

AUTOREFERAT

(1) Imię i nazwisko.

Ewa Drgas-Burchardt

(2) Posiadane dyplomy, stopnie naukowe.

Studia wyższe: **Uniwersytet Wrocławski**

wydział: **Matematyka, Fizyka i Chemia**

kierunek: **matematyka**

specjalność: **zastosowania matematyki**

Tytuł pracy magisterskiej: **Pewne charakteryzacje rozkładu geometrycznego**

Promotor: **dr Małgorzata Majsnerowska**

Data otrzymania stopnia magistra: **7 lipca 1987 roku**

Tytuł rozprawy doktorskiej: **Rozbicia grafów względem własności dziedzicznych i wielomian chromatyczny**

Promotor: **prof. dr hab. Mieczysław Borowiecki**

Data i miejsce otrzymania stopnia doktora: **23 kwietnia 1996 roku**

Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej

(3) Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

- Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Zielonej Górze
1987 – 1994 asystent

- