L_s^1 w grupę L_r^1 dla $r \leq 3$. Przypadek $r \geq 4$ rozważany był w publikacji [J28]. W pracy tej zawarte są charakteryzacje (bez szczegółowego opisu) wszystkich klas homomorfizmów, a w szczególności, wynik omawiany już w zasadniczej części tego opracowania i stwierdzający fakt, że szeroka klasa homomorfizmów grupy L_s^1 w grupę L_r^1 jest złożeniem projekcji π_1^s z homomorfizmami grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ w grupę L_r^1 .

W publikacji [J3] podjęto próbę rozwiązania problemu postawionego w 1991 roku przez L. Reicha (zob. [50]) i dotyczącego przedłużalności homomorfizmów w grupę L_s^1 . W 1993 roku Z. Moszner postawił hipotezę, że każdy homomorfizm grupy $(\mathbb{R}, +)$ w grupę L_s^1 postaci $\mathbb{R} \ni t \mapsto (f_1(t), \dots, f_s(t)) \in L_s^1$ z funkcją $f_1 \neq 1$ jest przedłużalny (dokładniej, 1-przedłużalny w myśl przyjętej tu definicji), zaś homomorfizm

$$(24) \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto (1, 0, \dots, 0, f_{i+2}(t), \dots, f_s(t)) \in L_s^1$$

z niezerową funkcją addytywną $f_{i+2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest przedłużalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{s-i}(t) = w(f_{p+2}(t))$ dla $t \in \mathbb{R}$ z pewnym $w \in \mathbb{R}[x]$. W [J3] udało się potwierdzić (dla homomorfizmów przemiennej i jednoznacznie podzielnej przez pewną liczbę pierwszą grupy $(G, +)$ w grupę L_s^1) konieczność warunku z hipotezy Z. Mosznera dla homomorfizmu postaci (24). Niestety, metody tu zastosowane były zbyt słabe, aby uzyskać wystarczalność tego warunku nie mówiąc już o opisie wszystkich homomorfizmów w grupę L_s^1 . Dopiero współpraca nawiązana później z L. Reichem pozwoliła na przynajmniej częściowe pokonanie pojawiających się tu trudności.

Praca [J20] zawiera konstrukcję pewnego homomorfizmu grupy L_2^1 w grupę L_s^1 dla $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wykazano tu, że odwzorowanie $L_2^1 \ni (x_1, x_2) \mapsto (f_j(x_1, x_2))_{j \in [1, s]} \in L_s^1$ z funkcjami

$$f_j(x_1, x_2) = \frac{j!}{2^{j-1}} \frac{x_2^{j-1}}{x_1^{j-2}} \quad \text{dla } (x_1, x_2) \in L_s^1 \text{ oraz } j \in [1, s]$$

jest homomorfizmem grupy L_2^1 w grupę L_s^1 dla $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wykorzystując skonstruowany homomorfizm wskazano przykłady pewnych podpółgrup grupy L_s^1 oraz przedyskutowano problem przedłużalności pewnej klasy homomorfizmów w grupę L_s^1 .

3. W pracach [J8, J9, J23] badano homomorfizmy w grupę L_s^1 w powiązaniu z jednoparametrowymi grupami formalnych szeregów potęgowych.

Rozpoczynająca ten cykl praca [J8] zawiera ważny, choć elementarny wynik L. Reicha stwierdzający fakt izomorficzności grupy L_∞^1 z grupą Γ^∞ odwracalnych formalnych szeregów potęgowych nad $\mathbb{R}$. Punktem wyjścia w tej publikacji była postać konieczna homomorfizmów w grupę L_∞^1 oraz opis wszystkich regularnych jednoparametrowych grup

$$F_t(X) = X + c_k(t)X^k + \dots \in \Gamma^\infty$$

formalnych szeregów potęgowych. Wykorzystując wskazany izomorfizm grup udowodniono istnienie i postać rozważanej klasy homomorfizmów w grupę L_∞^1 . Otrzymane wyniki zastosowano, poprzez ponowne wykorzystanie izomorfizmu grup, do opisu analizowanej tu klasy jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych bez założenia ich regularności.

Praca [J9] zawiera analizę przypadku badanego w [J8] dla grupy L_s^1 oraz obciętych formalnych szeregów potęgowych. Udowodniono tu też ostatecznie hipotezę Z. Moszniera dotyczącą przedłużalności homomorfizmów postaci (24).

W kolejnej pracy [J23] tej serii analizowany był dla $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (w podobny sposób jak w poprzednich dwóch pracach) przypadek homomorfizmów $\mathbb{R} \ni t \mapsto (f_j(t))_{j \in [1, s]} \in L_s^1$ z funkcją $f_1 \neq 1$ oraz takich jednoparametrowych grupy formalnych szeregów potęgowych postaci $F_t(X) = c_1(t)X + c_2(t)X^2 + \dots \in \Gamma^s$, że $c_1 \neq 1$. Również tutaj punktem wyjścia była postać konieczna badanej klasy homomorfizmów w grupę L_s^1 oraz regularne grupy iteracji. Powiązanie tych wyników pozwoliło podać opis ogólny pewnej klasy homomorfizmów w grupę L_s^1 , zaś powrót do grupy formalnych szeregów potęgowych dał opis rozważanej tu klasy jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych bez założenia ich regularności. Również w tym przypadku potwierdzono słuszność hipotezy Z. Moszniera dotyczącej przedłużalności homomorfizmów.

4. Jak już wiadomo, dla $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ grupa różniczkowa L_s^1 jest izomorficzna z grupą Γ^s odwracalnych formalnych szeregów potęgowych, więc istniejące rozwiązania wszystkich problemów algebraicznych badanych w jednej z tych struktur można przenieść na drugą z nich. Okazuje się, że ze względu na rozwijane od dawna techniki ja również bardziej zaawansowane narzędzia, znacznie większe możliwości rozwiązania istotnych problemów daje grupa Γ^s odwracalnych (obciętych dla $s \in \mathbb{N}$) formalnych szeregów potęgowych. Dlatego też w kolejnych pracach [J16, J19, J24, J25, J26] badano jednoparametrowe grupy formalnych szeregów potęgowych oraz obciętych formalnych szeregów potęgowych, bez wiązania ich z homomorfizmami w grupę L_s^1 (użyteczne narzędzia stosowane wcześniej dla homomorfizmów w grupę L_s^1 zostały przeniesione do pierścienia formalnych szeregów potęgowych).

Praca [J16] poświęcona jest stabilności równania translacji²⁾ w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych. Przestrzeń $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}[X]_\infty$ wszystkich formalnych szeregów potęgowych nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest przestrzenią zupełną z metryką $d_{\text{ord}} : \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \rightarrow [0, \infty)$,

$$d_{\text{ord}}(F_1, F_2) = 2^{-\text{ord}(F_1 - F_2)} \quad \text{dla } F_1, F_2 \in \mathbb{K}[X],$$

gdzie $\text{ord}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k\right) = \min\{k \in \{0\} \cup \mathbb{N} : c_k \neq 0\}$ ($\min \emptyset = \infty$) jest rzędem formalnego szeregu potęgowego $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Udowodniono tu, że jeśli G jest grupą abelową, to przy pewnych dodatkowych założeniach, dla każdego $M \in \mathbb{N}$ i dla dowolnej rodziny $(F_t)_{t \in G}$ odwracalnych formalnych szeregów potęgowych $F_t \in \Gamma^\infty$, spełniającej warunek

$$(25) \quad \text{ord}(F_{t_1+t_2} - F_{t_1} \circ F_{t_2}) > M \quad \text{dla } t_1, t_2 \in G,$$

istnieje taka jednoparametrowa grupa $(\bar{F}_t)_{t \in G}$ odwracalnych formalnych szeregów potęgowych $\bar{F}_t \in \Gamma^\infty$, że zachodzi oszacowanie

$$(26) \quad \text{ord}(F_t - \bar{F}_t) > \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 \quad \text{dla } t \in G.$$

Wynik ten wiąże problem stabilności równania translacji z przedłużalnością jednoparametrowych grup obciętych formalnych szeregów potęgowych. Istotnie, warunek (25) dla rodziny $(F_t)_{t \in G}$ oznacza, że $(F_t^{[M]})_{t \in G}$ jest jednoparametrową grupą obciętych formalnych szeregów potęgowych. Teza przytoczonego wyniku implikuje istnienie takiej grupy iteracji $(\bar{F}_t)_{t \in G}$, że

$$\bar{F}_t^{[\lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1]} = F_t^{[\lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1]} \quad \text{dla } t \in G.$$

²⁾była to **pierwsza** podjęta próba analizy stabilności równania translacji, nawet jeśli jest to tylko formalna postać tego równania.

Zatem przy pewnych założeniach dotyczących grupy G , dla dowolnej jednoparametrowej grupy obciętych formalnych szeregów potęgowych pewne jej obcięcie jest ∞ -przedłużalne.

