

AUTOREFERAT

1. **Imiona i Nazwisko:** Andrzej Piotr Kisielewicz

2. **Posiadane dyplomy:**

- Dyplom magistra matematyki uzyskany w czerwcu 1992 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
- Dyplom doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka uzyskany 8 listopada 1999 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Tytuł rozprawy doktorskiej: **Selekcje multifunkcji o wartościach rozkładalnych.**

3. **Zatrudnienie w jednostkach naukowych:**

- 1 lipca 1992 - 30 listopada 1999: asystent, Instytut Matematyki Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze.
- 1 grudnia 1999 - 31 sierpnia 2001 - adiunkt, Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej.
- 1 września 2001 – adiunkt, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski.

4. **Osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16 ust 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki:** Cykl publikacji pt:

Podziały dychotomiczne i struktura teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową.

Rozprawę tworzy cykl prac:

- [A1] A. P. Kisielewicz, K. Przesławski, Polyboxes, Cube Tilings and Rigidity, Discrete Comput. Geom. 40 (2008), 1 – 30.
- [A2] A.P. Kisielewicz and K. Przesławski, The Structure of Cube Tilings Under Symmetry Conditions, Discrete Comput. Geom. 48(3) (2012), 777 – 782.
- [A3] A. P. Kisielewicz, On the structure of cube tilings in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$, J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013), 1–10.

- [A4] A.P. Kisielewicz and M. Łysakowska, On Keller's Conjecture in Dimension Seven, Electron. J. of Combin. 22(#P1.16) (2015), pp 44.
- [A5] A.P. Kisielewicz, Partitions and Balanced Matchings of an n-Dimensional Cube, European J. of Combin. 40 (2014), 93 – 107.
- [A6] A.P. Kisielewicz, Some Binomial Identities Arising From a Partition of an n-Dimensional Cube, Fibonacci Quart. 52 (2014), 325 – 330.

1 Wstęp

Teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową nazywamy rodzinę wzajemnie rozłącznych kostek $[0, 1)^d + T = \{[0, 1)^d + t : t \in T\}$ taką, że $\bigcup([0, 1)^d + T) = \mathbb{R}^d$, gdzie T jest pewnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^d$. (W całym referacie, jeżeli $\mathcal{R}$ jest rodziną zbiorów, to $\bigcup \mathcal{R} = \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A$.) Prace [A1]-[A6] są ściśle związane z teselacjami przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową $[0, 1)^d$. O ile sam fakt, że teselacja przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową istnieje jest raczej oczywisty, to pytania o strukturę takich teselacji, to znaczy o sposób wzajemnego położenia kostek w teselacji, są ciekawe i często trudne. Najbardziej znanym problemem dotyczącym struktury teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową jest *hipoteza Minkowskiego*. Zbiór

$$\Lambda = \{\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_d b_d : \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{Z}\},$$

gdzie $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^d$ są wektorami liniowo niezależnymi nazywamy *kratą* w przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Wektory $b_1, \dots, b_d$ nazywamy *bazą* karty Λ . Rodzinę kostek $[0, 1)^d + \Lambda = \{[0, 1)^d + \lambda : \lambda \in \Lambda\}$ nazywamy *teselacją kratową przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową*, jeżeli $[0, 1)^d + \Lambda$ jest teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową. W 1907 roku H. Minkowski postawił następującą hipotezę:

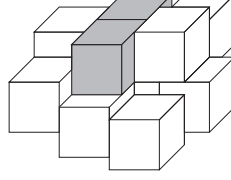
Hipoteza Minkowskiego ([32]). *Każda teselacja kratowa przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową zawiera parę kostek $[0, 1)^d + \lambda$, $[0, 1)^d + \lambda'$ taką, że $|\lambda_j - \lambda'_j| = 1$ dla pewnego $j \in [d] = \{1, \dots, d\}$ oraz $\lambda_i = \lambda'_i$ dla wszystkich $i \in [d] \setminus \{j\}$.*

Parę kostek $[0, 1)^d + \lambda$, $[0, 1)^d + \lambda'$ opisaną w hipotezie Minkowskiego nazywamy *parą bliźniaczą* lub *kostkami bliźniaczymi* (Rysunek 1).

W 1941 G. Hajós podał dowód poprawności hipotezy Minkowskiego. Hajós sprowadził hipotezę Minkowskiego do zagadnienia z teorii grup. Twierdzenie Hajósa o faktoryzacji grup abelowych, które dowodzi słuszności hipotezy Minkowskiego, dało impuls do nowych badań nad faktoryzacją grup ([40]). Mimo to, jak podają H. Stein i S. Szabó w książce [37] poświęconej hipotezie Minkowskiego, Hajós jeszcze wiele lat po opublikowaniu swojego dowodu hipotezy Minkowskiego, szukał dla niej innego, bardziej geometrycznego wyjaśnienia. W dalszej części referatu opiszę hipotezę dotyczącą struktury teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową postawioną w [A2], która jest próbą takiego geometrycznego wyjaśnienia hipotezy Minkowskiego.

W 1930 roku, O.H. Keller wysunął następującą hipotezę, która jest uogólnieniem hipotezy Minkowskiego na dowolną teselację $[0, 1)^d + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową:

Hipoteza Kellera ([21]). *Każda teselacja $[0, 1]^d + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową zawiera parę bliźniaczą.*



Rys. 1. Fragment teselacji $[0, 1]^3 + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i para bliźniacza.

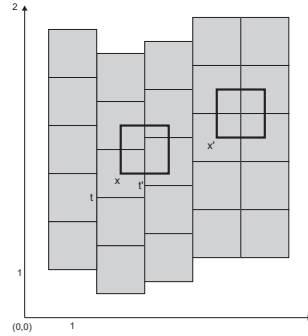
Dziesięć lat po opublikowaniu hipotezy Kellera, w 1940 roku, O. Perron podał dowód jej poprawności dla wymiarów $d \leq 6$. Jego dowód oparty jest na analizie układu kostek teselacji $[0, 1]^d + T$, które mają niepusty przekrój z dowolną ustaloną kostką $[0, 1]^d + x$, gdzie $x \in \mathbb{R}^d$ (Perron przyjął $x = 0$). Kluczową własnością kostek każdej teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową jest spełnienie przez nie *warunku Kellera* ([21]): dla dowolnych dwóch kostek $[0, 1]^d + t, [0, 1]^d + t' \in [0, 1]^d + T$ istnieje $i \in [d]$ takie, że

$$t_i - t'_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1.1)$$

Niech

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_x = \{([0, 1]^d + x) \cap ([0, 1]^d + t) \neq \emptyset : t \in T\}.$$

Rodzina $\mathcal{F}$ jest podziałem kostki $[0, 1]^d + x$ na zbiory postaci $K = K_1 \times \dots \times K_d$ (Rysunek 2), gdzie $K_i = ([0, 1] + x_i) \cap ([0, 1] + t_i)$.



Rys. 2. Struktura podziału $\mathcal{F}$ zależy od położenia punktu $x \in \mathbb{R}^d$.

Zauważmy teraz, że, na mocy warunku Kellera, dla dowolnych dwóch zbiorów $K, G \in \mathcal{F}$ istnieje $i \in [d]$ takie, że $K_i \cap G_i = \emptyset$ oraz $K_i \cup G_i = [0, 1] + x_i$. Podziały o tej własności były punktem wyjścia badań, przeprowadzonych głównie w pracach [A1,A3,A4,B1] nad układami kostek w iloczynie kartezjańskim $X = X_1 \times \dots \times X_d$.

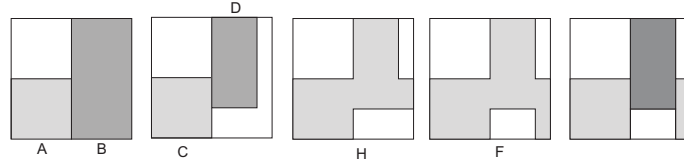
2 Wielokostki, podziały dychotomiczne i kody

W tej części omówiona zostanie praca [A1].

Dla każdego $i \in [d]$ niech X_i będzie dowolnym zbiorem liczącym co najmniej dwa elementy. Zbiór $X = X_1 \times \cdots \times X_d$ nazywamy d -kostką, a niepusty zbiór $A \subseteq X$ postaci $A = A_1 \times \cdots \times A_d$, gdzie $A_i \subseteq X_i$ dla $i \in [d]$, nazywać będziemy *kostką*. Kostka A jest *właściwa*, jeżeli $A_i \neq X_i$ dla każdego $i \in [d]$. Kostkę, która nie jest właściwa nazywamy *niewłaściwą*. Zbiór wszystkich kostek właściwych w d -kostce X oznaczamy przez $\text{box}(X)$, a zbiór wszystkich kostek w X przez $\text{Box}(X)$. Dwie kostki $A, B \subset X$ są *dychotomiczne*, jeżeli

$$A_i = X_i \setminus B_i$$

dla pewnego $i \in [d]$. Zbiór $F \subseteq X$ nazywamy *wielokostką*, jeżeli istnieje rodzina $\mathcal{F}$ złożona z kostek wzajemnie dychotomicznych taka, że $F = \bigcup \mathcal{F}$. Rodzinę $\mathcal{F}$ nazywamy *podziałem dychotomicznym* lub *garniturem* wielokostki F .



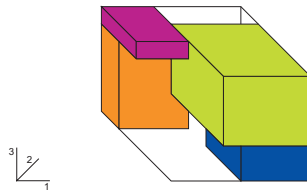
Rys. 3. Kostki A i B są dychotomiczne, a kostki C i D nie są dychotomiczne. Zbiór H nie jest wielokostką, a zbiór F jest wielokostką. Po prawej stronie wielokostki F przedstawiony jest (jedyne) jej podział dychotomiczny na kostki właściwe.

Oczywiście d -kostka X jest wielokostką. Podział dychotomiczny d -kostki X na kostki właściwe nazywamy *podziałem minimalnym*. Nazwa tego typu podziałów ma związek z pytaniem postawionym przez K.A. Kearnesa i E.W. Kissę w pracy [20]: *czy każdy podział d -kostki X na kostki, który liczy mniej niż 2^d kostek zawiera kostkę niewłaściwą?* Pozytywna odpowiedź na to pytanie została udzielona przez N. Alona, T. Bohmana, R. Holzmanna oraz D. J. Kleitmana w pracy [1]. Wobec tego, 2^d jest najmniejszą liczbą kostek właściwych na którą można podzielić d -kostkę. Ponadto, w pracy [B1] wykazano, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest podziałem d -kostki X na kostki właściwe, to $\mathcal{F}$ jest podziałem minimalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathcal{F}| = 2^d$.

Własności wielokostek zostały gruntownie zbadane w pracy [A1]. Dla każdego $i \in [d]$ niech $\mathcal{O}(X_i)$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X_i , które mają nieparzystą liczbę elementów i niech $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(X_d)$. Jeżeli $K \subseteq X$ jest kostką, to dla $i \in [d]$ przez $\mathcal{O}K_i$ oznaczamy rodzinę wszystkich nieparzystych podzbiorów zbioru X_i , których przekroje ze zbiorem K_i mają nieparzystą liczbę elementów, tj. $\mathcal{O}K_i = \{A \in \mathcal{O}(X_i) : |A \cap K_i| \equiv 1 \pmod{2}\}$. Niech

$$\hat{K} = \mathcal{O}K_1 \times \cdots \times \mathcal{O}K_d.$$

Nietrudno sprawdzić, że jeżeli $\mathcal{F} = \{K^1, \dots, K^m\}$ jest rodziną kostek w X taką, że każde dwie kostki z $\mathcal{F}$ są dychotomiczne, wtedy każde dwie kostki rodziny $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{K}^1, \dots, \hat{K}^m\}$ są dychotomiczne. Wobec tego zamiast rodziny $\mathcal{F}$ możemy rozpatrywać kostki z $\hat{\mathcal{F}}$, przy czym teraz wszystkie kostki z $\hat{\mathcal{F}}$ są, o ile są one kostkami właściwymi, tej samej wielkości: $|\mathcal{O}K_i^j| = (1/2)|\mathcal{O}(X_i)|$ dla każdego $i \in [d]$ oraz $j \in [m]$, a zatem $|\hat{K}^j| = (1/2^d)|\mathcal{O}(X)|$. Fakt ten ma zasadnicze znaczenie w analizie struktury układów kostek dychotomicznych. Za przykład niech posłuży uproszczone rozumowanie przedstawione w paragrafie drugim pracy [A1] rozstrzygające następujący problem: *jeżeli $F \subseteq X$ jest wielokostką, to czy prawdą jest, że dla dowolnych podziałów dychotomicznych $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ wielokostki F na kostki właściwe zachodzi równość $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$?* Zadanie jest proste w przypadku, gdy rodzina $\mathcal{F}$ jest rozszerzalna do podziału minimalnego, to znaczy, istnieje rodzina $\mathcal{F}'$ złożona z kostek wzajemnie dychotomicznych taka, że $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ jest podziałem minimalnym i wtedy $|\mathcal{F}| + |\mathcal{F}'| = 2^d$. Ponieważ $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}'$ jest również podziałem minimalnym, zatem $|\mathcal{G}| + |\mathcal{F}'| = 2^d$, a więc $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$. Jednak nie wszystkie układy kostek dychotomicznych są rozszerzalne do podziału minimalnego. Rysunek 4 przedstawia układ czterech kostek dychotomicznych w $X = [0, 1]^3$, którego nie można rozszerzyć do podziału minimalnego.



Rys. 4. Cztery kostki wzajemnie dychotomiczne, których nie można uzupełnić do podziału minimalnego kostki $X = [0, 1]^3$.

W takiej sytuacji przechodzimy do d -kostki $\mathcal{O}(X)$ oraz rodzin $\hat{\mathcal{F}}$ i $\hat{\mathcal{G}}$. Ponieważ $\bigcup \hat{\mathcal{F}} = \bigcup \hat{\mathcal{G}}$ oraz kostki obu rodzin mają tę samą liczbę elementów, zatem $|\hat{\mathcal{F}}| = |\hat{\mathcal{G}}|$, skąd otrzymujemy równość $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$. Zauważmy, że każdej wielokostce $F \subseteq X$ możemy teraz przypisać liczbę $|F|_0$, która jest równa liczbie kostek w dowolnym podziale dychotomicznym wielokostki F na kostki właściwe ([A1, Section 2]). Pomysł wprowadzenia rodziny $\hat{\mathcal{F}}$ w miejsce $\mathcal{F}$ jest rozwinięciem głównej idei dowodu podstawowego twierdzenia pracy [1].

Jak zobaczymy w dalszej części referatu, wiele pytań dotyczących struktury układów kostek wzajemnie dychotomicznych w istotny sposób porusza następujące

Zagadnienie wielokrotnego podziału wielokostki. *Niech $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ będą dwoma podziałami dychotomicznymi wielokostki $F \subseteq X$ na kostki właściwe. Jaki związek zachodzi między kostkami z podziałów $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$? W szczególności, kiedy wielokostka F ma tylko jeden podział dychotomiczny?*

Parę kostek $K, G \subset X$ nazywamy *parą bliźniaczą* lub *kostkami bliźniaczymi*, jeżeli $K_j = X_j \setminus G_j$ dla pewnego $j \in [d]$ oraz $K_i = G_i$ dla każdego $i \in [d] \setminus \{j\}$. Funkcję $f: \text{box}(X) \rightarrow \mathbb{R}$

taką, że dla dowolnych dwóch par bliźniaczych A, B oraz C, D takich, że $A \cup B = C \cup D$ zachodzi równość

$$f(A) + f(B) = f(C) + f(D)$$

nazywamy funkcją *addytywną*. Przestrzeń wszystkich funkcji addytywnych oznaczamy przez $\mathbf{A}(X, \mathbb{R})$. W rozdziale trzecim pracy [A1] zbadane zostały podstawowe własności funkcji addytywnych. Jednym z głównych rezultatów dotyczących funkcji addytywnych jest

Twierdzenie 2.1 ([A1, Theorem 3.6]). *Niech X będzie d -kostką. Dla dowolnych podziałów dychotomicznych $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ wielokostki $F \subseteq X$ na kostki właściwe i dowolnej funkcji $f \in \mathbf{A}(X, \mathbb{R})$ zachodzi równość*

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} f(A) = \sum_{A \in \mathcal{G}} f(A).$$

Twierdzenie 2.1 ma ciekawe zastosowania, zwłaszcza te związane z zagadnieniem wielokrotnego podziału wielokostki. Pierwsze, o którym tutaj wspomnimy, dotyczy etykietowania diadycznego.

Niech E będzie dowolnym niepustym zbiorem. Dowolną surjekcję $\lambda: \text{box}(X) \rightarrow E$ taką, że $\{\lambda(A), \lambda(B)\} = \{\lambda(C), \lambda(D)\}$ dla dowolnych dwóch par bliźniaczych A, B i C, D takich, że $A \cup B = C \cup D$ nazwamy *etykietowaniem diadycznym*. Korzystając z Twierdzenia 2.1 można udowodnić następujący rezultat dotyczący etykietowania diadycznego podziałów dychotomicznych wielokostek.

Lemat 2.2 ([A1, Proposition 4.1]). *Niech X będzie d -kostką, a E dowolnym niepustym zbiorem. Jeżeli $\lambda: \text{box}(X) \rightarrow E$ jest etykietowaniem diadycznym, to dla dowolnej wielokostki $F \subseteq X$ i jej dowolnych podziałów dychotomicznych $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ na kostki właściwe zachodzi równość*

$$\{\lambda(A): A \in \mathcal{F}\} = \{\lambda(A): A \in \mathcal{G}\}.$$

Szczególnym rodzajem etykietowania diadycznego jest kod binarny. Dla każdego $i \in [d]$ niech $\beta_i: 2^{X_i} \setminus \{\emptyset, X_i\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ będzie funkcją spełniającą warunek

$$\beta_i(A_i) + \beta_i(X_i \setminus A_i) = 1 \quad \text{dla każdego } A_i \in 2^{X_i} \setminus \{\emptyset, X_i\}. \quad (2.1)$$

Funkcja $\beta: \text{box}(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2^d$ dana wzorem $\beta(A) = (\beta_1(A_1), \dots, \beta_d(A_d))$ jest, wobec warunku (2.1), etykietowaniem diadycznym. Etykietowanie β nazywamy *kodem binarnym* rodziny $\text{box}(X)$. Na mocy Lematu 2.2, dla dowolnych podziałów dychotomicznych $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ wielokostki $F \subseteq X$ na kostki właściwe zachodzi równość

$$\{\beta(A): A \in \mathcal{F}\} = \{\beta(A): A \in \mathcal{G}\}. \quad (2.2)$$

Powyższa równość wskazuje na związek między kostkami podziałów $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ poruszany w zagadnieniu wielokrotnego podziału: po zakodowaniu kostek podziałów $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ za pomocą kodu

β , zbiór kodów zero-jedynkowych obu podziałów jest identyczny. Podobnie jak w przypadku równości $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$, równość kodów binarnych łatwo wytłumaczyć, gdy podział $\mathcal{F}$ jest rozszerzalny do podziału minimalnego. Jednak dla podziałów, których nie można rozszerzyć do podziału minimalnego, fakt ten jest wysoce nieoczywisty (wydaje się, że nawet w przypadku podziałów rozszerzalnych równość (2.2) jest zaskakująca). W rozdziale piątym pracy [A1] podane są przykłady kodów binarnych.

Kolejnym niezmiennikiem podziałów dychotomicznych wielokostki $F \subseteq X$ omawianym w pracy [A1] jest jej indeks. Definicja indeksu, podana na początku rozdziału szóstego pracy [A1], odwołuje się do pewnej szczególnej funkcji addytywnej. Niech $C = C_1 \times \dots \times C_d \in \text{box}(X)$ i niech dla każdego $i \in [d]$ funkcja $\phi_{C_i} : 2^{X_i} \setminus \{X_i, \emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ dana będzie wzorem

$$\phi_{C_i}(A_i) = [A_i = C_i] - [A_i = X_i \setminus C_i].$$

Przyjmując $\phi_{X_i} \equiv 1$ dla każdego $i \in [d]$, łatwo jest sprawdzić, że dla każdego $C \in \text{Box}(X)$ funkcja $\phi_C : \text{box}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\phi_C(A) = \phi_{C_1}(A_1) \cdots \phi_{C_d}(A_d)$$

jest addytywna. Jeżeli $\mathcal{F}$ jest podziałem dychotomicznym wielokostki $F \subseteq X$, to liczbę

$$\text{Ind}(\mathcal{F}, C) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \phi_C(A) \quad (2.3)$$

nazywamy *indeksem podziału $\mathcal{F}$ względem kostki C* . Jeżeli $\tilde{\phi}_C$ jest przedłużeniem funkcji ϕ_C na zbiór $2^X \setminus \{\emptyset\}$, to liczbę

$$\text{ind}(F, C) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \tilde{\phi}_C(A), \quad (2.4)$$

nazywamy *indeksem wielokostki F względem kostki C* .

Niech $C \in \text{Box}(X)$, $I = \{i_1 < \dots < i_n\} \subseteq [d]$ oraz $C_I = C_{i_1} \times \dots \times C_{i_n}$. Dla $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^d$ niech $C^\varepsilon = C_1^{\varepsilon_1} \times \dots \times C_d^{\varepsilon_d}$, gdzie $C_i^{\varepsilon_i} = C_i$ dla $\varepsilon_i = 0$ i $C_i^{\varepsilon_i} = X_i \setminus C_i$ dla $\varepsilon_i = 1$. Podział dychotomiczny $\mathcal{C}_C = \{C^\varepsilon \neq \emptyset : \varepsilon \in \mathbb{Z}_2^d\}$ nazywamy *podziałem prostym* (Rysunek 5). Niech $I = i(C) = \{i \in [d] : C_i \neq X_i\}$. Każdemu elementowi podziału $\mathcal{C} = \mathcal{C}_C$ przypiszmy znak $+$ lub $-$ w następujący sposób: kostki $A, B \in \mathcal{C}$ są tego samego znaku, jeżeli $B = A^\varepsilon$ oraz $(-1)^{|\varepsilon|} = 1$, gdzie $|\varepsilon| = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i$. (To znaczy, istnieje zbiór $J \subseteq [d]$ zawierający parzystą liczbę elementów taki, że $A_i = X_i \setminus B_i$ dla każdego $i \in J$ oraz $A_i = B_i$ dla $i \in [d] \setminus J$.) Określmy na $\mathcal{C}$ relację $\approx$ w ten sposób, że $A \approx B$ wtedy i tylko wtedy, gdy A i B mają ten sam znak. Relacja $\approx$ jest relacją równoważności na zbiorze $\mathcal{C}$ o dwóch klasach abstrakcji. Kostkom klasy abstrakcji relacji $\approx$ do której należy kostka C przypiszmy znak $+$ i oznaczmy zbiór kostek ze znakiem $+$ przez $\mathcal{C}^+$. Kostkom z drugiej klasy abstrakcji przypisujemy znak $-$ i zbiór tych kostek oznaczmy przez $\mathcal{C}^-$. Niech $F \subseteq X$ będzie wielokostką, a $\mathcal{F}$ jej podziałem dychotomicznym i niech

$$n^+(\mathcal{F}, C) = |\{A \in \mathcal{F} : A_I \in (\mathcal{C}^+)_I\}| \quad \text{oraz} \quad n^-(\mathcal{F}, C) = |\{A \in \mathcal{F} : A_I \in (\mathcal{C}^-)_I\}|.$$

Liczyby $n^+(\mathcal{F}, C)$ i $n^-(\mathcal{F}, C)$ pozwalają wyznaczyć indeks wielokostki w następujący sposób:

LEMAT 2.3 ([A1, Proposition 6.1]). Niech $\mathcal{F}$ będzie podziałem dychotomicznym wielokostki $F \subseteq X$ na kostki właściwe. Dla każdej kostki $C \in \text{Box}(X) \setminus \{X\}$ zachodzi równość

$$\text{ind}(F, C) = \text{Ind}(\mathcal{F}, C) = n^+(\mathcal{F}, C) - n^-(\mathcal{F}, C). \quad (2.5)$$

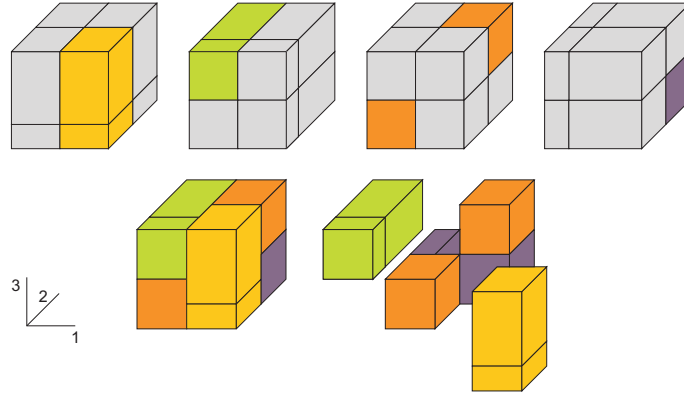
Ponadto, $\text{ind}(F, X) = |\mathcal{F}| = |F|_0$.

Równość (2.5) jest źródłem ważnych i dość niespodziewanych informacji na temat struktury wielokostek i ich podziałów. Najciekawsze z nich wymienimy w postaci poniższych czterech wniosków.

WNIOSEK 2.4. Niech $C \in \text{Box}(X) \setminus \{X\}$. Dla dowolnych podziałów $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ wielokostki F na kostki właściwe zachodzi równość $\text{Ind}(\mathcal{F}, C) = \text{Ind}(\mathcal{G}, C)$.

WNIOSEK 2.5. Dla dowolnych podziałów $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ wielokostki F na kostki właściwe i dowolnej kostki $C \in \text{Box}(X)$, jeżeli $\text{Int}(\mathcal{F}, C) = n$, to podział $\mathcal{G}$ zawiera co najmniej $|n|$ kostek z podziału prostego $\mathcal{C}_C$.

Jeżeli $\mathcal{C}$ jest podziałem prostym d -kostki X na kostki właściwe oraz $A, B \in \mathcal{C}$, to liczbę $d(A, B) = |\{i \in [d] : A_i \neq B_i\}|$ nazywamy *odległością* między kostkami A i B . Niepusty zbiór $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ nazywamy *składnikiem prostym* podziału $\mathcal{F}$ (Rysunek 5).



Rys. 5. Podziały proste i składniki proste.

WNIOSEK 2.6. Jeżeli $\mathcal{F}$ jest podziałem minimalnym d -kostki X , to $\text{Int}(\mathcal{F}, C) = 0$ dla każdej kostki $C \in \text{Box}(X) \setminus \{X\}$. W szczególności, dla każdej kostki $C \in \text{Box}(X)$ liczba $|\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_C|$ jest parzysta. Co więcej, jeżeli $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ jest składnikiem prostym podziału $\mathcal{F}$, to $\mathcal{F} \cap \mathcal{C} = \{A^1, B^1, \dots, A^n, B^n\}$, gdzie dla każdego $i \in [n]$ odległość $d(A^i, B^i)$ jest liczbą nieparzystą.

WNIOSEK 2.7. Niech $\mathcal{F}$ będzie podziałem minimalnym d -kostki X . Jeżeli $d > 0$ jest liczbą parzystą, a $\mathcal{F} \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$ jest składnikiem prostym podziału $\mathcal{F}$, to $d(A, B) \leq d - 1$.

Zauważmy, że dla d nieparzystego istnieją podziały minimalne $\mathcal{F}$ takie, że $d(A, B) = d$, gdzie $\{A, B\}$ jest składnikiem prostym podziału $\mathcal{F}$ (Rysunek 5).

Wnioski 2.4 i 2.5 dostarczają nowych informacji na temat zagadnienia wielokrotnego podziału wielokostki: jeżeli $\text{Ind}(\mathcal{F}, C) \neq 0$ dla pewnej kostki $C \in \text{box}(X)$, to w każdym podziale dychotomicznych $\mathcal{G}$ wielokostki $F = \bigcup \mathcal{F}$ na kostki właściwe znajdziemy co najmniej $|\text{Ind}(\mathcal{F}, C)| > 0$ kostek z podziału prostego $\mathcal{C}_C$. Co więcej, istnieją kostki $\{C^1, \dots, C^n\} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_C$ oraz $\{C^{m_1}, \dots, C^{m_n}\} \subset \mathcal{G} \cap \mathcal{C}_C$, gdzie $n = |\text{Ind}(\mathcal{F}, C)|$, takie, że dla każdego $i \in [n]$ odległość $d(C^i, C^{m_i})$ jest parzysta.

Rozdział szósty pracy [A1] kończy następujące kryterium równości wielokostek oparte na indeksie:

TWIERDZENIE 2.8 ([A1, Theorem 6.4]). *Niech F i G będą wielokostkami w d -kostce X . Wielokostki F i G są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{ind}(F, C) = \text{ind}(G, C)$ dla każdej kostki $C \subseteq X$.*

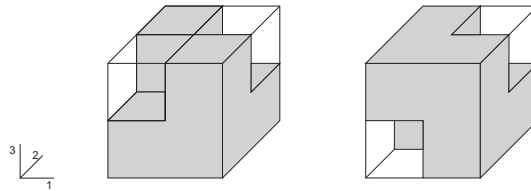
Na mocy Wniosku 2.6 indeks d -kostki X względem dowolnej kostki $C \in \text{box}(X)$ jest równy zero. Okazuje się, że d -kostki to nie jedyne wielokostki o tej własności. W rozdziale siódmym pracy [A1] opisano wielokostki $F \subset X$, $F \neq X$, dla których indeks względem dowolnej kostki jest również równy zero.

Niech $F \subseteq X$ będzie wielokostką, $\mathcal{F}$ jej podziałem dychotomicznym na kostki właściwe i niech

$$F^{(\varepsilon)} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A^\varepsilon,$$

gdzie, przypomnijmy, że $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^d$ oraz $A^\varepsilon = A_1^{\varepsilon_1} \times \dots \times A_d^{\varepsilon_d}$, przy czym $A_i^{\varepsilon_i} = A_i$ dla $\varepsilon_i = 0$ i $A_i^{\varepsilon_i} = X_i \setminus A_i$ dla $\varepsilon_i = 1$. Wielokostkę F nazywamy *symetryczną*, jeżeli istnieje $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^d \setminus \{0\}$ takie, że $F^{(\varepsilon)} = F$. Niech $i(C) = \{i \in [d] : C_i \neq X_i\}$ dla $C \in \text{Box}(X)$ oraz $\text{supp}(\varepsilon) = \{i \in [d] : \varepsilon_i = 1\}$. Głównym rezultatem rozdziału siódmego pracy [A1] jest następujące twierdzenie o indeksie wielokostek symetrycznych:

TWIERDZENIE 2.9 ([A1, Theorem 7.5]). *Niech $F \subseteq X$ będzie wielokostką w d -kostce X i niech $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^d \setminus \{0\}$. Jeżeli $F^{(\varepsilon)} = F$, to $\text{ind}(F, C) \equiv 0$ modulo 2 dla każdej kostki $C \in \text{Box}(X) \setminus \{X\}$. Jeżeli ponadto zbiór $i(C) \cap \text{supp}(\varepsilon)$ liczy nieparzystą liczbę elementów, to $\text{ind}(F, C) = 0$.*



Rys. 6. Wielokostki symetryczne.

Obie wielokostki przedstawione na Rysunku 6 są symetryczne. Dla wielokostki po lewej stronie zachodzi równość $F^{((1,1,0))} = F$, a dla wielokostki po prawej stronie mamy $G^{((1,1,1))} = G$.

W przypadku podziałów dychotomicznych wielokostki F na kostki właściwe, istotne z punktu widzenia zagadnień związanych z hipotezą Kellera jest wyznaczenie warunków, przy których wielokostka ma tylko jeden podział na kostki dychotomiczne. Wielokostkę F nazywamy *sztynną*, jeżeli ma tylko jeden podział na kostki wzajemnie dychotomiczne. Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest podziałem dychotomicznym sztywnej wielokostki F , to $\mathcal{F}$ może zawierać jedynie kostki właściwe. W szczególności, $\mathcal{F}$ nie może zawierać par bliźniaczych (to znaczy, par kostek $K, G \subset X$ takich, że $K_j = X_j \setminus G_j$ dla pewnego $j \in [d]$ oraz $K_i = G_i$ dla wszystkich $i \in [d] \setminus \{j\}$). W pracy [26], J. Lagarias i P. Shor postawili hipotezę dotyczącą sztywności układów kostek jednostkowych w przestrzeni $\mathbb{R}^d$, którą przedstawimy w języku wielokostek i ich podziałów dychotomicznych:

Hipoteza o sztywności (Lagarias, Shor) *Niech $\mathcal{F}$ będzie podziałem minimalnym d -kostki X takim, że każdy składnik prosty $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ podziału $\mathcal{F}$ liczy dokładnie dwa elementy. Dla dowolnych $K^1 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}^1, \dots, K^{2^{d-1}} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}^{2^{d-1}}$ wielokostka*

$$F = \bigcup_{k=1}^{2^{d-1}} K^i$$

jest sztywna.

Hipoteza o sztywności została pozytywnie rozstrzygnięta w rozdziale ósmym pracy [A1]. Poniższe twierdzenie o sztywności wielokostek uzyskane w [A1] jest znacznie ogólniejsze niż hipoteza Lagarias i Shora.

Twierdzenie 2.10 ([A1, Theorem 8.2]). *Niech $\mathcal{F}$ będzie podziałem dychotomicznym wielokostki $F \subset X$ na kostki właściwe. Jeżeli*

$$|\text{Ind}(\mathcal{F}, C)| = |\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_C|$$

dla każdego $C \in \text{box}(X)$, to wielokostka F jest sztywna.

W dowodzie Twierdzenia 2.10 rozpatrujemy w miejsce podziału $\mathcal{F}$ nową rodzinę kostek wzajemnie dychotomicznych $\mathcal{E}(\mathcal{F}) = \{\check{K} : K \in \mathcal{F}\}$. Kostki *równodopełnicze* $\check{K}$, $\check{K} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$, posiadają wszystkie własności kostek $\hat{K}$, $\hat{K} \in \hat{\mathcal{F}}$. Dodatkowo mają one własności, które nie przysługują kostkom z rodziny $\hat{\mathcal{F}}$. Najważniejszą z nich, w kontekście dowodu Twierdzenia 2.10, jest własność mówiąca, że jeżeli $\check{G} \subset \bigcup \mathcal{E}(\mathcal{F})$, $\mathcal{D}$ jest podziałem prostym d -kostki $\check{G}$ oraz $\check{K} \cap \check{G}, \check{H} \cap \check{G} \in \mathcal{D}$ dla pewnych dwóch kostek $\check{K}, \check{H} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$, to istnieje podział prosty $\mathcal{C}$ d -kostki X taki, że $K, H \in \mathcal{C}$. Kostki równodopełnicze są bardzo efektywnym narzędziem służącym do badania struktury podziałów dychotomicznych. W rozdziale dziesiątym pracy [A1] wprowadzona została jeszcze ogólniejsza struktura związana z kostkami równodopełniczymi.

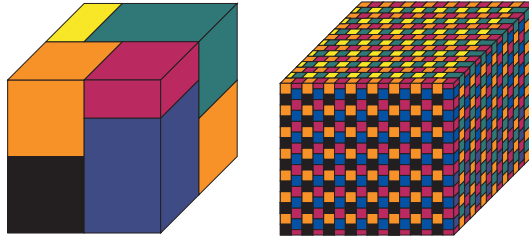
Rozpatrując wzajemne położenie dwóch kostek dychotomicznych $K = K_1 \times \dots \times K_d$ i $G = G_1 \times \dots \times G_d$ zawartych w d -kostce X istotne są jedynie trzy wzajemne relacje zbiorów K_i i G_i dla każdego $i \in [d]$: $K_i = G_i$, $K_i = X_i \setminus G_i$ oraz $K_i \notin \{G_i, X_i \setminus G_i\}$, przy czym $K_j = X_j \setminus G_j$ dla pewnego $j \in [d]$. Często nie jest ważne jaka jest natura zbiorów K_i oraz G_i , a nawet sam fakt, że są to w ogóle zbiory. Możemy zatem w miejsce napisów $K = K_1 \times \dots \times K_d$, $G = G_1 \times \dots \times G_d$ rozpatrywać ciągi $k = k_1 \dots k_d$, $g = g_1 \dots g_d$, gdzie symbole $k_1, \dots, k_d, g_1, \dots, g_d$ są elementami pewnego ustalonego zbioru S , na którym określona jest bijekcja $s \rightarrow s'$ taka, że $s \neq s'$ oraz $(s')' = s$ dla $s \in S$. Ciągi k i g będą kodowały kostki dychotomiczne K i G , jeżeli $k_i = g_i$ o ile $K_i = G_i$, $k_i = g'_i$, jeżeli $K_i = X_i \setminus G_i$ oraz $k_i \notin \{g_i, g'_i\}$, jeżeli $K_i \notin \{G_i, X_i \setminus G_i\}$. W miejsce podziałów dychotomicznych wielokostek możemy zatem rozpatrywać zbiory złożone ze słów zapisanych za pomocą liter z pewnego alfabetu.

Formalnie *alfabetem* nazywamy zbiór S złożony z dowolnych obiektów. Elementy alfabetu nazywamy *literami*. *Dopełnieniem* w alfabecie S nazywamy dowolną bijekcję $s \rightarrow s'$ taką, że $s \neq s'$ oraz $(s')' = s$ dla $s \in S$. *Słowem* długości d nazywamy dowolny ciąg $s_1 \dots s_d$ liter alfabetu S . Zbiór wszystkich słów długości d oznaczamy przez S^d . Dwa słowa $v, w \in S^d$ są *dychotomiczne*, jeżeli $v_j = w'_j$ dla pewnego $j \in [d]$. Zbiór $V \subset S^d$ nazywamy *kodelem* (*wielokostką*) lub *genomem* (*wielokostką*), jeżeli każde dwa słowa w zbiorze V są dychotomiczne.

Niech X będzie d -kostką. Dla każdego $i \in [d]$ niech funkcja $f_i: S \rightarrow \text{box}(X_i)$ będzie taka, że $f_i(s') = X_i \setminus f_i(s)$ i niech funkcja $f: S^d \rightarrow \text{box}(X)$ będzie dana wzorem

$$f(s_1 \dots s_d) = f_1(s_1) \times \dots \times f_d(s_d). \quad (2.6)$$

O każdej funkcji zadanej wzorem (2.6) powiemy, że *zachowuje dopełniczość*. Jeżeli $V \subseteq S^d$, a f zachowuje dopełniczość, to zbiór $f(V) = \{f(v): v \in V\}$ nazywamy *realizacją* zbioru V . Realizacja jest *dokładna*, jeżeli $v_i \notin \{w_i, w'_i\}$ implikuje $f_i(v_i) \notin \{f_i(w_i), f_i(w'_i)\}$. Jeżeli $V \subset S^d$ jest kodelem, to realizacja $f(V)$ jest podziałem dychotomicznym wielokostki $\bigcup f(V)$ na kostki właściwe $f(v)$, $v \in V$. Jak pokazano na Rysunku 7 realizacje kodu V mogą być istotnie różne.



Rys. 7 Dwie realizacje (dokładne) kodu $V = \{aaa, a'a'a', ba'a, b'a'a, aba', ab'a', a'ab, a'ab'\}$. W realizacji $f(V)$ po lewej stronie, funkcja $f: \{a, a', b, b'\}^3 \rightarrow \text{box}([0, 1]^3)$ zachowująca dopełniczość jest określona następująco:

$$f_i(a) = [0, 1/2) \text{ dla } i = 1, 2, f_3(a) = [1/2, 1], f_1(b) = [0, 1/4) \text{ oraz } f_i(b) = [0, 3/4) \text{ dla } i = 2, 3.$$

Rozpatrywanie kodów wielokostek w miejsce podziałów dychotomicznych pozwalała na badanie struktury układów kostek wzajemnie dychotomicznych w pełnej ogólności, bez potrzeby

odwoływania się do konkretnej realizacji. Kod wielokostki jest zbiorem słów napisanych w abstrakcyjnym alfabecie S , który może być interpretowany wedle własnych potrzeb. Określając odległość między słowami $v, w \in S^d$ wzorem $d(v, w) = |\{i \in [d] : v_i \neq w_i\}|$ możemy traktować zbiór V jak kod, w którym dla dowolnych dwóch słów $v, w \in V$ zachodzi nierówność $d(v, w) \geq 1$.

K. Corrádi i S. Szabó kodowali układy kostek jednostkowych w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ za pomocą słów zapisanych w alfabecie $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ([6]). Słowa w zbiorze S^d są tam traktowane jako wierzchołki grafu, w którym dwa wierzchołki $v, w \in S^d$ są połączone, jeżeli istnieją $i, j \in [d]$, $i \neq j$, takie, że $v_i \neq w_i$ oraz $v_j \neq w_j$, a ponadto $|v_i - w_i| = 2$ lub $|v_j - w_j| = 2$. Taki graf nazywamy *d-wymiarowym grafem Kellera*. Zwróćmy uwagę, że przyjmując w alfabecie S relację dopełniczości $0' = 2$ oraz $1' = 3$, każda klika w grafie Kellera staje się kodem wielokostki, to znaczy, zbiorem słów długości d napisanych w alfabecie S , w którym każde dwa słowa są dychotomiczne.

W znacznie szerszym zakresie kody kostek jednostkowych w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ rozpatrywane są przez Lagarias i Shora w dwóch pracach [25, 26]. W obu pracach bardzo istotną rolę odgrywają dwa szczególne kody $V, W \subset \{0, 1, 2, 3\}^4$ o tej własności, że układy kostek jednostkowych w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ‘zrealizowane’ na podstawie kodów V i W wyznaczają ten sam podzbiór w $\mathbb{R}^4$. (Kody te stanowią podstawę konstrukcji kontrprzykładów dla hipotezy Kellera.) Kody V i W mają tę własność, że dla każdej funkcji f zachowującej dopełniczość zachodzi równość $\bigcup f(V) = \bigcup f(W)$. Takie kody są interesujące ze względu na ich związek z zagadnieniem wielokrotnego podziału wielokostki $F = \bigcup f(V)$.

Niech S będzie alfabetem z dopełnieniem. Dwa kody $V, W \subseteq S^d$ są *równoważne*, jeżeli $\bigcup f(V) = \bigcup f(W)$ dla każdej funkcji f zachowującej dopełniczość. Zauważmy, że jeżeli kody $V, W \subseteq S^d$ są równoważne, to $|V| = |W|$. Mówimy, że słowo $w \in S^d$ jest *nakryte* przez zbiór $V \subseteq S^d$, co zapisujemy $w \sqsubseteq V$, jeżeli $f(w) \subseteq \bigcup f(V)$ dla każdej funkcji f zachowującej dopełniczość. Jeżeli $W \subseteq S^d$ oraz $w \sqsubseteq V$ dla każdego $w \in W$, to mówimy, że zbiór W jest *nakryty* przez zbiór V co zapisujemy $W \sqsubseteq V$. Równoważność dwóch kodów możemy zatem wyrazić za pomocą relacji nakrywania: *kody $V, W \subseteq S^d$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $V \sqsubseteq W$ oraz $W \sqsubseteq V$.*

W rozdziale dziesiątym pracy [A1] badane są własności kodów, ich realizacji oraz relacji nakrywania. Poniżej przedstawię główne rezultaty uzyskane w tamtym rozdziale.

Niech S będzie alfabetem z dopełnieniem. Do zbioru S dołączymy specjalną literę $*$. Zbiór $S \cup \{*\}$ oznaczmy przez $*S$. Wyjątkowość litery $*$ polega na tym, że dla dowolnej funkcji $f = f_1 \times \cdots \times f_d$ zachowującej dopełniczość, dowolnej d -kostki $X = X_1 \times \cdots \times X_d$ i każdego $i \in [d]$ zawsze zachodzi równość $f_i(*) = X_i$, podczas gdy $f_i(s) \in \text{box}(X_i)$ dla każdego $s \in S$.

Niech

$$ES = \{B \subset S : |\{s, s'\} \cap B| = 1 \text{ dla } s \in S\},$$

$$Es = \{B \in ES : s \in B\} \text{ oraz } E* = ES.$$

*Realizacją równodopełniczą słowa $v \in (*S)^d$ nazywamy kostkę $\check{v} = Ev_1 \times \cdots \times Ev_d$ zawartą w d -kostce $(ES)^d = ES \times \cdots \times ES$. Realizacją równodopełniczą kodu V nazywamy zbiór $E(V) =$*

$\{\check{v} : v \in V\}$. Kostki realizacji $E(V)$ mają dokładnie te same własności co wcześniej wspomniane kostki realizacji $\mathcal{E}(\mathcal{F})$. W szczególności, jeżeli alfabet S jest skończony, $s_1, \dots, s_n \in S$ oraz $s_i \notin \{s_j, s'_j\}$ dla każdego $i \neq j$, wtedy

$$|Es_1 \cap \dots \cap Es_n| = (1/2^n)|ES|. \quad (2.7)$$

Na mocy (2.7), jeżeli $V \subseteq S^d$, to kostki rodziny $E(V)$ są tej samej liczności: $|Ev_i| = (1/2)|ES|$ dla każdego $i \in [d]$, a zatem $|\check{v}| = (1/2^d)|ES|^d$ dla $\check{v} \in E(V)$. Wynika stąd, że kostki $\check{v}, \check{w} \subset (ES)^d$ są dychotomiczne wtedy i tylko wtedy, gdy $\check{v} \cap \check{w} = \emptyset$. (Realizacja równodopełnicza kodów jest wykorzystana w pracy [A4] dotyczącej hipotezy Kellera w wymiarze siedem.)

Niech $v, w \in S^d$ i niech

$$g(v, w) = \prod_{i=1}^n (2[v_i = w_i] + [v_i \notin \{w_i, w'_i\}]),$$

gdzie $[p] = 1$, jeżeli zdanie p jest prawdziwe oraz $[p] = 0$, jeżeli p jest fałszywe. Rozstrzygnięcie czy kody V i W są równoważne w oparciu o definicję równoważności kodów lub definicję relacji nakrywania może być trudne. W rozdziale dziesiątym pracy [A1] podajemy wygodne kryteria rozstrzygające czy słowo v jest nakryte przez kod V .

Twierdzenie 2.11 ([A1, Theorem 10.4]). *Niech $v \in S^d$ i niech $V \subseteq S^d$ będzie kodem. Wtedy*

$$\check{w} \subseteq \bigcup E(V) \Leftrightarrow w \sqsubseteq V \Leftrightarrow \sum_{v \in V} g(v, w) = 2^d. \quad (2.8)$$

Twierdzenie 2.11 dostarcza dwóch kryteriów równoważności kodów, które sformułujemy w poniższych dwóch wnioskach.

WNIOSEK 2.12. *Kody $V, W \subseteq S^d$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigcup E(V) = \bigcup E(W)$.*

WNIOSEK 2.13. *Kody $V, W \subseteq S^d$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{v \in V} g(v, w) = 2^d$ dla każdego $w \in W$ oraz $\sum_{w \in W} g(w, v) = 2^d$ dla każdego $v \in V$.*

Pierwsze z przedstawionych wyżej kryteriów jest użyteczne w rozważaniach geometrycznych, natomiast drugie jest przydatne w obliczeniach komputerowych. Oba kryteria są wykorzystane w istotny sposób w pracy [A4].

Kolejne kryterium równoważności kodów ma charakter algebraiczny i nawiązuje do rozdziału dziewiątego pracy [A1]. Niech S_+ oraz S_- będą rozłącznymi podzbiorami alfabetu S z dopełnieniem takimi, że $S_- = \{s' : s \in S_+\}$ i $S = S_+ \cup S_-$. Niech $\mathbb{Z}[*S]$ będzie pierścieniem generowanym przez zbiór $*S = S \cup \{*\}$ i niech R będzie pierścieniem otrzymanym z $\mathbb{Z}[*S]$ przez identyfikację każdego elementu $s \in S_-$ z elementem $* - s'$. Wtedy każde słowo $v \in S^d$ może zostać jednoznacznie zapisane w postaci formalnej sumy v_+ słów ze zbioru $(*S_+)^d$, gdzie

$*S_+ = S_+ \cup \{*\}$. Na przykład, po identyfikacji liter b' i a' z wyrażeniami $* - b$ i $* - a$, odpowiednio, słowo $v = ab'a'$ jest identyfikowane z wyrażeniem postaci $a(* - b)(* - a) \in R$, które następnie identyfikujemy z formalną sumą $v_+ = a** - a*a - ab* + aba$ będącą z kolei elementem modułu wolnego $\mathbb{Z}*S_+ \subset R$. Jeżeli $V \subset S^d$, to $V^\oplus = \sum_{v \in V} v_+ \in \mathbb{Z}*S_+$. Na przykład, dla $V = \{aa'b, aab\}$ mamy $a(* - a)b + aab = a*b - aab + aab = a*b$, a zatem $V^\oplus = a*b$. Zachodzi następujące kryterium równoważności kodów.

Twierdzenie 2.14 ([A1, Theorem 10.1]). *Kody $V, W \subseteq S^d$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $W^\oplus = V^\oplus$.*

Podobnie jak w przypadku podziałów dychotomicznych $\mathcal{F}$ wielokostek $F \subseteq X$, definiujemy indeks kodu $W \subseteq S^d$. Niech $u \in (*S)^d$ i niech funkcja $\phi_u: S^d \rightarrow \mathbb{R}$ dana będzie wzorem

$$\phi_u(w) = \prod_{i=1}^d ([u_i = w_i] - [u_i = w'_i] + [u_i = *]).$$

Indeksem kodu W względem słowa u nazywamy liczbę

$$\text{Ind}(W, u) = \sum_{w \in W} \phi_u(w).$$

Zachodzi twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 2.8:

Twierdzenie 2.15 ([A1, Theorem 10.2]). *Kody $V, W \subseteq S^d$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{Ind}(V, u) = \text{Ind}(W, u)$$

*dla każdego $u \in (*S)^d$.*

Dowód Twierdzenia 2.10 pokazuje, że jeżeli $\check{G} \subset \bigcup \mathcal{E}(\mathcal{F})$ oraz $\check{G} \notin \mathcal{E}(\mathcal{F})$, to istnieją kostki $K, H \in \mathcal{F}$ takie, że $K_i = H_i$ lub $K_i = X_i \setminus H_i$ dla każdego $i \in [d]$, a ponadto liczba $|\{i \in [d] : K_i = X_i \setminus H_i\}|$ jest nieparzysta. Własność tę możemy opisać także za pomocą indeksu kodu i relacji nakrywania. W tym celu, na wzór podziału prostego, definiujemy *kod (podziałowy) prosty* $C \subset (*S)^d$, w którym każde dwa słowa są dychotomiczne, dla dowolnych $v, w \in C$ i dowolnego $i \in [d]$ zachodzi równość $v_i = w_i$ lub $v_i = w'_i$ o ile $w_i \neq *$ oraz każda realizacja $f(C)$ jest podziałem dychotomicznym d -kostki X . Jeżeli W jest kodem, a C kodem prostym takim, że $C \cap W \neq \emptyset$, to zbiór $C \cap W$ nazywamy *składnikiem prostym* kodu W . Niech $C_w \subset S^d$ będzie kodem prostym takim, że $w \in C_w$. Poniższe twierdzenie podaje istotną własność kodów nakrywających słowa ze zbioru S^d .

Twierdzenie 2.16 ([A1, Theorem 10.6]). *Jeżeli $W \subseteq S^d$ jest kodem, a $q \in S^d$ słowem takim, że $q \sqsubseteq W$ oraz $q \notin W$, to istnieje słowo $w \in W$ takie, że $\text{Ind}(W, w) < |C_w \cap W|$.*

Z Twierdzenia 2.16 wynika, że pewien składnik prosty $C_w \cap W$ każdego kodu $W \subseteq S^d$ nakrywającego co najmniej jedno słowo nie należące do W zawiera dwa słowa $v = v_1 \dots v_d$ i $u = u_1 \dots u_d$ takie, że

$$|\{i \in [d] : v_i = u'_i\}| \equiv 1 \pmod{2}. \quad (2.9)$$

Własność (2.9) stanowi podstawę obliczeń w pracy [A4], w której rozpatrywana jest hipoteza Kellera w wymiarze siedem.

Zachodzą analogiczne twierdzenia dotyczące indeksów kodów wielokostek do twierdzeń dotyczących indeksów podziałów dychotomicznych wielokostek. Na przykład, jeżeli kod $V \subseteq S^d$ liczy 2^d słów, czyli jest to kod podziału minimalnego, to $\text{Ind}(V, w) = 0$ dla każdego $w \in S^d$. Oznacza to, że każdy składnik prosty $C \cap V$ kodu podziałowego $V \subseteq S^d$ zawiera parzyście wiele słów.

Szczególnie ciekawie przedstawia się możliwość rekonstrukcji kodu na podstawie jego fragmentu. Powiemy, że kod W jest *szttywny*, jeżeli nie istnieje kod wielokostki V równoważny z W i taki, że $V \neq W$. Z Twierdzenia 2.10 wynika, że jeżeli w każdym składniku prostym $C \cap W$ kodu W odległość $d(v, u) = |\{i \in [d] : v_i = u'_i\}|$ między dwoma dowolnymi słowami $v, u \in C \cap W$ jest liczbą parzystą, to kod jest *szttywny*. Można zatem w każdym kodzie W wyróżnić (być może na wiele sposobów) taki jego podzbiór W^+ , że każdy kod V równoważny z W zawierający zbiór słów W^+ jest identyczny z W . Wystarczy w tym celu zaopatrzyć każde słowo $v \in S^d$ w znak. Aby to zrobić, tak jak poprzednio dzielimy alfabet S na dwie rozłączne części S_- oraz S_+ , gdzie $S_- = \{s' : s \in S_+\}$. Niech $\text{sgn}(s) = +1$ dla każdego $s \in S_+$ oraz $\text{sgn}(s) = -1$ dla każdego $s \in S_-$. Jeżeli $v \in S^d$, to liczbę $\sigma(v) = \text{sgn}(v_1) \cdots \text{sgn}(v_d)$ nazywamy *znakiem* słowa v . Kod W rozpada się na dwie części:

$$W^+ = \{w \in W : \sigma(w) = +1\} \quad \text{oraz} \quad W^- = \{w \in W : \sigma(w) = -1\}.$$

Kody W^+ i W^- określają kod W w następującym sensie:

Twierdzenie 2.17 ([A1, Theorem 10.7]). *Jeżeli $V, W \subseteq S^d$ są kodami równoważnymi oraz $W^+ \subseteq V$, to $V = W$.*

Dowód tego twierdzenia jest natychmiastowy: niech $v \in V \setminus W^+$. Wtedy $v \subseteq W^-$. Jeżeli $v \notin W^-$, to na mocy Twierdzenia 2.16 zbiór W^- zawiera dwa słowa o przeciwnych znakach, co jest sprzeczne z definicją kodu W^- .

Twierdzenie 2.17 mówi, że każdy kod $W \subset S^d$ jest zdeterminowany przez swoje *szttywne* części W^+ i W^- . Oznacza to, że jeżeli znane są kody W^+ lub W^- oraz znana jest wielokostka $\bigcup E(W)$, to możemy, przynajmniej teoretycznie, odtworzyć cały kod W . W szczególności, dowolny kod $W \subseteq S^d$ podziału minimalnego, to znaczy taki, że $|W| = 2^d$, jest całkowicie zdeterminowany przez kody W^+ i W^- . W tym wypadku nie musimy znać wielokostki $\bigcup E(W)$. Wystarczy uzupełnić W^+ lub W^- do kodu liczącego 2^d słów. Wtedy, wobec Twierdzenia 2.17, zawsze otrzymamy kod W ([A1, Theorem 11.3]).

Na zakończenie tej części referatu poświęconej pracy [A1], przedstawię rozkład teselacji 2-okresowej przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową na dwie części *szttywne*. Teselację $[0, 1)^d + T$

przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową nazywamy 2-okresową, jeżeli $T + 2z = T$ dla każdego $z \in \mathbb{Z}^d$. Niech $S = [-1, 1)$ będzie alfabetem z dopełnieniem określonym w następujący sposób: s i s' są dopełnicze wtedy i tylko wtedy, gdy $|s - s'| = 1$. Słowa $t \in S^d$ zapiszemy w postaci wektorów $t = (t_1, \dots, t_d)$. Jak pokazano na początku referatu, podział $\mathcal{F} = \{([0, 1)^d + t) \cap [0, 1]^d \neq \emptyset : t \in T\}$ jest podziałem minimalnym kostki $[0, 1]^d$. Wobec tego zbiór $W = \{t \in T : ([0, 1)^d + t) \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\}$ jest kodem podziału $\mathcal{F}$. Niech

$$T^+ = W^+ + 2\mathbb{Z}^d \quad \text{oraz} \quad T^- = W^- + 2\mathbb{Z}^d.$$

Poniższe twierdzenie, które jest zarazem ostatnim twierdzeniem pracy [A1], pokazuje, że podobnie jak na szachownicy pola białe jednoznacznie wyznaczają pola czarne i na odwrót, w dowolnej teselacji 2-okresowej rodziny kostek $[0, 1)^d + T^+$ i $[0, 1)^d + T^-$ określają się wzajemnie.

Twierdzenie 2.18 ([A1, Theorem 11.6]). *Niech $[0, 1)^d + T$ będzie teselacją 2-okresową. Jeżeli $([0, 1)^d + z) \cap ([0, 1)^d + t) = \emptyset$ dla każdego $t \in T^+$, to $z \in T^-$.*

3 Teselacje przestrzeni $\mathbb{R}^d$ klastrem kostek

W tej części omówiona zostanie praca [A2].

Niech $[0, 1)^d + P$, $P \subset \mathbb{R}^d$, będzie rodziną kostek, w której każde dwie kostki spełniają warunek Kellera (1.1). Zbiór $C = \bigcup([0, 1)^d + P)$ nazywamy *klastrem (kostek jednostkowych)*. Teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^d$ klastrem C nazywamy zbiór $C + T = \{C + t : t \in T\}$, gdzie $T \subset \mathbb{R}^d$, $(C + t) \cap (C + t') = \emptyset$ dla dowolnych $t, t' \in T$ oraz $\bigcup(C + T) = \mathbb{R}^d$.

Zagadnienie istnienia teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ (lub jej podzbioru) za pomocą klastrów kostek jednostkowych, w których na ogół zakłada się, że $P \subset \mathbb{Z}^d$, jest przedmiotem intensywnych badań ([14, 16, 36, 37]). O ile klasyczne zagadnienia z zakresu teselacji klastrami koncentrują się wokół pytania czy teselacja danym klastrem w ogóle istnieje, to w pracy [A2] rozważany jest pewien problem dotyczący struktury teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ przy użyciu klastra kostek jednostkowych.

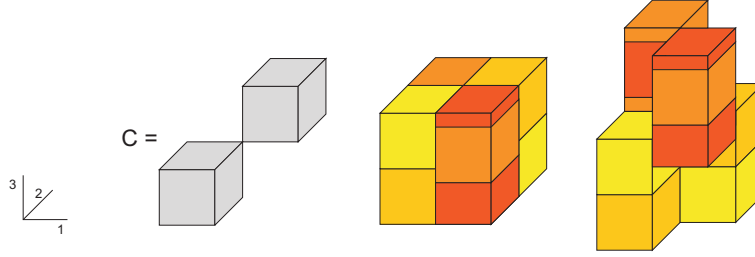
Jeżeli G jest podgrupą grupy $\mathbb{Z}^d$, to powiemy, że teselacja $[0, 1)^d + T$ jest *G-niezmiennicza*, jeżeli $T + g = T$ dla każdego $g \in G$. Niech $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$. Teselację $[0, 1)^d + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ nazywamy *$\mathbf{m}$ -okresową*, jeżeli jest ona *G-niezmiennicza* ze względu na działanie grupy $G = m_1\mathbb{Z} \times \dots \times m_d\mathbb{Z}$.

Głównym rezultatem pracy [A2] jest

Twierdzenie 3.1 ([A2, Theorem 1]). *Niech $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$, G będzie podgrupą grupy $\mathbb{Z}^d$ taką, że $m_1\mathbb{Z} \times \dots \times m_d\mathbb{Z} \subseteq G$ i niech $[0, 1)^d + T$ będzie teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^d$, która jest *G-niezmiennicza*. Ponadto, dla każdego $i \in [d]$ niech $G^i = G \cap \mathbb{Z}\mathbf{e}_i$, gdzie $\mathbf{e}_i$ jest i -tym elementem bazy standardowej oraz $\mu_i = |\mathbb{Z}/G^i|$. Wtedy dla każdego $t \in T$ liczba $|T \cap (t + \mathbb{Z}^d) \cap [0, m_1) \times \dots \times [0, m_d)|$ jest podzielna przez $\text{GCD}(\mu_1, \dots, \mu_d)|G/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times m_d\mathbb{Z}|$.*

(Niestety w sformułowaniu powyższego twierdzenia w pracy [A2], a także w jego opisie umieszczonym w abstrakcie, wkraśl się błąd: zamiast $\text{GCD}(\mu_1, \dots, \mu_d)|G/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times m_d\mathbb{Z}|$ jest $\text{GCD}(\mu_1, \dots, \mu_d)|G|$.)

Teselacja opisana w Twierdzeniu 3.1, która na mocy warunku $m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times m_d\mathbb{Z} \subseteq G$ jest $\mathbf{m}$ -okresowa, wyznacza jednocześnie teselację przestrzeni $\mathbb{R}^d$ klastrem kostek $C = \bigcup([0, 1)^d + G)$. Twierdzenie 3.1 wygodnie jest sformułować w równoważnej postaci dotyczącej teselacji płaskiego torusa. W tym celu określamy działanie *dodawania* $\oplus$ modulo $\mathbf{m}$: jeżeli $x, y \in [0, m_1) \times \cdots \times [0, m_d)$, to $x \oplus y = ((x_1 + y_1) \bmod m_1, \dots, (x_d + y_d) \bmod m_d)$. Kostkę $[0, m_1) \times \cdots \times [0, m_d)$ wraz z dodawaniem $\oplus$ nazywamy *torusem (płaskim)* i oznaczamy $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$. Kostką jednostkową w $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ nazywamy zbiór $[0, 1)^d \oplus t$, gdzie $t \in \mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$. Jeżeli $T \subset \mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ jest zbiorem takim, że dla dowolnych $t, t' \in T$ kostki $[0, 1)^d \oplus t$, $[0, 1)^d \oplus t'$ są rozłączne oraz $\bigcup([0, 1)^d \oplus T) = \mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$, to rodzinę $\mathcal{T} = \{[0, 1)^d \oplus t : t \in T\}$ nazywamy *teselacją torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ kostką jednostkową*. O zbiorze T mówimy, że *wyznacza teselację $\mathcal{T}$* . Teselacja $\mathbf{m}$ -okresowa przestrzeni $\mathbb{R}^d$ określa teselację torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ i na odwrót. Niech $\mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d = \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_d}$. Teselację torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ postaci $\mathcal{C} = \{[0, 1)^d \oplus t \oplus z : z \in \mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d\}$, gdzie $t \in \mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$, nazywamy *teselacją prostą*. Jeżeli $\mathcal{T} = [0, 1)^d \oplus T$ jest teselacją torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ kostką jednostkową, to *składnikiem prostym* zbioru T nazywamy każdy niepusty zbiór $T \cap (t \oplus \mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d)$, gdzie $t \in T$ (teselacja przedstawiona na Rysunku 8 ma dwa składniki proste: $T_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ oraz $T_2 = \{(1, 0, 3/8), (1, 0, 11/8), (0, 1, 3/8), (0, 1, 11/8)\}$). Jeżeli $T^1, \dots, T^k$ są wszystkimi składnikami prostymi zbioru T , to $T = T^1 \cup \cdots \cup T^k$ oraz dla każdego $i \in [k]$ istnieje $t^i \in T$ takie, że $T^i = T \cap (t^i \oplus \mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d)$. Teselację $\mathcal{T}$ możemy zatem przedstawić w postaci sumy jej *składników prostych*: $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cap \mathcal{C}^1 \cup \cdots \cup \mathcal{T} \cap \mathcal{C}^k$, gdzie $\mathcal{C}^i = \{[0, 1)^d \oplus t^i \oplus z : z \in \mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d\}$ oraz $\mathcal{T} \cap \mathcal{C}^i = \{[0, 1)^d \oplus t : t \in T^i\}$ dla $i \in [k]$.



Rys. 8. Teselacja $\mathcal{T} = [0, 1)^3 \oplus T$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{2}}^3$, $\mathbf{2} = (2, 2, 2)$, gdzie zbiór $T = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 3/8), (1, 0, 11/8), (0, 1, 3/8), (0, 1, 11/8)\}$ jest G -niezmienniczy ze względu na działanie grupy $G = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Jednocześnie jest to teselacja $\tilde{\mathcal{T}} = C \oplus R$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{2}}^3$ klastrem $C = \bigcup([0, 1)^3 \oplus G)$, gdzie $R = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 3/8), (1, 0, 11/8)\}$.

Niech G będzie podgrupą grupy $\mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d$ i niech $C_t = \bigcup\{[0, 1)^d \oplus t \oplus g : g \in G\}$, gdzie t jest dowolnym ustalonym elementem zbioru $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$. Jeżeli $\mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d/G = \{[g^1], \dots, [g^n]\}$, to zbiór $C_t \oplus \{g^1, \dots, g^n\}$ jest teselacją torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ klastrem C_t . Teselację $\mathcal{C} = C_t \oplus \{g^1, \dots, g^n\}$ nazywamy *prostą*. Przypuśćmy teraz, że zbiór T jest G -niezmienniczy, to znaczy, $T \oplus g = T$ dla każdego $g \in G$. Niech orbity elementów $p^1, \dots, p^n \in T$ będą podziałem zbioru T . Wtedy $\tilde{\mathcal{T}} = C \oplus \{p^1, \dots, p^n\}$ jest teselacją torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ klastrem $C = \bigcup([0, 1)^d \oplus G)$. Każdy niepusty zbiór $\tilde{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}$ nazywamy *składnikiem prostym* teselacji $\tilde{\mathcal{T}}$. Teselację $\tilde{\mathcal{T}}$ możemy zatem przedstawić, podobnie jak teselację $\mathcal{T}$, jako sumę jej składników prostych: $\tilde{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}^1 \cup \cdots \cup \tilde{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}^k$ (teselacja $\tilde{\mathcal{T}}$ przedstawiona na Rysunku 8 ma dwa składniki proste $\tilde{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}^1 = C \oplus P_1$, gdzie $P_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ oraz $\tilde{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}^2 = C \oplus P_2$, gdzie $P_2 = \{(1, 0, 3/8), (1, 0, 11/8)\}$).

W głównym twierdzeniu pracy [B4] wykazano, że liczba elementów w każdym składniku prostym $\mathcal{T} \cap \mathcal{C}$ teselacji $\mathcal{T}$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ kostką jednostkową ma postać

$$|\mathcal{T} \cap \mathcal{C}| = n_1 m_1 + \cdots + n_d m_d \quad (3.1)$$

dla pewnych $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Motywacją do napisania pracy [A2] było następujące pytanie: *czy prawdą jest, że jeżeli $|G \cap (\mathbb{Z}_{m_i} \mathbf{e}_i)| = 1$ dla każdego $i \in [d]$, to, na wzór składników prostych $\mathcal{T} \cap \mathcal{C}$ teselacji $\mathcal{T}$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ kostką jednostkową, licznosc każdego składnika prostego $\tilde{\mathcal{T}} \cap \tilde{\mathcal{C}}$ teselacji $\tilde{\mathcal{T}}$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ klastrem $C = \bigcup([0, 1]^d \oplus G)$ jest kombinacją liniową liczb $m_1, \dots, m_d$ o współczynnikach całkowitych nieujemnych?*

Twierdzenie 3.1 dla teselacji G -niezmienniczych torusa kostką jednostkową ma następującą postać:

Twierdzenie 3.2 ([A2, Theorem 3]). *Niech T będzie zbiorem wyznaczającym teselację torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ za pomocą kostek jednostkowych, G będzie podgrupą grupy $\mathbb{Z}_{\mathbf{m}}^d$ i niech $G^i = G \cap (\mathbb{Z}_{m_i} \mathbf{e}_i)$, gdzie $\mathbf{e}_i$ jest i -tym elementem bazy standardowej. Ponadto, niech $\mu_i = m_i/|G^i|$. Jeżeli zbiór T jest G -niezmienniczy, to liczba elementów każdego składnika prostego zbioru T jest podzielna przez $\text{GCD}(\mu_1, \dots, \mu_d)|G|$.*

Oba składniki proste teselacji $\mathcal{T}$ kostką jednostkową przedstawionej na Rysunku 8 zawierają po cztery kopie kostki jednostkowej, natomiast oba składniki proste teselacji $\tilde{\mathcal{T}}$ klastrem $C = \bigcup([0, 1]^3 \oplus G)$ zawierają po dwie kopie klastra C . Biorąc pod uwagę motywację jaką towarzyszyła powstaniu pracy [A2], Twierdzenie 3.2 jest w pełni satysfakcjonujące w przypadku, gdy $\mathbf{m} = (m, \dots, m)$. Wtedy, zakładając, że $|G^i| = 1$ dla każdego $i \in [d]$, liczba elementów każdego składnika prostego teselacji $\tilde{\mathcal{T}}$ jest krotnością liczby m . Tę samą własność, na mocy (3.1), mają składniki proste teselacji $\mathcal{T}$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ kostką jednostkową.

Niestety w ogólnym przypadku $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$, z Twierdzenia 3.2 nie wynika, że przy założeniu $|G^i| = 1$ dla każdego $i \in [d]$ liczba elementów dowolnego składnika prostego teselacji $\tilde{\mathcal{T}}$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ za pomocą klastra kostek C jest kombinacją liniową liczb $m_1, \dots, m_d$ o współczynnikach naturalnych. Próby dowodu poniższej hipotezy, jak na razie, nie powiodły się.

Hipoteza o teselacji G -niezmienniczej torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$. *Przy założeniach Twierdzenia 3.2, liczba elementów każdego składnika prostego zbioru T jest kombinacją liniową liczb $\mu_1|G|, \dots, \mu_d|G|$ o współczynnikach całkowitych i nieujemnych.*

Nietrudno pokazać, że jeżeli powyższa hipoteza jest prawdziwa, to wynika z niej hipoteza Minkowskiego. Twierdzenie 3.2 dowodzi hipotezy Minkowskiego w przypadku, gdy teselacja kratowa $[0, 1]^d + \Lambda$ ma tę własność, że istnieje liczba pierwsza p i liczba naturalna k takie, że $p^k \mathbf{e}_i \in \Lambda$ dla każdego $i \in [d]$. Fakt ten jest dowiedziony na zakończenie pracy [A2].

Jak wspomniano na początku referatu, Hajós poszukiwał bardziej geometrycznego dowodu hipotezy Minkowskiego niż ten, który jest konsekwencją jego twierdzenia o faktoryzacji grup abelowych. Wykorzystanie struktury składników prostych teselacji $\mathcal{T}$ (lub równoważnie, teselacji $\tilde{\mathcal{T}}$) jest próbą takiego geometrycznego dowodu hipotezy Minkowskiego (zob. też [23]).

4 Struktura teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$ kostką jednostkową

W tej części omówiona zostanie praca [A3].

Kostkę $B = B_1 \times \cdots \times B_d \subset \mathbb{R}^d$ nazywamy *blokiem*, jeżeli istnieje rodzina kostek jednostkowych $[0, 1]^d + S$ taka, że $\bigcup([0, 1]^d + S) = B$ oraz każde dwie kostki rodziny $[0, 1]^d + S$ spełniają warunek Kellera (1.1). Motywacją do napisania pracy [A3] było pytanie: *czy każdą teselację $[0, 1]^d + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową można podzielić na skończenie wiele wzajemnie rozłącznych bloków $B^1, \dots, B^m$, gdzie $m \geq 2$, w ten sposób, że dla każdego $t \in T$ istnieje $i \in [m]$ takie, że $[0, 1]^d + t \subseteq B^i$?* Wiadomo, że każdą teselację przestrzeni $\mathbb{R}^3$ można podzielić na pięć bloków, co zostało pokazane przez M. Łysakowską i K. Przesławskiego w pracy [28].

W pracy [A3] pokazano, że już w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ można wskazać teselację kostką jednostkową, której w żaden sposób nie można podzielić na skończenie wiele bloków. W rozdziale drugim pracy [A3] podajemy konstrukcję teselacji $[0, 1]^4 + T$, dla której dowodzimy, że jedyną rodziną wzajemnie rozłącznych bloków taką, że każda kostka teselacji $[0, 1]^4 + T$ zawiera się dokładnie w jednym bloku, jest rodzina złożona z jednego bloku. W oparciu o teselację $[0, 1]^4 + T$, dla dowolnego $d \geq 5$ nietrudno skonstruować teselację $[0, 1]^d + T'$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$, której nie można podzielić na skończenie wielu bloków. Konstrukcja taka jest podana na zakończenie pracy [A3]. Przykład teselacji z rozdziału drugiego pracy [A3] wskazuje na pewien rodzaj innego rozkładu teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową niż wyżej opisany rozkład na bloki. Począwszy od wymiaru $d = 4$ można rozważać rozkład teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową na skończenie wiele bloków oraz skończenie wiele zbiorów, które nie są wprawdzie blokami ale są sumą pewnej liczby bloków. W ostatnim rozdziale pracy [A3] przedstawiony jest taki rozkład dla teselacji opisanej w rozdziale drugim tej pracy.

W rozdziale trzecim pracy [A3] podajemy nowy dowód twierdzenia orzekającego, że każdą teselację przestrzeni $\mathbb{R}^3$ kostką jednostkową można podzielić na pięć bloków. Pierwotny dowód tego twierdzenia zamieszczony w pracy [28], odwołuje się do istnienia w każdej teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zbiorów kostek postaci $\{[0, 1]^3 + k\mathbf{e}_i + x : k \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\mathbf{e}_i$ jest i -tym elementem bazy standardowej, a $x \in \mathbb{R}^3$. Dowód ten w istotny sposób wykorzystuje zatem strukturalne własności teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^3$ kostką jednostkową. Natomiast dowód przedstawiony w [A3] jest całkowicie oparty na znajomości struktury teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^2$ kostką jednostkową. Obrazowo rzecz ujmując, wykonujemy ‘tomografię’ teselacji $[0, 1]^3 + T$ za pomocą rodziny płaszczyzn $\pi_x = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{x\}$ dla $x \in \mathbb{R}$ (zob. też [13]). Rodzinę kostek $\pi_x \cap ([0, 1]^3 + T) = \{\pi_x \cap ([0, 1]^3 + t) \neq \emptyset : t \in T\}$ można utożsamić z teselacją płaszczyzny kwadratem jednostkowym $[0, 1]^2$. Struktura takiej teselacji jest szczególnie prosta. Kolumny kwadratów w teselacji płaszczyzny mogą być ułożone pionowo, tak jak jest to widoczne na Rysunku 9, lub poziomo. W czasie przesuwania punktu x wzdłuż trzeciej osi, rejestrujemy zmiany orientacji kolumn w teselacji $\pi_x \cap ([0, 1]^3 + T)$ z pionowej na poziomą lub odwrotnie. Te zmiany pozwalają ustalić blokową strukturę teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^3$ kostką jednostkową.

5 Hipoteza Kellera w $\mathbb{R}^7$

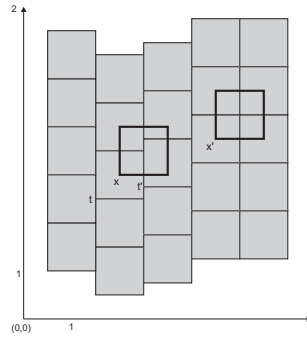
W tej części omówiona zostanie praca [A4].

Przypomnijmy, że hipoteza Kellera głosi, że każda teselacja przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową zawiera dwie kostki bliźniacze. Jest ona prawdziwa dla $d \leq 6$ (Perron [34]) i fałszywa dla $d \geq 8$ (Lagarias i Shor [25], Mackey [29]). Dla $d = 7$ hipoteza Kellera jest nadal otwarta.

Niech $[0, 1]^d + T$ będzie teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową, $x \in \mathbb{R}^d$, $i \in [d]$ i niech

$$L(T, x, i) = \{t_i : ([0, 1]^d + t) \cap ([0, 1]^d + x) \neq \emptyset \text{ oraz } t_i \leq x_i\},$$

gdzie t_i oznacza i -tą współrzędną wektora $t \in T$. Nietrudno pokazać, że $|L(T, x, i)| \leq 2^{d-1}$.



Rys. 9. Fragment teselacji $[0, 1]^2 + T$ płaszczyzny. Liczba $|L(T, x, i)|$ zależy od położenia punktu $x \in \mathbb{R}^2$. Dla punktu x mamy $|L(T, x, 1)| = 1$ oraz $|L(T, x, 2)| = 2$, podczas gdy dla x' mamy $|L(T, x', 1)| = |L(T, x', 2)| = 1$.

Ponadto, $r^-(T) = 1$ oraz $r^+(T) = 2$.

Niech

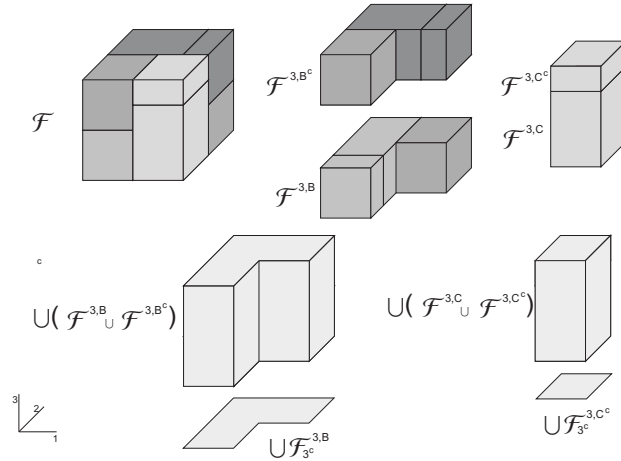
$$r^-(T) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{1 \leq i \leq d} |L(T, x, i)| \quad \text{oraz} \quad r^+(T) = \max_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{1 \leq i \leq d} |L(T, x, i)|.$$

Przypomnijmy, że d -wymiarowym grafem Kellera nazywamy graf określony na zbiorze wierzchołków $\{0, 1, 2, 3\}^d$, przy czym dwa wierzchołki v, w są połączone, jeżeli istnieją $i, j \in [d]$, $i \neq j$, takie, że $v_i \neq w_i$ oraz $v_j \neq w_j$, a ponadto $|v_i - w_i| = 2$ lub $|v_j - w_j| = 2$. Hipoteza Kellera dla teselacji $[0, 1]^d + T$, gdzie $T \subset a + \mathbb{Z}^d \cup b + \mathbb{Z}^d$, przy czym wektory $a, b \in \mathbb{Z}^d$ są takie, że $a_i \neq b_i$ dla każdego $i \in [d]$, jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy każda klika w d -wymiarowym grafie Kellera zawiera mniej niż 2^d wierzchołków ([6]). W 2010 roku J. Debroni, J.D Eblen, M.A. Langston, W. Myrvold, P. Shor oraz D. Weerapurage wyliczyli, przy użyciu superkomputera Cray XT5 Kraken, że maksymalna klika w siedmiowymiarowym grafie Kellera zawiera 124 wierzchołki. Wynika stąd, że hipoteza Kellera jest prawdziwa dla każdej teselacji $[0, 1]^7 + T$, gdzie $T \subset a + \mathbb{Z}^7 \cup b + \mathbb{Z}^7$. Dowodzi to jednocześnie prawdziwości hipotezy Kellera dla dowolnej teselacji $[0, 1]^7 + T$ dla której $r^-(T) \leq 2$. Istotnie, nierówność $r^-(T) \leq 2$ oznacza,

że istnieje $x \in \mathbb{R}^7$ takie, że zbiór $W \subset T$ złożony z tych wszystkich wektorów t dla których $([0, 1]^7 + t) \cap ([0, 1]^7 + x) \neq \emptyset$ jest podzbiorem zbioru $a + \mathbb{Z}^7 \cup b + \mathbb{Z}^7$. Gdyby zbiór $[0, 1]^7 + W$ nie zawierał kostek bliźniaczych, to, podobnie jak przy omawianiu pracy [A1], możemy zbiór W przedłużyć do zbioru 2-okresowego $P = W + 2\mathbb{Z}^7$, który wyznacza teselację przestrzeni $\mathbb{R}^7$ bez kostek bliźniaczych. Jest to jednak niemożliwe bowiem $P \subset a + \mathbb{Z}^7 \cup b + \mathbb{Z}^7$. Wyżej omówiony wniosek płynący z obliczeń opisanych w pracy [8], zapiszemy w postaci twierdzenia:

Twierdzenie 5.1 (Debroni, Eblen, Langston, Myrvold, Shor, Weerapurage, 2010). *Niech $[0, 1]^7 + T$ będzie teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^7$ kostką jednostkową. Jeżeli $r^-(T) \leq 2$, to teselacja $[0, 1]^7 + T$ zawiera kostki bliźniacze.*

Dla rozstrzygnięcia prawdziwości hipotezy Kellera należy jeszcze rozpatrzeć teselacje $[0, 1]^7 + T$, dla których $r^-(T), r^+(T) \in \{3, \dots, 64\}$. W dwóch pracach [C1, A4] udało się pokazać, że hipoteza Kellera jest prawdziwa dla każdej teselacji $[0, 1]^7 + T$ takiej, że $r^+(T) \geq 5$. Dla omówienia tych rezultatów, raz jeszcze odwołamy się do struktury podziałów minimalnych (zob. też [5, 27]).



Rys. 10. Podział $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{3,B} \cup \mathcal{F}^{3,B^c} \cup \mathcal{F}^{3,C} \cup \mathcal{F}^{3,C^c}$ kostki $[0, 1]^3 + x$. Zbiory $\bigcup(\mathcal{F}^{i,B} \cup \mathcal{F}^{i,B^c})$ oraz $\bigcup(\mathcal{F}^{i,C} \cup \mathcal{F}^{i,C^c})$ są i -walcami dla $i = 3$.

Niech X będzie d -kostką i niech $l_i = \{x_1\} \times \dots \times \{x_{i-1}\} \times X_i \times \{x_{i+1}\} \times \dots \times \{x_d\}$, gdzie $x_j \in X_j$ dla $j \in [d] \setminus \{i\}$. Zbiór $F \subseteq X$ nazywamy i -walcem, jeżeli dla każdej linii l_i mamy $l_i \cap F = l_i$ lub $l_i \cap F = \emptyset$ (Rysunek 10). Niech $[0, 1]^d + T$ będzie teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową. Jak zostało to pokazane w części drugiej, podział $\mathcal{F} = \{([0, 1]^d + t) \cap ([0, 1]^d + x) \neq \emptyset : t \in T\}$ jest podziałem minimalnym d -kostki $[0, 1]^d + x$. Niech $B \subset [0, 1] + x_i$, $B^c = ([0, 1] + x_i) \setminus B$ i załóżmy, że istnieje $K \in \mathcal{F}$ takie, że $K_i = B$. Ponadto, niech

$$\mathcal{F}^{i,B} = \{K \in \mathcal{F} : K_i = B\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{F}^{i,B^c} = \{K \in \mathcal{F} : K_i = B^c\}.$$

Ponieważ kostki podziału $\mathcal{F}$ są parami dychotomiczne, zbiór $\bigcup(\mathcal{F}^{i,B} \cup \mathcal{F}^{i,B^c})$ jest i -walcem. Jeżeli $K = K_1 \times \cdots \times K_d$ oraz $i \in [d]$, to $K_{ic} = K_1 \times \cdots \times K_{i-1} \times K_{i+1} \times \cdots \times K_d$ (w pracy [A1] zamiast K_{ic} używamy zapisu $K_{i'}$). Jeżeli $\mathcal{F}$ jest rodziną kostek, to $\mathcal{F}_{ic} = \{K_{ic} : K \in \mathcal{F}\}$. Ponieważ $\bigcup(\mathcal{F}^{i,B} \cup \mathcal{F}^{i,B^c})$ jest i -walcem, zatem $\bigcup \mathcal{F}_{ic}^{i,B} = \bigcup \mathcal{F}_{ic}^{i,B^c}$. Niech $F = \bigcup \mathcal{F}_{ic}^{i,B}$. Podział $\mathcal{F}^{i,B} \cup \mathcal{F}^{i,B^c}$ każdego i -walca $\bigcup(\mathcal{F}^{i,B} \cup \mathcal{F}^{i,B^c})$ jest związany z zagadnieniem wielokrotnego podziału wielokostki F : jednym podziałem wielokostki F jest rodzina kostek $\mathcal{F}_{ic}^{i,B}$, a drugim $\mathcal{F}_{ic}^{i,B^c}$. Ponadto, jak pokazano w części drugiej referatu, $|\mathcal{F}_{ic}^{i,B}| = |\mathcal{F}_{ic}^{i,B^c}|$.

Zauważmy, że podział $\mathcal{F}^{i,B} \cup \mathcal{F}^{i,B^c}$ walca $\bigcup(\mathcal{F}^{i,B} \cup \mathcal{F}^{i,B^c})$ zawiera kostki bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\mathcal{F}^{i,B}$ lub $\mathcal{F}^{i,B^c}$ zawiera takie kostki lub $\mathcal{F}_{ic}^{i,B} \cap \mathcal{F}_{ic}^{i,B^c} \neq \emptyset$. W tym trzecim przypadku, jeżeli $K_{ic} \in \mathcal{F}_{ic}^{i,B} \cap \mathcal{F}_{ic}^{i,B^c}$, to kostki $K_1 \times \cdots \times K_{i-1} \times B \times K_{i+1} \times \cdots \times K_d$ oraz $K_1 \times \cdots \times K_{i-1} \times B^c \times K_{i+1} \times \cdots \times K_d$ są bliźniacze. Nasuwa się pytanie: *jaka jest najmniejsza liczba naturalna N , dla której istnieją dwa podziały dychotomiczne wielokostki F na kostki właściwe, które są rozłączne i żaden z nich nie zawiera kostek bliźniaczych?* W pracy [C1] pokazano, że $N = 12$, skąd wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.2. *Niech X będzie d -kostką i niech $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ będą dwoma podziałami dychotomicznymi wielokostki $F \subset X$ na kostki właściwe. Jeżeli $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ nie zawierają kostek bliźniaczych oraz $|\mathcal{F}| \leq 11$, to $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.*

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast, że

Twierdzenie 5.3. *Każda teselacja $[0,1]^7 + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^7$ kostką jednostkową taka, że $r^+(T) \geq 6$ zawiera kostki bliźniacze.*

Ponieważ praca [C1] w chwili pisania niniejszego referatu wciąż była recenzowana, omówię jedynie pracę [A4], w której rozstrzygnięty jest przypadek $r^+(T) = 5$.

Niech $[0,1]^7 + T$ będzie teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^7$ taką, że $r^+(T) = 5$. Wtedy istnieją $i \in [7]$ oraz $x \in \mathbb{R}^7$ takie, że podział $\mathcal{F} = \{([0,1]^7 + t) \cap ([0,1]^7 + x) \neq \emptyset : t \in T\}$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{i,B^1} \cup \mathcal{F}^{i,(B^1)^c} \cup \cdots \cup \mathcal{F}^{i,B^5} \cup \mathcal{F}^{i,(B^5)^c},$$

gdzie podzbiory właściwe $B^1, \dots, B^5$ zbioru $[0,1] + x_i$ są takie, że $B^n \notin \{B^m, (B^m)^c\}$ dla $n, m \in [5]$, $n \neq m$, oraz $\mathcal{F}^{i,B^n} \cup \mathcal{F}^{i,(B^n)^c}$ są podziałami dychotomicznymi walców $\bigcup(\mathcal{F}^{i,B^n} \cup \mathcal{F}^{i,(B^n)^c})$ dla każdego $n \in [5]$. Jeżeli $|\mathcal{F}^{i,B^n}| \leq 11$ dla pewnego $n \in [5]$, to na mocy Twierdzenia 5.2 jeden ze zbiorów $\mathcal{F}^{i,B^n}$ lub $\mathcal{F}^{i,(B^n)^c}$ zawiera parę bliźniaczą lub $\mathcal{F}_{ic}^{i,B^n} = \mathcal{F}_{ic}^{i,(B^n)^c}$. We wszystkich przypadkach oznacza to, że zbiór $\mathcal{F}^{i,B^n} \cup \mathcal{F}^{i,(B^n)^c}$ zawiera parę bliźniaczą. Jeżeli zatem $\mathcal{F}$ nie zawiera pary bliźniaczej, to $|\mathcal{F}^{i,B^n}| \geq 12$ dla każdego $n \in [5]$, ale ponieważ $|\mathcal{F}| = 128$, wobec tego $|\mathcal{F}^{i,B^n}| = 12$ dla pewnego $n \in [5]$.

Większą część pracy [A4] zajmuje wyznaczenie wszystkich, z dokładnością do izomorfizmu, par $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ podziałów dychotomicznych wielokostki $F \subset X$, gdzie X jest d -kostką dla $d \in \{4, 5, 6\}$, takich, że $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ nie zawierają par bliźniaczych, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ oraz $|\mathcal{F}| = 12$. (Jest to

kolejny przykład zagadnienia wielokrotnego podziału wielokostki, tym razem z dodatkowymi warunkami.)

Praca [A4] składa się z dwóch części: matematycznej i obliczeniowej. Obliczenia są nieporównywalnie skromniejsze od tych wykonanych w pracy [8], były bowiem przeprowadzone na komputerze osobistym. Ale aby można to było zrobić należało dokonać odpowiednich redukcji. Bez jakichkolwiek redukcji, liczba koniecznych do rozpatrzenia układów słów (w pracy operujemy kodami wielokostek) przekracza 73×10^{45} .

Praca [A4] jest kontynuacją pracy [C1]. Metoda analizowania kodów wielokostek wprowadzona w [C1] została także zastosowana w omawianej pracy [A4]. Metoda ta wykorzystuje większość pojęć wprowadzonych w [A1]. W obszernym rozdziale drugim pracy [A4] omawiane są główne pojęcia związane z kodami wielokostek i ich realizacjami. Przedstawione są tam również najważniejsze techniki zastosowane w analizie kodów wielokostek. Rozdział trzeci poświęcony jest kodom wielokostek zawierającym stosunkowo mało słów bez *par bliźniaczych*, to znaczy, par słów $v, w \in S^d$ takich, że $v_j = w'_j$ dla pewnego $j \in [d]$ oraz $v_i = w_i$ dla każdego $i \in [d] \setminus \{j\}$. Na wzór grafów o niewielkiej liczbie wierzchołków, opisujemy tam dokładne struktury kodów wielokostek bez par bliźniaczych, których liczba słów jest niewielka. Dodatkowo szacujemy liczbę słów w kodach pokrywających jedno lub dwa słowa. Oszacowania te są podane w poniższym lemacie.

LEMAT 5.4 ([A4, Lemma 9, 11]). *Jeżeli $V \subset S^d$ jest kodem bez par bliźniaczych, $v \sqsubseteq V$ oraz $v \notin V$, to $|V| \geq 5$. Jeżeli dodatkowo $u \sqsubseteq V, u \notin V$ oraz v i u są dychotomiczne, to $|V| \geq 7$.*

W rozdziale czwartym pracy [A4] wyznaczamy warunki konieczne jakie muszą spełniać dwa kody $V, W \subset S^d$, gdzie S jest alfabetem z dopełnieniem, a $d \in \{4, 5, 6\}$, o następujących własnościach:

- V i W są równoważne i nie zawierają par bliźniaczych,
- $V \cap W = \emptyset$,
- $|V| = |W| = 12$.