W kolejnej pracy [J19] pokazano, że w pewnych przypadkach jednoparametrowe grupy (obciętych) formalnych szeregów potęgowych mają prosty opis powiązany ze sprzężeniami części liniowych formalnych szeregów potęgowych. Oznacza to, że dla pewnych jednoparametrowych grup $(F_t)_{t \in G}$ formalnych szeregów potęgowych (nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) $F_t(X) = c_1(t)X + \sum_{k=2}^s c_k(t)X^k \in \Gamma^s$ dla $t \in G$ istnieje taki formalny szereg potęgowy $T \in \Gamma_1^s$, że

$$F_t(X) = T^{-1}(c_1(t)T(X)) \quad \text{dla } t \in G.$$

Pozycje [J24, J25] są pracami przeglądowymi napisanymi na zaproszenie Edytorów pozycji, w których się ukazały. Pierwsza z nich zawiera streszczenie mojego referatu wygłoszonego na kolokwium zorganizowanym z okazji 70 rocznicy urodzin L. Reicha. Omówione są w niej istotne problemy iteracyjne badane przez L. Reicha w pierścieniu formalnych szeregów potęgowych jednej zmiennej. W drugiej pracy omawiane są jednoparametrowe grupy formalnych szeregów potęgowych pod kątem metod dowodowych zastosowanych do otrzymania ich opisu.

W ostatniej pracy [J26] podjęto próbę jednolitego podejścia (bez nawiązania do grup L_s^1) do problemu wyznaczenia i opisu wszystkich jednoparametrowych grup formalnych szeregów potęgowych i obciętych formalnych szeregów potęgowych. Podano jednolite i prostsze dowody twierdzeń udowodnionych w pracach [J8, J9, J23]. Przedstawione wyniki uzupełnione zostały o częściową analizę ostatniego, nie badanego dotychczas przypadku. Jak to już zaznaczono w głównej części tego opracowania, nie udało się tu podać pełnej charakteryzacji rozważanych grup.

5. Kolejny jednorodny tematycznie cykl publikacji stanowią prace [J4, J6, J7, J11, J14, J17, J18, J22] poświęcone stabilności równań funkcyjnych. Problem stabilności równań funkcyjnych jest nadal szeroko i intensywnie badany dla różnych równań funkcyjnych, przy coraz bardziej abstrakcyjnych założeniach. Większość z wymienionych prac poświęcona jest problemowi stabilności równania φ -jednorodności

$$f(\alpha x) = \varphi(\alpha)f(x).$$

Udowodnione wyniki są uogólnieniami rezultatów udowodnionych wcześniej przez S. Czerwika [9], Z. Kominka i J. Matkowskiego [27], J. Schwaigera [63] oraz Józefa i Jacka Taborów [65].

5a. Publikacje [J4, J6, J11] tworzą tu jednolitą całość i rozpatrywana jest w nich stabilność równania jednorodności na "obciętej dziedzinie".

W pracy [J4] badana była stabilność klasycznej jednorodności na obciętej dziedzinie, tj. rozważano funkcje $f : X \rightarrow Y$ spełniające warunek

$$(27) \quad \alpha^{-1}f(\alpha x) - f(x) \in \delta(\alpha)K(x)V \quad \text{dla } \alpha \in A, x \in U,$$

gdzie funkcja f przyjmowała wartości w ciągowo zupełnej i lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo-topologicznej Hausdorffa. Przy pewnych dodatkowych założeniach istnieje wówczas jedyna taka $F : U \rightarrow Y$ spełniająca dla pewnego $A_0 \subset A$ równanie

$$(28) \quad F(\alpha x) = \alpha F(x) \quad \text{dla } \alpha \in \langle A_0 \rangle, x \in U,$$

że różnica $F - f$ jest odpowiednio ograniczona. Wynik ten został później uogólniony w pracy [J6], gdzie rozważano podobny do (27) warunek

$$(29) \quad \varphi(\alpha)^{-1}f(\alpha x) - f(x) \in \delta(\alpha)K(x)V \quad \text{dla } \alpha \in A, x \in U.$$

Przy dodatkowych założeniach udowodniono wtedy istnienie jedynej funkcji $F : U \rightarrow Y$ spełniającej (28) z podobnie ograniczoną różnicą $F - f$. W pracy tej rozważana jest też pexideryzacja warunku (29), tj. warunek

$$\phi(\alpha)^{-1}f(\alpha x) - g(x) \in \delta(\alpha)K(x)V \quad \text{dla } \alpha \in A, x \in U.$$

W tym przypadku również znajdziemy funkcję $F : U \rightarrow Y$ spełniającą (28) i taką, że różnice $F - f$ oraz $F - g$ są odpowiednio oszacowane.