Obok kodów V i W rozważamy ich realizacje równodopełnicze $E(V)$ i $E(W)$ w d -kostce $(ES)^d$. Ponieważ V i W są równoważne, na mocy Wniosku 2.12, zachodzi równość $\bigcup E(V) = \bigcup E(W)$. Pozwala to na jednoczesną analizę kodów V, W i realizacji $E(V), E(W)$. Wobec ostatniej równości, $\check{v} \subset \bigcup E(W)$ dla każdego $v \in V$, a zatem zbiór kostek $\mathcal{F}_v = \{\check{v} \cap \check{w} \neq \emptyset : w \in W\}$ jest podziałem dychotomicznym d -kostki $\check{v}$. Ponieważ realizacja $E(W)$ ma dobre własności (np. (2.7)) struktura podziału $\mathcal{F}_v$ pozwala niekiedy na uzyskanie istotnych informacji na temat struktury kodu W .

Pierwszy warunek konieczny ma związek z parami słów $v, u \in S^d$ o szczególnej postaci: słowa v, u są dychotomiczne, co oznacza, że $v_j = u'_j$ dla pewnego $j \in [d]$, a ponadto $u_i \notin \{v_i, v'_i\}$ dla pewnego $i \neq j$ oraz $v_k = u_k$ dla wszystkich $k \in [d] \setminus \{i, j\}$. Każde dwa takie słowa nazywamy *i-rodzeństwem* (na Rysunku 10 dwie kostki ze zbioru $\mathcal{F}^{3,B}$, które przylegają do siebie ścianami ale nie tworzą pary bliźniaczej są realizacjami *i-rodzeństwa* dla $i = 2$). Poniżej wyjaśnię znaczenie *i-rodzeństw* w analizie struktury kodów V i W .

Niech $v \in S^d$, $i \in [d]$ i niech $v_{i^c} = v_1 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_d$. Jeżeli $V \subset S^d$, to $V_{i^c} = \{v_{i^c} : v \in V\}$. Niech $x \in ES$ oraz

$$\pi_x^i = ES \times \dots \times ES \times \{x\} \times ES \times \dots \times ES,$$

gdzie czynnik $\{x\}$ stoi na i -tym miejscu. Jeżeli $V \subset S^d$, to $V^{i,l} = \{v \in V : v_i = l\}$ dla $i \in [d]$ oraz $l \in S$. Ponieważ $\bigcup E(V) = \bigcup E(W)$, zatem $\pi_x^i \cap \bigcup E(V) = \pi_x^i \cap \bigcup E(W)$ dla każdego $x \in ES$ oraz $i \in [d]$. Każde dwie kostki w zbiorach $E(V), E(W)$ są dychotomiczne, wobec tego cięcie $\pi_x^i \cap \bigcup E(V)$ jest wielokostką, a zbiór kostek $\mathcal{V}_x^i = \{\pi_x^i \cap \check{v} \neq \emptyset : v \in V\}$ jest jej podziałem dychotomicznym. Wykazuje się, że jeżeli podział $\mathcal{V}_x^i$ zawiera stosunkowo mało słów i jednocześnie nie zawiera par bliźniaczych, to wielokostka $\pi_x^i \cap \bigcup E(V)$ jest sztywna, a to znaczy, że $\mathcal{V}_x^i$ jest jej jedynym podziałem na kostki wzajemnie dychotomiczne. W takiej sytuacji często można wykazać, korzystając między innymi z Lematu 5.4, że V zawiera odpowiednio dużo słów. Zauważmy teraz, że jeżeli V nie zawiera par bliźniaczych, ale $\mathcal{V}_x^i$ zawiera kostki bliźniacze, to V musi zawierać pary słów, które są i -rodzeństwem. W [A4, Lemma 19] pokazujemy, że jeżeli liczba i -rodzeństw w V jest zbyt mała, to $|V| > 12$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Pierwszy warunek konieczny orzeka, przy pewnych dodatkowych założeniach, że jeżeli $V \subset S^d$, gdzie $S = \{a, a', b, b'\}$, to dla dowolnego $i \in [d]$ i dowolnych dwóch liter $l, s \in S$ takich, że $l \notin \{s, s'\}$ zbiór $V^{i,l} \cup V^{i,s}$ musi zawierać i -rodzeństwo. Ten sam warunek musi spełniać kod W . Niech

$$V = V^{i,l_1} \cup V^{i,l'_1} \cup \dots \cup V^{i,l_k} \cup V^{i,l'_k}, \quad (5.1)$$

gdzie $l_1, l'_1, \dots, l_k, l'_k \in S$ są takie, że $l_n \notin \{l_m, l'_m\}$ dla $n, m \in [k]$, $n \neq m$, oraz $V^{i,l_j} \cup V^{i,l'_j} \neq \emptyset$ dla $j \in [k]$. Przedstawienie kodu V w postaci (5.1) nazywamy *rozkładem słów* w kodzie V . Drugi warunek konieczny opisany w [A4, Corollary 20] podaje zakazane rozkłady słów w kodach V i W . Wreszcie trzeci warunek konieczny jaki muszą spełniać kody V i W , podany w [A4, Lemma 21], mówi, że oba kody muszą być napisane w alfabecie $S = \{a, a', b, b'\}$.

Rozdział czwarty jest najtrudniejszym fragmentem pracy [A4]. Jednak większość przeprowadzonych tam rozumowań została sprowadzona, za sprawą relacji $\sqsubseteq$, do umiejętnego operowania ‘inkluzjami’ postaci $V^{i,l} \sqsubseteq W^{i,l}$ oraz szacowania ilości słów w kodach $V^{i,l}, W^{i,l}$ na podstawie rezultatów z rozdziału trzeciego. Dodatkowym i bardzo przydatnym elementem metody analizowania struktury kodów V, W jest *graf rodzeństw* określony na wierzchołkach V , w którym dwa wierzchołki $v, w \in V$ są połączone, jeżeli v i w są i -rodzeństwem dla pewnego $i \in [d]$.

W rozdziale piątym pracy [A4] opisane zostały obliczenia prowadzące do wyznaczenia wszystkich par V, W . Na mocy Twierdzenia 2.11 dla każdego słowa $v \in V$ zachodzi równoważność

$$v \sqsubseteq W \Leftrightarrow \sum_{w \in W} g(w, v) = 2^d.$$

Warunek ten pozwala w bardzo istotny sposób zredukować liczbę układów słów, które należy brać pod uwagę w trakcie prowadzenia obliczeń. Ponieważ kody V i W nie zawierają par bliźniaczych i są rozłączne, na mocy (2.9) możemy założyć, że $v = bbbb, u = b'b'b'b \in V$ dla $d = 4$, $v = bbbbbb, u = b'b'b'bb \in V$ lub $v = bbbbbb, u = b'b'b'b'b' \in V$ dla $d = 5$ oraz

$v = bbbbbb, u = b'b'b'bbb \in V$ lub $v = bbbbbb, u = b'b'b'b'b \in V$ dla $d = 6$. Kod W wyszukiwany jest spośród wszystkich kodów bez par bliźniaczych, które nakrywają wyżej wymienione słowa v, u , mają po 12 słów i spełniają wszystkie trzy warunki konieczne wyznaczone w rozdziale czwartym. Okazuje się, że istnieje tylko jeden, z dokładnością do izomorfizmu, taki kod W (dla $d = 4$) i ma on postać:

$$W = \{a'a'a'b, a'baa', baa'a, aa'a'a, a'aa'a', abba', bbaa, ab'a'a', b'ab'a, b'a'aa, b'b'aa', bb'ab'\}.$$

Łatwe obliczenia prowadzą do wyznaczenia kodu V ([A3, Theorem 27]):

$$V = \{aa'bb', abb'a, ab'b'b', a'ab'b', a'a'ab', a'bb'b, babb', bbbb, bb'a'b, b'aba', b'a'bb, b'b'b'b\}.$$

Oznacza to, że w wymiarze $d = 5$ kody V i W mają postać $V = V^{i,l}, W = W^{i,l}$ dla pewnych $i \in [5], l \in S$, gdzie $V_{ic}^{i,l}, W_{ic}^{i,l}$ są takie jak w wymiarze $d = 4$, a dla $d = 6$ kody V i W mają postać $V = V^{j,s}, W = W^{j,s}$ dla pewnych $j \in [6], s \in S$, gdzie $V_{jc}^{j,s}, W_{jc}^{j,s}$ są takie jak w wymiarze $d = 5$.

Fakt, że obliczenia prowadzą praktycznie do natychmiastowego wyznaczenia pary V, W , świadczy o trafnym doborze warunków koniecznych z rozdziału czwartego pracy [A4] i wynagradzają trud poniesiony w tym rozdziale.

Znając struktury kodów V i W , w rozdziale szóstym pracy [A4] dowodzimy, że

TWIERDZENIE 5.5 ([A4, Theorem 29]). *Jeżeli $U \subset S^7$ jest kodem podziałowym takim, że $|U^{i,l}| \leq 12$ dla pewnych $i \in [7]$ oraz $l \in S$, to kod U zawiera parę bliźniaczą.*

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast

TWIERDZENIE 5.6 ([A4, Theorem 1]). *Hipoteza Kellera jest prawdziwa dla każdej teselacji $[0, 1]^7 + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^7$ takiej, że $r^+(T) = 5$.*

Z Twierdzeń 5.1, 5.3 oraz 5.6 wynika

WNIOSEK 5.7 ([A4, Corollary 30]). *Jeżeli teselacja $[0, 1]^7 + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^7$ jest kontrprzykładem dla hipotezy Kellera, to $r^-(T), r^+(T) \in \{3, 4\}$.*

Prace [C1, A4] redukują przypadki $r^-(T), r^+(T) \in \{3, \dots, 64\}$ do jedynie dwóch: $r^-(T), r^+(T) \in \{3, 4\}$. Oznacza to, że dla pełnego rozstrzygnięcia hipotezy Kellera należy rozsądzić, czy dowolny kod podziałowy U taki, że

$$U \subset \{a, a', b, b', c, c'\}^7 \quad \text{lub} \quad U \subset \{a, a', b, b', c, c', d, d'\}^7 \quad (5.2)$$

zawiera parę bliźniaczą.

Przy okazji prac nad hipotezą Kellera, pojawia się ciekawy problem klasyfikacji równoważnych kodów V, W niezawierających par bliźniaczych i takich, że $V \cap W = \emptyset$. Jak widzieliśmy, dla

$|V| \leq 11$ takie pary nie istnieją, a dla $|V| = 12$ istnieje tylko jedna, z dokładnością do izomorfizmu, taka para. Pytanie jak rzeczy się mają dla kodów V, W , dla których $|V| \geq 13$ jest istotne dla prac nad hipotezą Kellera, bowiem w ostanich dwóch przypadkach (5.2) bardzo pomocna byłaby znajomość struktury kodów V i W , gdy $|V| \in \{13, \dots, 21\}$. Podobne zagadnienia klasyfikacyjne, dotyczące jednak układów, których nie można rozszerzyć do podziału minimalnego, są rozpatrywane przez M. Dutoura Sikiric, Y. Itoh oraz A. Poyarkova w pracach [9, 10, 11].

6 Zastosowanie kodu Lagarias-Shora

W tej części omówione zostaną prace [A5, A6].

W pracy [26] Lagarias i Shor oszacowali odległości między niektórymi kostkami w teselacjach przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową. Otrzymane tam oszacowanie zostało wywiedzione z pewnej szczególnej teselacji, której konstrukcja opiera się na dwóch kodach podziałów minimalnych. Pierwszy z tych kodów ([26, Cube-Tiling Codes: Construction A]) ma ciekawe zastosowania wykraczające poza teselacje przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową. Zastosowania te zostały przedstawione w pracach [A5, A6]. Konstrukcja wyżej wspomnianego kodu jest następująca.

Tak jak poprzednio, w alfabecie $S = \{0, 1, 2, 3\}$ dopełnienie określamy wzorami $0' = 2$ i $1' = 3$. Niech $d \geq 3$ będzie liczbą nieparzystą i niech A będzie macierzą cyrkulacyjną wymiaru $d \times d$ postaci $A = \text{circ}(1, 2, 0, \dots, 0)$. Niech $V_e(A)$ będzie zbiorem wszystkich sum różnych wierszy macierzy A , które zawierają parzyście wiele liczb 3. Dodatkowo do zbioru $V_e(A)$ dołączamy wektor $(0, \dots, 0)$. Podobnie, niech $V_e(A^T)$ będzie zbiorem wszystkich sum różnych wierszy macierzy A^T , które zawierają nieparzyście wiele zer, do którego również dołączamy wektor $(0, \dots, 0)$. Zbiór słów

$$LS = V_e(A) \cup (V_e(A^T) + (2, \dots, 2)) \pmod{4}$$

jest kodem podziału minimalnego, to znaczy, każde dwa słowa w zbiorze LS są dychotomiczne oraz $|V_e(A) \cup (V_e(A^T) + (2, \dots, 2))| = 2^d$ ([26]). Kod LS nazywamy *kodem (teselacji) Lagarias-Shora*.

6.1 Kody podziałów minimalnych z dużą liczbą liter

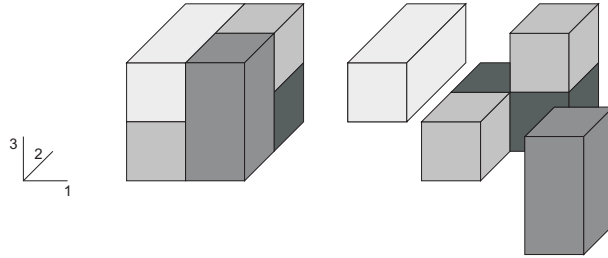
Inaczej niż w poprzednich pracach, w pracy [A5] rozważamy d alfabetów $S_1, \dots, S_d$, przy czym w każdym z nich określone jest dopełnienie. Zbiór wszystkich słów długości d jest teraz oznaczany przez $*S_1 \cdots *S_d$. Słowa długości d będziemy zapisywać w postaci wektorów $(v_1, \dots, v_d)$, gdzie $v_i \in *S_i$ dla $i \in [d]$. Niech $W \subset *S_1 \cdots *S_d$ będzie kodem wielokostki, $i \in [d]$ i niech $W_{\{i\}} = \{w_i : w_1 \dots w_d \in W\}$. Liczbę

$$L_i = L_i(W) = |\{\{w_i, w'_i\} \subset *S_i : \{w_i, w'_i\} \cap W_{\{i\}} \neq \emptyset\}|$$

nazywamy *i-tą liczbą pozycyjną* kodu W . Liczbę $\sum_{i \in [d]} L_i(W)$ nazywamy *całkowitą liczbą liter* w kodzie W .

W pracy [9] Dutour i Itoh rozpatrywali kody z dużymi liczbami pozycyjnymi L_i , $i \in [d]$, oraz zdefiniowali podział minimalny, którego kod miał całkowitą liczbę liter równą $2^d - 1$. Podział ten został nazwany *laminacją*. Kody laminacji są kodami podziałów minimalnych z największą możliwą całkowitą liczbą liter. Jednak litery w laminacji nie są równomiernie rozłożone na wszystkich pozycjach $1, \dots, d$. Celem pracy [A5] była konstrukcja kodów podziałów minimalnych z *równomiernie rozłożonymi literami*, to znaczy takich, w których $L_1 = \dots = L_d$. W skrócie takie kody nazwijmy *kodami EDL*. Zadanie konstrukcji kodu *EDL* nie jest trudne - kod podziałowy prosty jest kodem *EDL*, dla którego $L_i = 1$ dla każdego $i \in [d]$. Sytuacja natychmiast się komplikuje, gdy zażądamy aby liczba $L = L_1 = \dots = L_d$ była jak największa. Konstrukcja kodów *EDL* o dużej liczbie pozycyjnej L zajmuje dwa pierwsze rozdziały pracy [A5].

Do konstrukcji kodów *EDL* wykorzystamy jedynie fragment kodu Lagarias-Shora. Niech $\tilde{U} \subset LS$ składa się z tych wszystkich słów, które nie zawierają litery 3. Jak łatwo zauważyć $\tilde{U} \setminus \{(0, \dots, 0), (2, \dots, 2)\}$ jest zbiorem wszystkich słów, które są sumami różnych i niesąsiednich wierszy macierzy A , przy czym pierwszy i ostatni wiersz macierzy A traktujemy jak wiersze sąsiednie. Ponieważ zbiór słów $\tilde{U} \subset \{0, 1, 2, 3\}^d$ jest kodem, w którym nie występuje litera 3, zatem dla dowolnych słów v, u tego kodu istnieje $i \in [d]$ takie, że $v_i = 0$ i $u_i = 2$ lub na odwrót (przypomnijmy, że w alfabecie $\{0, 1, 2, 3\}$ dopełnienie jest zadane wzorami $0' = 2$ i $1' = 3$). Wobec tego, w każdym słowie kodu $\tilde{U}$ literę 1 możemy zastąpić dowolną inną literą i w ten sposób otrzymany nowy zbiór słów jest nadal kodem wielokostki. Przypomnijmy, że specjalna litera $*$ ma tę własność, że dla dowolnej funkcji $f = f_1 \times \dots \times f_d$ zachowującej dychotomię i dowolnego słowa $v \in (*S)^d$ takiego, że $v_i = *$, realizacja $f(v)$ w d -kostce X jest kostką niewłaściwą oraz $f_i(*) = X_i$. Innymi słowy, każda realizacja słowa $v \in (*S)^d$ zawierającego $*$ jest kostką niewłaściwą. Kod $\tilde{U}$ nie jest kodem podziałowym, ale prosta modyfikacja tego kodu, polegająca na zastąpieniu litery 1 literą $*$, da namy nowy kod, który będzie już kodem podziałowym.



Rys. 11. Realizacja $f(U(3))$ kodu podziałowego $U(3) = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}), (*, \mathbf{2}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, *, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{0}, *)\}$ w 3-kostce $X = [0, 2]^3$, gdzie $f_i(*) = [0, 2]$ oraz $f_i(\mathbf{0}) = [0, 1]$ dla $i = 1, 2, 3$.