Pozycja [J11] jest zamknięciem tej serii publikacji. Zawarta jest tu analiza i opis rozwiązań równania φ -jednorodności rozpatrywanego na G -przestrzeniach X . Ponadto, dla funkcji $f : X \rightarrow Y$ określonej na G -przestrzeni X o wartościach w ciągowo zupełnej i lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo topologicznej Hausdorffa Y nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ oraz dla funkcji $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ badany jest warunek postaci

$$(30) \quad f(\alpha x) - \varphi(\alpha)f(x) \in K(X)V(\beta) \quad \text{dla } \alpha \in A, x \in U,$$

gdzie funkcja $V : A \rightarrow \mathcal{B}(Y)$ odwzorowuje zbiór A w rodzinę wszystkich ograniczonych podzbiorów przestrzeni Y . Przy dodatkowych założeniach otrzymujemy wtedy istnienie takiej funkcji $F : U \rightarrow Y$ spełniającej (29), że różnica $F - f$ jest odpowiednio oszacowana. Na koniec zbadano problem, czy w dowodach stabilnościowych dla równania jednorodności istotne jest założenie zupełności przestrzeni docelowej. Analogiczny problem dla stabilności równania funkcji addytywnej był pozytywnie rozstrzygnięty w pracy G. L. Fortiego i J. Schwaigera [10]. W przypadku równania jednorodności sytuacja jest bardziej skomplikowana. Wiadomo, że w pewnych przypadkach otrzymujemy superstabilność równania jednorodności i wtedy założenie zupełności przestrzeni docelowej w dowodach twierdzeń nie jest potrzebne. Osobno rozpatrzyć należy więc przypadek warunków, które implikują stabilność, ale nie superstabilność. W tych przypadkach prawdziwe jest stwierdzenie, że stabilność równania jednorodności implikuje zupełność przestrzeni docelowej (zob. [Theorem 6, J11]).

5b. Prace [J14, J17, J18, J22] tworzą drugą jednolitą serię i dotyczą równania φ -jednorodności "prawie wszędzie", jego spexideryzowanej wersji oraz badania stabilności tych równań "prawie wszędzie" w sensie abstrakcyjnie zdefiniowanego liniowo niezmienniczego ideału "zbiorów małych". Mówimy, że warunek W określony na przestrzeni X jest spełniony $\mathcal{J}(X)$ -prawie wszędzie w X (w skrócie $\mathcal{J}(X)$ -p.w. w X), jeśli istnieje taki zbiór "mały" $U \in \mathcal{J}(X)$, że warunek $W(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in X \setminus U$. Wzorując się konstrukcjach ideałów podanych pracach badających stabilność równania Cauchy'ego "prawie wszędzie", wprowadzono pojęcia: właściwego i liniowo niezmienniczego ideału $\mathcal{J}(G)$ zbiorów małych w grupie G z zerem, właściwego i liniowo niezmienniczego ideału $\mathcal{J}(X)$ zbiorów małych w G -przestrzeni X oraz "sprzężonego" z ideałami $\mathcal{J}(G)$ oraz $\mathcal{J}(X)$ ideału $\mathcal{J}(G \times X)$ zbiorów małych w produkcie $G \times X$.

W szczególności w pozycji [J14] udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 24. *Niech G oraz H będą grupami z zerami i niech X oraz Y będą, odpowiednio, G -przestrzenią oraz H -przestrzenią. Załóżmy dodatkowo, że odwzorowanie $H \ni \alpha \mapsto \alpha y \in Y$ jest różnowartościowe dla każdego $y \in Y^* := Y \setminus \theta$. Jeśli funkcje $\varphi : G \rightarrow H$ oraz $F : X \rightarrow Y$ spełniają warunek*

$$(31) \quad F(\alpha x) = \varphi(\alpha)F(x) \quad \mathcal{J}(G \times X)\text{-p.w. w } G \times X,$$

to albo równość $F(x) = \theta$ zachodzi $\mathcal{J}(X)$ -p.w. w X , albo istnieje homomorfizm $\tilde{\varphi} : G \rightarrow H$ oraz istnieje taka funkcja $\bar{F} : X \rightarrow Y$ spełniająca równanie φ -jednorodności

$$\bar{F}(\alpha x) = \tilde{\varphi}(\alpha)\bar{F}(x) \quad \text{dla } (\alpha, x) \in (G^* \times X),$$

że równość $\phi(\alpha) = \tilde{\phi}(\alpha)$ zachodzi $\mathcal{J}(G)$ -p.w. w G , zaś równość $F(x) = \bar{F}(x)$ - $\mathcal{J}(X)$ -p.w. w X .

W kolejnej z prac [J17] badana była spexideryzowana wersja równania φ -jednorodności

$$(32) \quad F_1(\alpha x) = \varphi(\alpha)F_2(x) \quad \mathcal{J}(G \times X)\text{-p.w. w } G \times X.$$

W pracach [J18, J22] udowodniono, że równania (31) oraz (32) są superstabilne. W szczególności (np. dla równania φ -jednorodności) dla funkcji $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ oraz $f : X \rightarrow Y$ (Y jest tutaj lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo topologiczną Hausdorffa nad $\mathbb{K}$) warunek

$$f(\alpha x) - \phi(\alpha)f(x) \in \delta(\alpha)K(x)V \quad \mathcal{J}(G \times X)\text{-p.w. w } G \times X,$$

przy pewnych dodatkowych założeniach implikuje istnienie homomorfizmu $\bar{\varphi} : G \rightarrow \mathbb{K}$ grup z zerem (funkcji multiplikatywnej[!]) oraz takiej funkcji $F : X \rightarrow Y$, że

$$\begin{aligned} \phi(\beta) &= \tilde{\phi}(\beta) & \mathcal{J}(G)\text{-p.w. w } G, \\ f(x) &= \bar{F}(x) & \mathcal{J}(X)\text{-p.w. w } X, \\ F(\alpha x) &= \tilde{\phi}(\alpha)F(x) & \text{dla } (\alpha, x) \in G^* \times X. \end{aligned}$$

5c. W ostatniej z tego cyklu publikacji [J7], odbiegającej nieco tematycznie od pozostałych, badana jest stabilność uogólnionego równania średnich. Udowodnione zostało tam następujące twierdzenie.

Twierdzenie 25. *Niech X będzie przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i ustalmy $\varepsilon > 0$. Jeśli funkcje $f : \mathbb{K} \rightarrow X$ oraz $\Phi : \mathbb{K} \rightarrow X$ spełniają nierówność*

$$\left\| \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} - \Phi(x + y) \right\| < \varepsilon \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{K}, x \neq y,$$

to istnieją takie stałe $a, b \in X$, że

$$\|f(x) - (xa + b)\| < 2\varepsilon \quad \text{oraz} \quad \|\Phi(x) - b\| < 3\varepsilon \quad \text{dla } x \in \mathbb{K}.$$

6. Kolejne dwie prace [J5, J10] poświęcone są pewnej rodzinie zbiorów "małych" A , dla których ich algebraiczna suma $A + A := \{a + b : a, b \in A\}$ nie jest "mała". R. Ger i M. Kuczma wprowadzili w [3] klasę $\mathcal{A}_n$ wszystkich takich zbiorów $T \subset \mathbb{R}^n$, że każda ograniczona z góry na T funkcja wypukła jest ciągła. M. Kuczma [28] udowodnił, że wykres dowolnej nieafinicznej rzeczywistej funkcji ciągłej określonej na pewnym przedziale należy do $\mathcal{A}_2$. Następnie R. Ger [13] wykazał, że dowolna $(n-1)$ -wymiarowa hiperpowierzchnia regularna w $\mathbb{R}^n$, nie leżąca w pewnej $(n-1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyźnie, należy do $\mathcal{A}_n$ dla dowolnego $n \geq 2$. Naturalnym jest więc pytanie, czy założenie regularności jest tu konieczne. Wiadomo (zob. [29]), że jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest takim zbiorem, że $\text{int}(A + A) \neq \emptyset$, to $A \in \mathcal{A}_n$. W [J5] pokazano, że dla wykresu $\text{graph } f \subset \mathbb{R}^n$ dowolnej nieafinicznej rzeczywistej funkcji ciągłej określonej na pewnym otwartym i spójnym zbiorze w $\mathbb{R}^{n-1}$ zachodzi $\text{int}(\text{graph } f + \text{graph } f) \neq \emptyset$, co oznacza, że $\text{graph } f \in \mathcal{A}_n$. W pracy [J10] udowodniono, że $\text{int}(\text{graph } f + \text{graph } f) \neq \emptyset$ dla jednostajnie ciągłej i nieafinicznej rzeczywistej funkcji f określonej na otwartym i łukowo spójnym podzbiore rzeczywistej przestrzeni unormowanej (funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ określoną na rzeczywistej przestrzeni unormowanej X nazywamy afiniczną, jeśli istnieją takie $x^* \in X^*$ oraz $a \in \mathbb{R}$, że $f(x) = x^*(x) + a$ dla $x \in X$).

7. Publikacje [J27, J29] poświęcone są własnościom rodziny addytywnych pierwiastków iteracyjnych z identyczności. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniowo topologiczną oraz

$$\mathcal{A}_X = \{a \in X^X : a \text{ jest funkcją addytywną}\}.$$

Bazę Hamela przestrzeni X nazywamy bazę tej przestrzeni nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych. K. Baron skonstruował w [6] przykład takiej nieciągłej funkcji addytywnej a , że $a^2 = \text{id}_X$ (funkcję a nazywamy wówczas *inwolucją*) oraz $a(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H} \neq \emptyset$ dla każdego co najmniej trójelementowego zbioru $\mathcal{H} \subset X$ wektorów liniowo niezależnych nad $\mathbb{Q}$. W [6] udowodniono też gęstość pewnych zbiorów nieciągłych addytywnych involucji w przestrzeni liniowo-topologicznej $\mathcal{A}_X$. Praca [J27] zawiera nieznaczące wzmocnienie tych wyników wyposażonych tu w proste algebraiczne dowody. Zastosowana metoda dowodowa jest na tyle ogólna, że pozwoliła przenieść wyniki z tej pracy na ogólniejszy przypadek addytywnych pierwiastków iteracyjnych z identyczności id_X rzędu $n \geq 2$. Ustalmy $n \geq 2$ i niech $\mathcal{A}_X^{(n)} = \{a \in \mathcal{A}_X : a^n = \text{id}_X\}$. W [29] udowodniono, że rodziny