Ponieważ obok liter 0 i 2 w pracy [A5] używamy liczb 0 i 2, litery zapiszemy w specjalny sposób: $\mathbf{0}$ i $\mathbf{2}$. Niech $*T = \{*, \mathbf{0}, \mathbf{2}\}$ oraz $\mathbf{0}' = \mathbf{2}$. Dla każdej liczby nieparzystej $d \geq 3$ niech $U = U(d) \subset (*T)^d$ będzie zbiorem wszystkich słów, które są sumami różnych i niesąsiednich wierszy macierzy $B = B(d) = \text{circ}(*, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ ($* + \mathbf{0} = *$), przy czym pierwszy i ostatni

wiersz są traktowane jako sąsiednie. Do zbioru U dołączamy słowa $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ oraz $(\mathbf{2}, \dots, \mathbf{2})$. Zbiór U jest kodem podziałowym, ale każda jego realizacja $f(U)$ w d -kostce X jest podziałem niewłaściwym (jedyne kostki właściwe są $f((\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}))$ i $f((\mathbf{2}, \dots, \mathbf{2}))$). Jest jasne, że kod U powstaje z $\tilde{U}$ przez zastąpienie w każdym słowie $u \in \tilde{U}$ litery 1 literą $*$.

Zapisując słowa kodu U jako wiersze macierzy U jest widoczne, że liczba liter $*$ w każdej kolumnie tej macierzy jest taka sama.

$$B(5) = \begin{bmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad U(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & 2 & * & 2 & 0 \\ 0 & * & 2 & * & 2 \\ 2 & 0 & * & 2 & * \\ * & 2 & 0 & * & 2 \\ 2 & * & 2 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Ta własność kodu U umożliwia konstruowanie za jego pomocą kodów EDL . Istotnie, jeżeli $f(U)$ jest realizacją kodu U w d -kostce X , to dzieląc odpowiednio każdą kostkę $f(u)$, $u \in U$, na kostki właściwe, otrzymamy podział dychotomiczny na kostki właściwe, w którym liczba pozycyjna L_i jest taka sama dla każdego $i \in [d]$ (porównaj Rysunek 11 i 12).

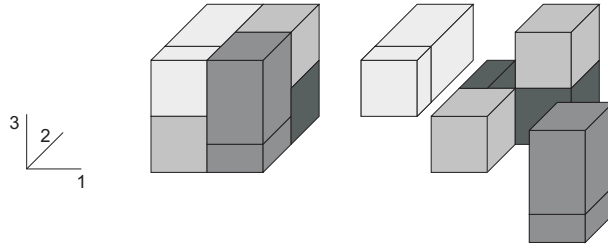
W pracy [A5] przedstawiamy dwie konstrukcje kodów EDL . Konstrukcja I kodów EDL jest indukcyjna. W pierwszym kroku, dla każdego $d \geq 1$ definiujemy kody $V^0 = V^0(d)$, gdy d jest nieparzyste i $W^0 = W^0(d)$, gdy d jest parzyste, dla których otrzymujemy następujące wartości liczb pozycyjnych:

$$L(V^0(d)) = \sum_{k \in \llbracket d/2 \rrbracket} \binom{d-k}{k} \frac{k}{d-k} + 1$$

oraz

$$L(W^0(d+1)) = 2L(V^0(d)) - 1.$$

Konstrukcja kodu V^0 polega na zastąpieniu każdego kodu $\{u\}$, $u \in U$, kodem $s(u)$ równoważnym z $\{u\}$, przy czym kod $s(u)$ jest kodem prostym (Rysunek 11). Zestawiając ze sobą odpowiednio dwa kody $V^0(d)$ konstruujemy kod $W^0(d+1)$.



Rys. 12. Realizacja kodu $V^0(3)$.

W drugim kroku konstrukcji I dla d nieparzystego określamy kod $V^1(d)$ w analogiczny sposób jak $V^0(d)$ z tą różnicą, że teraz zamiast kodu prostego $s(u)$ używamy odpowiedniego kodu V^0 , który jest równoważny z $\{u\}$. Taka procedura jest opłacalna, bowiem na przykład $L(V^0(11)) = 56$, ale już $L(V^1(11)) = 132$. Ogólnie, w pierwszej konstrukcji kodów *EDL* opisanej w pracy [A5] dla każdego $m \geq 1$ otrzymujemy kody $V^m(d)$ i $W^m(d+1)$, gdzie d jest liczbą nieparzystą, dla których

$$L(V^m(d)) = \sum_{k \in J_o} \binom{d-k}{k} \frac{k}{d-k} L(V^{m-1}(k)) + \sum_{k \in J_e} \binom{d-k}{k} \frac{k}{d-k} L(W^{m-1}(k)) + 1,$$

przy czym $L(V^{m-1}(1)) = 1$, $L(W^{m-1}(2)) = 1$, a J_o oraz J_e są podzbiorami wszystkich liczb nieparzystych i parzystych w zbiorze $[d/2]$, odpowiednio, oraz

$$L(W^m(d+1)) = L(V^m(d)) + L_{P'_m}(V^m(d)) - 1,$$

gdzie P'_m jest pewnym zbiorem liczb naturalnych.

Konstrukcja II kodów *EDL* opisana w omawianej pracy [A5] dotyczy tylko wymiarów d , które są liczbami pierwszymi. Idea jest taka sama jak przy konstruowaniu kodów V^m , teraz jednak w miejsce kodów $\{u\}$, $u \in U$, wprowadzamy równoważne z $\{u\}$ kody $p(u)$, które są kodami laminacji. Liczba pozycyjna tak otrzymanych kodów $P(d)$ jest równa

$$L(P(d)) = \sum_{k \in [d/2]} \binom{d-k}{k} \frac{2^k - 1}{d-k} + 1.$$

Ponieważ kody laminacji są kodami o największej możliwej całkowitej liczbie liter, kody $P(d)$, gdzie d jest liczbą pierwszą, mają największą możliwą liczbę pozycyjną spośród wszystkich kodów sporządzonych na planie kodu U .

G.O.H. Katona i K. Tichler w pracy [19] przedstawili konstrukcję *zbalansowanych skojarzeń* w grafie kostki jednostkowej $[0, 1]^d$, to znaczy takich skojarzeń, w których liczba krawędzi w każdym kierunku $i \in [d]$ jest taka sama. Kody *EDL* są bardzo blisko powiązane ze skojarzeniami zbalansowanymi. Na zakończenie pracy [A5] przedstawiamy konstrukcję zbalansowanego skojarzenia doskonałego grafu kostki $[0, 1]^d$ z usuniętymi wierzchołkami $\{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}$, gdzie d jest liczbą pierwszą. Konstrukcja ta jest prostą modyfikacją kodu $P(d)$.

6.2 Dowody tożsamości dwumianowych w oparciu o teselacje przestrzeni $\mathbb{R}^d$

W drugiej pracy związanej z kodem Lagarias-Shora przedstawione są nowe dowody trzech dobrze znanych i powiązanych ze sobą tożsamości dwumianowych:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{d-k}{k} \frac{d}{d-k} 2^k = 2^d + (-1)^d, \quad (6.1)$$

$$\sum_{k \geq 0} \binom{d-k}{k} 2^k = \frac{2^{d+1} + (-1)^d}{3}, \quad (6.2)$$

$$\sum_{k \geq 0} \binom{d-k}{k} \frac{k}{d-k} 2^k = \frac{2^d + (-1)^d 2}{3}. \quad (6.3)$$

Oczywiście sam fakt podania nowych dowodów powyższych równości nie jest zbyt istotny. Uważam, że ciekawe może być porównanie dowodów przedstawionych w pracy [A6] z dowodami podobnych tożsamości opartymi na teselacjach.

Źródłem obszernej wiedzy na temat kombinatorycznych dowodów wielu tożsamości jest książka pod tytułem *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof* ([3]) napisana przez A.T. Benjamina i J.J. Quinni. Jedną z głównych strategii dowodowych szeroko stosowaną w [3], polega na zliczaniu teselacji tablicy wymiaru $1 \times d$ za pomocą kwadratów o wymiarach 1×1 , prostokątów (tzw. *domin*) o wymiarach 1×2 , itd. Natomiast podejście zaproponowane w pracy [A6] jest w pewnym sensie dualne: zamiast zliczania wszystkich teselacji (określonego rodzaju) jednowymiarowej tablicy $1 \times d$, rozpatrujemy tylko jedną teselację, ale za to obiektu d -wymiarowego (tj. przestrzeni $\mathbb{R}^d$). W pracy [A6] rozpatrujemy podział dychotomiczny kostki $[0, 2)^d$, który otrzymujemy z teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^n$ kostką $[0, 2)^d$. Teselacja ta jest generowana przez kod Lagarias-Shora, a sam podział kostki $[0, 2)^d$ jest odpowiednią realizacją kodu U zdefiniowanego przy okazji omawiania pracy [A5].

Współczynniki dwumianowe występujące w (6.1)–(6.3), a także sam kod U , są blisko związane z kostką Lucasa Λ_d ([33]). Jest to graf, którego zbiór wierzchołków $V(\Lambda_d)$ składa się ze wszystkich wierzchołków $(v_1, \dots, v_d)$ kostki $\{0, 1\}^d$, w których jedynki nie stoją obok siebie, a także nie występują one jednocześnie na pierwszej i ostatniej pozycji. Wierzchołki w kostce Lukasa są połączone, jeżeli różnią się dokładnie na jednej pozycji $i \in [d]$. Na zakończenie pracy [A6] pokazujemy, że wierzchołki kostki Lukasa są selektorem podziału $\mathcal{L}$ kostki $\{0, 1\}^d$ na kostki wzajemnie dychotomiczne, który jest realizacją kodu U . Dokładniej, dla każdego $v \in V(\Lambda_d)$ istnieje tylko jedna kostka $K \in \mathcal{L}$ taka, że $v \in K$. Ponadto, w każdej kostce ze zbioru $\mathcal{L} \setminus \{(1, \dots, 1)\}$ leży wierzchołek ze zbioru $V(\Lambda_d)$.

7 Pozostałe prace naukowe

- [B1] J. Grytczuk, A. P. Kisielewicz and K. Przesławski, Minimal Partitions of a Box into Boxes, *Combinatorica* 24 (2004), 605–614.
- [B2] A. P. Kisielewicz, K. Przesławski, Hipoteza podziałowa Kellera, *Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie* 35 (2004), 10–16.
- [B3] A. P. Kisielewicz, K. Przesławski, On the number of minimal partitions of a box into boxes, *Discrete Math.* 306 (2006) 843–846.
- [B4] A.P. Kisielewicz, K. Przesławski, The Coin Exchange Problem and the Structure of Cube Tilings, *Electron. J. of Combin.*, 19(2) (2012).
- [B5] A. P. Kisielewicz, K. Przesławski, Rigidity and the chessboard theorem for cube packings, *European J. Combin.* 33 (2012), 1113 – 1119. A 120 (2013), 1–10.
- [B6] A. Kisielewicz, Selection theorems for set-valued functions with decomposable values, *Ann. Soc. Math. Polon. Comm. Math.*, 34(1994), 123–135.
- [B7] A. Kisielewicz, Relaxation theorem for set-valued functions with decomposable values, *Disc. Math. Diff. Incl.*, 16(1996), 91–97.
- [B8] A.P. Kisielewicz, Continuous selection theorems for nonlower semicontinuous multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.* 286 (2003) 160–167.
- [B9] A. P. Kisielewicz, M. Kisielewicz, Continuous ε -selection theorems for almost lower semicontinuous multifunctions and applications, *Optimization*, DOI:10.1080/02331934.2014.926360 (2014).
- [C1] A. P. Kisielewicz, Rigid polyboxes and Keller’s conjecture, przedstawiona do druku, arXiv:1304.1639

Omówienie prac [B1]–[B9] zaczniemy od prac poświęconych podziałom dychotomicznym i teselacjom przestrzeni $\mathbb{R}^d$.

7.1 Podziały dychotomiczne i teselacje przestrzeni $\mathbb{R}^d$

Praca [B1] jest pierwszą pracą, w której badane są własności układów kostek dychotomicznych. Zawiera ona podstawowe idee, które następnie zostały szeroko rozwinięte w pracy [A1].

Do najważniejszych rezultatów otrzymanych w [B1] należy charakteryzacja podziałów minimalnych $\mathcal{F}$ d -kostki $X = X_1 \times \cdots \times X_d$ oparta na przekrojach z *płaszczyznami wymiaru k* , to znaczy, zbiorami $P \subset X$ takimi, że $|P_I| = 1$ dla pewnego $I \subset [d]$, $|I^c| = k$, oraz $P_{I^c} = X_{I^c}$, gdzie $I^c = [d] \setminus I$ (przypomnijmy, że $P_I = P_{i_1} \times \cdots \times P_{i_n}$, gdzie $I = \{i_1 < \cdots < i_n\}$). Płaszczyznę wymiaru 1 nazywamy *linią* w kostce X .

TWIERDZENIE 7.1 ([B1, Theorem 3]) *Niech $k \in [d]$. Podział $\mathcal{F}$ jest podziałem minimalnym d -kostki X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej płaszczyzny P wymiaru k zbiór $\mathcal{P} = \{K \in \mathcal{F} : K \cap P \neq \emptyset\}$ zawiera 2^k kostek.*

W szczególności, jeżeli każdą linię P potraktujemy jak skupioną wiązkę promieni Roentgena, to jeżeli każda wiązka prześwietla zawsze dwie kostki (prześwietlenie jest ‘prostopadłe’ do $(d-1)$ -wymiarowych ścian kostki X), to podział $\mathcal{F}$ jest minimalny. Warto zauważyć, że ponieważ kostki rodziny $\mathcal{F}$ nie muszą posiadać żadnych szczególnych własności (takich jak spójność, ta sama wielkość, itp.), nie każde dwie kostki muszą zostać prześwietlone jednocześnie przez wiązkę P .

Drugim wartym odnotowania wynikiem uzyskanym w pracy [B1], jest twierdzenie dotyczące rodzin rozpinających. Niech $\mathcal{M}$ będzie rodziną kostek w d -kostce X . Powiemy, że kostki rodziny $\mathcal{M}$ *rozpinają* d -kostkę X , jeżeli X jest najmniejszą kostką, która zawiera kostki rodziny $\mathcal{M}$.

TWIERDZENIE 7.2 ([B1, Theorem 4]) *Niech $\mathcal{F}$ będzie podziałem minimalnym d -kostki X i niech $k \in [d]$. Spośród dowolnych $2^k + 1$ kostek podziału $\mathcal{F}$ można wybrać $k + 1$ kostek $K^1, \dots, K^{k+1}$ takich, że kostki $K_I^1, \dots, K_I^{k+1}$ rozpinają kostkę X_I dla pewnego $I \subseteq [d]$ takiego, że $|I| = k$. W szczególności, podział minimalny $\mathcal{F}$ zawiera $d + 1$ kostek rozpinających d -kostkę X .*

Praca [B2] ma charakter popularyzatorski. Przedstawiono w niej zagadnienia związane z hipotezą Minkowskiego (postać bazy kraty Λ w teselacji $[0, 1)^d + \Lambda$), Kellera i podziałami minimalnymi. Szczegółowo omówiona została konstrukcja kontrprzykładu do hipotezy Kellera podanego przez J. Mackeya w [29]. Praca [29] zawiera jedynie kod kontrprzykładu. Krótki komentarz jakim autor opatrzył kontrprzykład nie wyjaśnia sposobu jego otrzymania. W pracy [B2] dokładnie opisano bardzo ładną strukturę tego kontrprzykładu (zob. też [41]) Jak już wspomniano, podstawą tego kontrprzykładu są kody V i W opisane przy okazji omawiania pracy [A4]. W pracy [B2] omówiono także twierdzenie ([B2, Twierdzenie 5]) związane z hipotezą Fugledego ([12, 18, 24]).

W nocie [B3] podjęte zostały pierwsze próby oszacowania liczby podziałów minimalnych d -kostki X . Liczbę wszystkich podziałów minimalnych d -kostki X oznaczamy przez $\mu(X)$. Przedstawiając podział minimalny jako sumę jego składników prostych otrzymano następujący rezultat:

TWIERDZENIE 7.3 ([B3, Theorem 1]). *Niech $X = X_1 \times \dots \times X_d$ i niech $|X_i| \geq 3$ dla każdego $i \in [d]$, $d \geq 2$. Wtedy*

$$\mu(X) \equiv 1 \pmod{4}$$

Ostatnio K. A. Mathew, P. R. J. Östergard oraz A. Popa [30] wyliczyli, że liczba $\mu(X)$ wszystkich podziałów minimalnych $\mathcal{F}$ kostki $X = \{0, 1, 2\}^5$ takich że $K_i \in \{\{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1\}, \{2\}\}$

dla każdego $i \in [5]$ i każdej kostki $K = K_1 \times \cdots \times K_5 \in \mathcal{F}$ wynosi 638,560,878,292,512 z czego 899,710,227 podziały są nieizomorficzne.