$$\{a \in \mathcal{A}_X^{(n)} : a \text{ jest funkcją nieciągłą oraz } a(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H} \neq \emptyset \text{ dla każdego nieskończonego zbioru } \mathcal{H} \subset X \text{ wektorów liniowo niezależnych nad } \mathbb{Q}\},$$

$$\{a \in \mathcal{A}_X^{(n)} : a \text{ jest funkcją nieciągłą oraz } a(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \text{ dla bazy Hamela } \mathcal{H} \text{ przestrzeni } X \text{ nad } \mathbb{Q}\}$$

są gęste w $\mathcal{A}_X$. Dowód tego faktu bazuje na strukturalnych wynikach dotyczących równania

$$p(T) = 0,$$

gdzie $p \in \mathbb{K}[x]$ jest wielomianem dodatniego stopnia oraz $T : V \rightarrow V$ jest operatorem liniowym na przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$.

8. W pracy [J13] analizowany jest istotny w teorii stabilności układów dynamicznych problem śledzenia. Wprowadzone zostało tutaj pojęcie *o-normy* $\lfloor \cdot \rfloor$ na przestrzeni ciągów rzeczywistych. Przy pewnych założeniach dotyczących przestrzeni metrycznej X , odwzorowania $\varphi : X \rightarrow X$ oraz zdefiniowanej o-normy $\lfloor \cdot \rfloor$ udowodniono, że dyskretny układ semidynamiczny wyznaczony przez φ ma własność śledzenia względem $\lfloor \cdot \rfloor$. Oznacza to, że dla dowolnej $\lfloor \cdot \rfloor$ -pseudoorbity $\mathbf{x}$ odwzorowania φ istnieje dokładnie jedna taka jego orbita $\mathbf{y}$, która $\lfloor \cdot \rfloor$ -śledzi pseudoorbitę $\mathbf{x}$.

Literatura

- [1] M. Abate, *Discrete Holomorphic Local Dynamical Systems* in: Holomorphic Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics 1998, G. Gentili, J. Guenot and G. Patrizio Eds, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- [2] J. Aczél, S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, PWN Warszawa 1960.
- [3] Ch. Babbage, *Essay towards the calculus of functions*, Phil. Trans. Royal Soc. London (1815), 389–423.
- [4] I. K. Babenko, *Algebra, geometry and topology of the substitution group of formal power series*, Russian Math. Surveys 86:1 (2013), 1–68.
- [5] I. N. Baker, *Permutable formal power series and regular iteration*, J. Austral. Math. Soc. 2 (1962), 265–294.
- [6] K. Baron, *On additive involutions and Hamel bases*, Aequationes Math. 87 (2014), 159–163.
- [7] K. T. Chen, *Local diffeomorphisms – C^∞ -realization of formal properties*, Amer. J. Math. 87 (1965), 140–157.
- [8] J. Chudziak, P. Drygaś, W. Jabłoński, S. Midura, *On homomorphisms of the group L_2^1 into the groups L_2^1 and L_3^1* , Demonstratio Math. 31, 143–152 (1998)
- [9] S. Czerwik, *On the stability of the homogeneous mapping*, G. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada XIV (6), (1992), 268–272.

- [10] G. L. Forti, J. Schwaiger, *Stability of homomorphisms and completeness*, C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can. 11, No. 6(1989), 215–220.
- [11] H. Fripertinger, L. Reich, *The formal translation equation and formal cocycle equations for iteration groups of type I*, Aequationes Math. 76 (2008), 54–91.
- [12] H. Fripertinger, L. Reich, *The formal translation equation for iteration groups of type II*, Aequationes Math. 79 (2010), 111–156.
- [13] R. Ger, *Note on convex functions bounded on regular hypersurfaces*, Demonstratio Math. vol. VI (1973), 97–103.
- [3] R. Ger, M. Kuczma, *On the boundedness and continuity of convex functions and additive functions*, Aequationes Math. 4 (1970), 157–162.
- [14] D. Gronau, *Two iterative functional equations for power series*, Aequationes Math. 25 (1982), 233–246.
- [15] W. Jabłoński, *On some subsemigroups of the group L_s^1* , Rocznik Nauk.–Dydakt. WSP w Krakowie 14 (1997), 101–119.
- [16] W. Jabłoński, *On extensibility of some homomorphisms*, Rocznik Nauk.–Dydak. WSP w Krakowie 16 (1999), 35–43.
- [17] W. Jabłoński, *On some subsemigroups of the groups L_s^1 and L_∞^1* , Demonstratio Math. 39 (2006), 305–316.
- [18] W. Jabłoński, *On existence of subsemigroups of the group L_s^1 and extensibility of homomorphisms into L_s^1* , Aequationes Math. 74 (2007), 219–225.
- [19] W. Jabłoński, *Homomorphisms of the group L_s^1 into the group L_r^1 for $r \leq 3$* , Aequationes Math. 74 (2007), 287–309.
- [20] W. Jabłoński, *Iterations in rings of formal power series*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2015, 1–114.
- [21] W. Jabłoński, *Homomorphisms of the group L_s^1 into the group L_r^1 for $r \geq 4$* , Grazer Math. Ber. 363 (2015), 81–105.
- [22] W. Jabłoński, L. Reich, *On the solutions of the translation equation in rings of formal power series*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 75 (2005), 179–201.
- [23] W. Jabłoński, L. Reich, *On the form of homomorphisms into the differential group L_s^1 and their extensibility*, Result. Math. 47 (2005), 61–68.
- [24] W. Jabłoński, L. Reich, *On the standard form of the solution of the translation equation in rings of formal power series*, Math. Panon. 18/2 (2007), 169–187.
- [25] W. Jabłoński, L. Reich, *On homomorphisms of an abelian group into the group of invertible formal power series*, Publ. Math. Debrecen 73/1-2 (2008), 25–47.
- [26] W. Jabłoński, L. Reich, *A new approach to the description of one-parameter groups of formal power series in one indeterminate*, Aequationes Math. 87 (2014), 247–284.
- [27] Z. Kominek, J. Matkowski, *On stability of the homogeneity condition*, Results in Mathematics vol. 27 (1995), 370–380.
- [28] M. Kuczma, *On some set classes occurring in the theory of convex functions*, Annales Soc. Math. Pol., Comment. Math. XVII (1973), 127–135.
- [29] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy’s equation and Jensen’s inequality*, In: A. Gilányi (ed.), 2nd edn., Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [30] M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger, *Iterative functional equations*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 32, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [31] D. N. Lewis, *On formal power series transformations*, Duke Math. J. 5 (1939), 794–805.
- [32] G. Mehring, *Der Hauptsatz über Iteration im Ring der formalen Potenzreihen*, Aequationes Math. 32 (1987), 274–296.
- [33] S. Midura, *Sur la détermination de certains sous-groupes du groupe L_s^1 à l’aide d’équations fonctionnelles*, Dissertationes Math. 105 (1973), 1–34.