Jak wspomniano wcześniej, w pracy [B4] podana została ogólna formuła na liczbę elementów w dowolnym składniku prostym $\mathcal{T} \cap \mathcal{C}$ teselacji $\mathcal{T}$ torusa $\mathbb{T}_{\mathbf{m}}^d$ kostką jednostkową dla dowolnego $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ ([B4, Theorem 7]):

$$|\mathcal{T} \cap \mathcal{C}| = n_1 m_1 + \cdots + n_d m_d$$

dla pewnych $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. W ten sam sposób można wyrazić licznosc pewnych podzbiorów teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową. Aby to uczynić potrzebne są dwa dodatkowe twierdzenia. Pierwsze z nich charakteryzuje składniki proste teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową. *Składnikiem prostym* teselacji $[0, 1)^d + T$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ nazywamy każdą niepustą rodzinę kostek $[0, 1)^d + T_1$ taką, że $T_1 = T \cap (x + \mathbb{Z}^d)$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}^d$. *Blokiem* nazywamy zbiór postaci $X + x$, gdzie $x \in \mathbb{R}^d$ oraz $X = X_1 \times \cdots \times X_d$, przy czym $X_i \in \{[0, 1), \mathbb{R}\}$ dla każdego $i \in [d]$ (definicja bloku w pracy [B4] jest nieco inna niż w [A3]). Rodzinę $\mathcal{B}$ złożoną z wzajemnie rozłącznych bloków nazywamy *teselacją* przestrzeni $\mathbb{R}^d$ blokami z rodziny $\mathcal{B}$, jeżeli $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}^d$. Z [B4, Theorem 1] wynika zapowiadana charakteryzacja składników prostych teselacji $[0, 1)^d + T$:

Twierdzenie 7.4. *Niech $T_1 \subset x + \mathbb{Z}^d$, gdzie $x \in \mathbb{R}^d$. Zbiór $[0, 1)^d + T_1$ jest składnikiem prostym pewnej teselacji przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje teselacja $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ blokami taka, że $[0, 1)^d + T_1 \subset \mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B} \setminus ([0, 1)^d + T_1)$ nie zawiera przesunięć kostki jednostkowej.*

Drugi rezultat pochodzi z pracy [7] D. Coppersmitha i J. Steinbergera. Bezpośrednio z [7, Theorem 1] wynika

Lemat 7.5 ([B4, Proposition 3]). *Niech $m_1, \dots, m_d \in \mathbb{N}$ i niech $Q \subseteq [m_1] \times \cdots \times [m_d]$ będzie zbiorem takim, że zbiór $[m_1] \times \cdots \times [m_d] \setminus Q$ można zappełnić wzajemnie rozłącznymi liniami. Wtedy*

$$|Q| = n_1 m_1 + \cdots + n_d m_d$$

dla pewnych $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Korzystając z Twierdzenia 7.4 oraz Lematu 7.5 w pracy [B4] otrzymano następujące

Twierdzenie 7.6 ([B4, Theorem 4]). *Niech $[0, 1)^d + T$ będzie teselacją przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostką jednostkową, $x \in T$ i niech kostka $D = D_1 \times \cdots \times D_d$ będzie taka, że $|D_i| = m_i \in \mathbb{N}$ dla $i \in [d]$ oraz $D \subset (x + \mathbb{Z}^d)$. Wtedy istnieją liczby $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takie, że*

$$|T \cap D| = n_1 m_1 + \cdots + n_d m_d.$$

W pracy [B5] raz jeszcze badane są własności wielokostek i teselacji, które wywodzą się z własności kodów podanej w Twierdzeniu 2.16. Przypomnijmy, odwołując się tym razem do podziałów dychotomicznych, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest podziałem d -kostki X na kostki wzajemnie dychotomiczne, być może niewłaściwe, to istnieje taka para kostek $K, G \in \mathcal{F}$, że $K_i = G_i$ lub $K_i = X_i \setminus G_i$ dla każdego $i \in [d]$ oraz

$$|\{i \in [d] : K_i = X_i \setminus G_i\}| \equiv 1 \pmod{2}.$$

W pracy [B5] powyższa własność jest dowodzona, i to na dwa sposoby, w kontekście upakowań przestrzeni $\mathbb{R}^d$ kostkami jednostkowymi. Przypomnijmy, że rodzinę $[0, 1]^d + S = \{[0, 1]^d + s : s \in S\}$ nazywamy *upakowaniem* przestrzeni $\mathbb{R}^d$, jeżeli dowolne dwie kostki tej rodziny są rozłączne. Upakowanie $[0, 1]^d + S$ nazywamy *teselacją* zbioru $F \subseteq \mathbb{R}^d$, jeżeli $F = \bigcup ([0, 1]^d + S)$. Zbiór $F \subset \mathbb{R}^d$ taki, że upakowanie $[0, 1]^d + S$ jest jego teselacją nazywamy *szorstkim*, jeżeli z faktu $[0, 1]^d + x \subseteq F$ wynika $x \in S$. Główne twierdzenie pracy [B5] brzmi następująco:

TWIERDZENIE 7.7 ([B5, Theorem 3]). *Niech $[0, 1]^d + S$ będzie upakowaniem przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Zbiór S można przedstawić w postaci sumy rozłącznych zbiorów S^0 i S^1 takich, że oba zbiory $\bigcup ([0, 1]^d + S^0)$ oraz $\bigcup ([0, 1]^d + S^1)$ są szorstkie. Ponadto, zbiory S^0 i S^1 można wypisać w sposób jawny.*

7.2 Teoria multifunkcji

Cztery prace [B6]–[B9] nie wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej dotyczą istnienia ciągłych selektorów multifunkcji i ich zastosowań w teorii inkluzji różniczkowych. Prace [B6, B7] opublikowane zostały przed doktoratem.

Niech X i Y będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Dowolną funkcję $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ nazywamy *multifunkcją*. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ taką, że $f(x) \in F(x)$ dla każdego $x \in X$ nazywamy *sektorem* multifunkcji F . Niech teraz $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, a (Y, ρ) przestrzenią metryczną. Multifunkcję $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ nazywamy *dolnie półciągłą* w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla każdego zbioru otwartego $U \subset Y$ takiego, że $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, zbiór $\{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ jest otwarty. Różne inne rodzaje ciągłości multifunkcji oraz ich własności selekcyjne są obszernie omówione w monografiach [2, 17, 35]. Jednym z podstawowych zagadnień rozpatrywanych w teorii multifunkcji jest zagadnienie istnienia ciągłego selektora multifunkcji. Słynne twierdzenie Michaela [31] o istnieniu ciągłego selektora mówi, że *każda dolnie półciągła multifunkcja $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ z przestrzeni parazwartej X do przestrzeni Banacha Y o domkniętych i wypukłych wartościach ma ciągły selektor*.

W pracy [B6] udowodniono pewne twierdzenie o istnieniu ciągłego selektora dla multifunkcji o domkniętych i rozkładalnych wartościach w przestrzeni funkcji całkowalnych $L(T, \mathbb{R}^d)$. W oparciu o to twierdzenie, w pracy [B7] udowodniono pewną własność słabego domknięcia zbioru wszystkich punktów stałych multifunkcji ($x \in X$ jest *punktem stałym* multifunkcji $F : X \rightarrow$

$2^Y \setminus \{\emptyset\}$, jeżeli $x \in F(x)$) o domkniętych i rozkładalnych wartościach w przestrzeni $L(T, \mathbb{R}^d)$, która spełnia pewien silniejszy niż dolna półciągłość warunek ciągłości.

W pracy [B8] badane są selekcyjne własności multifunkcji

$$F : X \rightarrow 2^{C(S, \mathbb{R}^d)} \setminus \{\emptyset\} \quad \text{oraz} \quad F : X \rightarrow 2^{L^\infty(T, \mathbb{R}^d)} \setminus \{\emptyset\},$$

gdzie $C(S, \mathbb{R}^d)$ jest przestrzenią funkcji ciągłych $f : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ na zbiorze zwartym S , a $L^\infty(T, \mathbb{R}^d)$ jest przestrzenią funkcji $f : T \rightarrow \mathbb{R}^d$ całkowalnych jednostajnie ograniczonych. Twierdzenia selekcyjne zawarte w pracy [B8] dotyczą multifunkcji $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$, dla których zbiór

$$F^{(1)}(x) = \{y \in F(x) : \lim_{x' \rightarrow x} \text{dist}(y, F(x')) = 0\}$$

jest niepusty dla każdego $x \in X$. Zbiór $F^{(1)}(x)$ nazywamy *dolną granicą Kuratowski-Painlevé* multifunkcji F w punkcie $x \in X$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy również *n-tą granicę Kuratowskiego-Painlevé* wzorem

$$F^{(n)}(x) = \{y \in F^{n-1}(x) : \lim_{x' \rightarrow x} \text{dist}(y, F^{n-1}(x')) = 0\}.$$

Selekcyjne własności multifunkcji $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ zależą zarówno od rodzaju jej ciągłości jak i natury zbiorów $F(x)$, $x \in X$. Zbiór $K \subset C(S, \mathbb{R}^n)$ nazywamy *C-wypukłym*, jeżeli dla dowolnych $f, g \in K$ i dowolnej funkcji ciągłej $p : S \rightarrow [0, 1]$ funkcja $fp + g(1 - p)$ należy do zbioru K . Zbiór $K \subset L^\infty(T, \mathbb{R}^d)$ nazywamy *rozkładalnym*, jeżeli dla dowolnych $f, g \in K$ i dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset T$ funkcja $f\chi_A + g\chi_{T \setminus A}$ należy do zbioru K , gdzie χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A .

W 1989 roku A.L. Brown pokazał w pracy [4], że jeżeli $F : X \rightarrow 2^{\mathbb{R}^d} \setminus \{\emptyset\}$ ma wypukłe wartości oraz $F^{(d)}(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in X$, to multifunkcja $x \mapsto F^{(d)}(x)$ jest dolnie półciągła. W pracy [B8] uogólniamy twierdzenie Browna:

Twierdzenie 7.8 ([B8, Theorem 5]). *Niech X będzie przestrzenią parazwartą. Jeżeli multifunkcja $F : X \rightarrow 2^{C(S, \mathbb{R}^d)} \setminus \{\emptyset\}$ ma domknięte i C-wypukłe wartości oraz $F^{(d)}(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in X$, to multifunkcja $x \mapsto F^{(d)}(x)$ jest dolnie półciągła.*

W oparciu o Twierdzenie 7.8 oraz twierdzenie Gelfanda-Najmarka, otrzymujemy twierdzenie Browna dla multifunkcji o wartościach w przestrzeni $L^\infty(T, \mathbb{R}^n)$:

Twierdzenie 7.9 ([B8, Theorem 12]). *Niech X będzie przestrzenią parazwartą. Jeżeli multifunkcja $F : X \rightarrow 2^{L^\infty(T, \mathbb{R}^d)} \setminus \{\emptyset\}$ ma domknięte, wypukłe i rozkładalne wartości oraz $F^{(d)}(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in X$, to multifunkcja $x \mapsto F^{(d)}(x)$ jest dolnie półciągła.*

Proste zastosowanie twierdzenia Michaela gwarantuje istnienie ciągłego selektora dla multifunkcji opisanych w Twierdzeniach 7.8 i 7.9.

Multifunkcję $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ nazywamy *prawie dolnie półciągłą* w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje otwarte otoczenie U_{x_0} punktu x_0 takie, że $\bigcap_{x \in U_{x_0}} [F(x)]_\varepsilon \neq \emptyset$, gdzie $[F(x)]_\varepsilon = \{y \in Y : \text{dist}(y, F(x)) < \varepsilon\}$. Jeżeli $\varepsilon > 0$, to ε -selektorem f_ε multifunkcji F nazywamy funkcję $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$ taką, że $f_\varepsilon(x) \in [F(x)]_\varepsilon$ dla każdego $x \in X$.

W pracy [B9] przedstawione zostały trzy twierdzenia o istnieniu ciągłej ε -selekcji oraz pewne ich zastosowania w teorii inkluzji różniczkowych. Dwa twierdzenia selekcyjne udowodnione w [B9] mają postać:

Twierdzenie 7.10 ([B9, Theorem 2.2]). *Niech $(T, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną ze skończoną i bezatomową miarą μ i niech E będzie przestrzenią Banacha. Każda prawie dolnie półciągła multifunkcja $F : \mathbb{R}^d \rightarrow 2^{L(T, \mu, E)} \setminus \{\emptyset\}$ o wartościach rozkładalnych ma ε -selekcję f_ε .*

Twierdzenie 7.11 ([B9, Theorem 2.5]) *Niech (X, d) będzie ośrodkową przestrzenią metryczną, a $(T, \mathcal{F}, \mu)$ ośrodkową przestrzenią mierzalną z miarą μ . Jeżeli multifunkcja $F : \mathbb{R}^d \rightarrow 2^{L(T, \mu, E)} \setminus \{\emptyset\}$ o wartościach rozkładalnych jest taka, że*

- (i) $F^{(1)}(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in X$,
- (ii) multifunkcja $F^{(1)}$ jest prawie dolnie półciągła,
- (iii) $\lim_{x' \rightarrow x} \overline{H}(F^{(1)}(x), F^{(1)}(x')) = 0$ dla każdego $x \in X$,

to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $f_\varepsilon : X \rightarrow L(T, \mu, E)$ taka, że $\text{Gr}(f_\varepsilon) \subset [\text{Gr}(F^{(1)})]_\varepsilon$ i jednocześnie $f_\varepsilon(x) \in [F(x)]_\varepsilon$ dla każdego $x \in X$.

W drugiej części pracy [B9], przedstawione zostały zastosowania wyżej opisanych twierdzeń selekcyjnych w teorii inkluzji różniczkowych. Bezpośrednio z Twierdzenia 7.10 otrzymano

Twierdzenie 7.12 ([B9, Theorem 3.1]). *Niech $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^d} \setminus \{\emptyset\}$ będzie multifunkcją o wartościach domkniętych, która jest mierzalna, jednostajnie całkowo ograniczona, a ponadto $F(t, \cdot)$ jest prawie dolnie półciągłą multifunkcją jednostajnie ze względu na $t \geq 0$. Wtedy dla każdego $T > 0$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}^d$ istnieje ciąg $(x_r)_{r \geq 1}$ absolutnie ciągłych funkcji $x_r : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ takich, że $x_r(0) = x_0$ oraz $\lim \text{dist}(x'_r(t), F(t, x_r(t))) = 0$ dla prawie wszystkich $t \in [0, T]$.*

Bezpośrednio z Twierdzenia 7.11 wynika analogiczny rezultat ([B9, Theorem 3.2]) dla inkluzji różniczkowych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha.

Literatura

- [1] N. Alon, T. Bohman, R. Holzman and D. J. Kleitman, On partitions of discrete boxes, Discrete Math. 257 (2002), 255–258.
- [2] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhauser, Boston, (1990).

- [3] A. T. Benjamin and J. J. Quinn, Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof, The Dolciani Mathematical Expositions, Vol. 27, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003.
- [4] A.L. Brown, Set valued mappings, continuous selections and metric projection, *J. Approx. Theory* 57 (1989) 48–68.
- [5] K. Corrádi and S. Szabó, Cube tiling and covering a complete graph, *Discrete Math.* 85 (1990), 319–321.
- [6] K. Corrádi and S. Szabó, A combinatorial approach for Keller’s conjecture, *Period. Math. Hungar.* 21 (1990), 95–100.
- [7] D. Coppersmith and J. Steinberger, On the Entry Sum of Cyclotomic Arrays, *INTEGERS* 6 (2006), # A26, pp 28.
- [8] J. Debroni, J.D Eblen, M.A. Langston, W. Myrvold, P. Shor and D. Weerapurage, A complete resolution of the Keller maximum clique problem, Proceedings of the Twenty-Second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2011.
- [9] M. Dutour Sikirić and Y. Itoh, Combinatorial cube packings in the cube and the torus, *European J. Combin.* 31 (2010), 517–534.
- [10] M. Dutour Sikirić and Y. Itoh, New results on torus cube packings and tilings, arXiv:1410.0839.
- [11] M. Dutour Sikirić, Y. Itoh and A. Poyarkov, Cube packings, second moment and holes, *European J. Combin.* 28 (2007), 715–725.
- [12] B. Fuglede, Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem, *J. Funct. Anal.* 16 (1974), 101–121.
- [13] R.J. Gardner, Geometric Tomography, Encyclopedia Math. Appl., Cambridge University Press, New York, 1995
- [14] S. Golomb, L. Welch, Perfect codes in the Lee metric and the packing of polyominoes. *SIAM J. Appl. Math.* 18 (1970), 302–317
- [15] G. Hajós, ”Über einfache und mehrfache Bedeckung des n -dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Z.* 47 (1941), 427–467.
- [16] P. Horak, Tilings in Lee metric. *European J. Combin.* 30 (2009), 480–489
- [17] S. Hu, N.S. Papageorgiu, Handbook of Multivalued Analysis, Vol. I, Theory, Kluwer Academic, 1997.

- [18] A. Iosevich and S. Pedersen, Spectral and tiling properties of the unit cube, *Inter. Math. Res. Notices* 16 (1998), 819–828.
- [19] G.O.H. Katona, K. Tichler, Existence of a maximum balanced matching in the hypercube, *Journal of Statistical Theory and Practice* 7 (4) (2013), 617–629
- [20] K. A. Kearnes, E. W. Kiss, Finite algebras and finite complexity, *Discrete Math.* 207 (1999), 89–135.
- [21] O. H. Keller, Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln, *J. Reine Angew. Math.* 163 (1930), 231–248.
- [22] O. H. Keller, Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln, *J. Reine Angew. Math.* 177 (1937), 61–64.
- [23] M. N. Kolountzakis, Lattice tilings by cubes: whole, notched and extended, *Electron. J. Combin.* 5 (1998), #R14, pp 11.
- [24] J. C. Lagarias, J. A. Reeds and Y. Wang, Orthonormal bases of exponentials for the n -cube, *Duke. Math. J.* 103 (2000), 25–37.
- [25] J. C. Lagarias and P. W. Shor, Keller’s cube-tiling conjecture is false in high dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 27 (1992), 279–287.
- [26] J. C. Lagarias and P. W. Shor, Cube tilings of $\mathbb{R}^d$ and nonlinear codes, *Discrete Comput. Geom.* 11 (1994), 359–391. *J. Algebra* 224(1) (2000), 91–109.
- [27] J. Lawrence, Tiling $\mathbb{R}^d$ by translates of orthants, *Convexity and Related Comb. Geometry Proc. of the Second Univ. of Oklahoma Conf.* (1982), 203–207.
- [28] M. Łysakowska and K. Przesławski, On the structure of cube tilings and unextendible systems of cubes in low dimension, *European J. Combin.* 32 (2011), 1417–1427.
- [29] J. Mackey, A cube tiling of dimension eight with no facesharing, *Discrete Comput. Geom.* 28 (2002), 275–279.
- [30] K. A. Mathew, P. R. J. Östergård, A. Popa, Enumerating Cube Tilings, *Discrete Comput. Geom.* 50 (2013), 1112–1122.
- [31] E. Michael, Continuous selections I, *Ann. of Math.* 63 (1956), 361–382.
- [32] H. Minkowski, *Diophantische Approximationen*, Teubner, Leipzig, 1907.
- [33] E. Munarini, C. P. Cippo, and N. Z. Salvi, On the Lucas cubes, *The Fibonacci Quarterly*, 39(1) (2001), 12–21.

- [34] O. Perron, Über lückenlose Ausfüllung des n -dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel, Math. Z. 46 (1940), 1–26.
- [35] D. Repovš, P.V. Semenov, Continuous Selections of Multivalued Mappings, Kluwer Academic Publishers 1998.
- [36] S. K. Stein, Tiling, packing, and covering by clusters. Rocky Mt. J. Math. 16 (1986), 277–321
- [37] S. K. Stein and S. Szabó, Algebra and Tiling: Homomorphisms in the Service of Geometry, American Mathematical Association, Washington, 1994.
- [38] S. Szabó, Cube tilings as contributions of algebra to geometry, Beiträge Algebra Geom. 34 (1993), 63–75.
- [39] S. Szabó, A reduction of Kellers conjecture, Period. Math. Hungar. 17 (1986), 265–277.
- [40] S. Szabó, Topics in Factorizations of Abelian groups, Birkhäuser Verlag, 2004 .
- [41] Ch. Zong, The Cube: A Window to Convex and Discrete Geometry, Cambridge Tracts in Mathematics (168), 2006.

A. Misiak