- [34] S. Midura, *Sur les solutions des equations fonctionnelles qui determinent certains sous-demi-groupes a deux parametres du groupe L_4^1* , Demonstratio Mathematica 23 (1990), 69–81.
- [35] S. Midura, *On subgroups of the group L_5^1* , Demonstratio Mathematica 27 (1994), 133–134.
- [36] S. Midura, *On solutions of systems of functional equations determining some subsemigroups of the group L_6^1* , Demonstratio Mathematica 29 (1996), 579–590.
- [37] S. Midura, *On solutions of some system of functional equations*, Demonstratio Mathematica 31 (1998), 299–304.
- [38] S. Midura, B. Osika, *On subsemigroups and subgroups of the group L_4^1 with faithful parametrization*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka - Fizyka 64 (1990), 179–189.
- [39] S. Midura, Z. Wilczyński, *Sur les homomorphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ au groupe L_s^1 pour $s \leq 5$* . Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie 13, 241–258 (1993)
- [40] Moszner Z.: *Sur un sous-groupe a un paramètre du groupe L_∞^1* . Opuscula Math. 6, 149–155 (1990)
- [41] E. Peschl, L. Reich, *Beispiel einer kontrahierenden biholomorphen Abbildung, die in keine Liesche Gruppe biholomorpher Abbildungen einbettbar ist*, Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. 1971 (1972), 81–92.
- [42] C. Praagman, *Roots, iterations and logarithms of formal automorphisms*, Aequationes Math. 33 (1987), 251–259.
- [43] L. Reich, *Über die allgemeine Lösung der Translationgleichung in Potenzreihenringen*. Second Zagreb-Graz Meeting of Mathematicians (Plitvice, 1980), Ber. No. 159, 22 pp. Bericht 154–162, Forschungszentrum Graz, Graz 1981.
- [44] L. Reich, *Analytische und fraktionale Iteration formal-biholomorpher Abbildungen und Differentialgleichung*, Publ. Math. Debrecen 27 (1981), 49–60.
- [45] L. Reich, *Iteration problems in power series ring*, in: Roger Thibault (Éd.), *Théorie d'itération et ses Applications*. Toulouse, France, 17–22 Mai 1982. *Colloques Internationaux du CNRS* 332 (1982), 3–22.
- [46] L. Reich, *On a differential equation arising in iteration theory in rings of formal power series in one variable*, Lecture Notes in Mathematics 1163, *Iteration Theory and its Functional Equations*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985, 135–148.
- [47] L. Reich, *On families of commuting formal power series*, Selected topics in functional equations (Graz, 1986), Ber. No. 294, Ber. Math.-Statist. Sekt, Forschungsgesellsch. Joanneum, 285–296, Forschungszentrum Graz, Graz 1988.
- [48] L. Reich, *Die Differentialgleichungen von Aczél-Jabotinsky, von Briot-Bouquet und maximale Familien konvergenter Vertauschbarer Potenzreihen*, Math. Research, Akademie Verlag Berlin 53 (1989), 137–150.
- [49] L. Reich, *Iteration of automorphisms of formal power series rings and of complete local rings*, in: Claudio Alsina et al. (Eds.), *European Conference on Iteration Theory (ECIT 87)*. Caldes de Malavella, Spain, 20–26 September 1987, pp. 26–41. World Scientific, Singapore et al., 1989.
- [50] L. Reich, *Problem* In: *The Twenty-eight International Symposium on Functional Equations*, August 23 - September 1, 1990, Graz - Mariatrost, Austria, Report of the Meeting, Aequationes Math. vol. 41 No 2/3 (1991), 248–310.
- [51] L. Reich, *On the Aczél-Jabotinsky correspondence and families of commuting formal power series*, Contributions to the Theory of Functional Equations. Proceedings of the Seminar Debrecen-Graz, April 12–13, 1991. Grazer Math. Ber. 315 (1991).
- [52] L. Reich, *On power series transformations in one indeterminate having iterative roots of a given order and with given multiplier*, European Conference on Iteration Theory (Singapore 1991), 210–216, World Sci. Publ., Singapore 1992.
- [53] L. Reich, L., *Über Gruppen von iterativen Wurzeln der formalen Potenzreihe $F(x) = x$* , Results in Math. 26 (1994), 366–371.
- [54] L. Reich, L., *Families of commuting formal power series, semicanonical forms and iterative roots*, Polish-Austrian Seminar on Functional Equations and Iteration Theory (Cieszyn 1994), Annales Math. Sil. 8 (1994), 189–201.

- [55] L. Reich, *On iterative roots of formal power series $F(x) = x$* , Functional Analysis IV (Dubrovnik 1993), Various Publ. Ser. (Aarhus) 43, 245–255, Aarhus Univ., Aarhus 1994.
- [56] L. Reich, *Iterative roots of formal power series: universal expression for the coefficients and analytic iteration*, Contribution to the Theory of Functional Equations II (Zamárdi 1995), Grazer Math. Ber 327 (1996), 21–32.
- [57] L. Reich, *On the Distribution of Formal Power Series Transformations with Respect to Embeddability in the Order Topology*, Sitzungsber. Abt. II, 208 (1999), 97–114.
- [58] L. Reich, J. Schwaiger, *Über analytische Iterierbarkeit formaler Potenzreihenvektoren*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. S.-B. II 184 (1975), 599–617.
- [59] L. Reich, J. Schwaiger, *Über einen Satz von Shl. Sternberg in der Theorie der analytischen Iterationen*, Monatsh. Math. 83 (1977), 207–221.
- [60] S. Scheinberg, *Power Seires in One Variable*, J. Math. Anal. Appl. 31 (1970), 321–333.
- [61] J. Schwaiger, *Roots of power series in one variable*, Aequationes Math. 29 (1985), 40–43.
- [62] J. Schwaiger, *Normal forms for systems of formal power series commuting in pairs and iteration problems*, Lecture Notes in Mathematics 1163, Iteration Theory and its Functional Equations, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985.
- [63] J. Schwaiger, *The Functional Equation of Homogeneity and its Stability Properties*, Sitzungsber. Abt. II (1996) 205, 3–12.
- [64] S. Sternberg, *Infinite Lie Groups and Formal Aspects of Dynamical Systems*, J. Math. Mech. 10 (1961), 451–474.
- [65] Jacek Tabor, Józef Tabor, *Homogeneity is superstable*, Publ. Math. 45/1-2(1994), 123–130.
- [66] Gy. Targonski, *Topics in Iteration Theory*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1981.

Wojciech Jaboron'ski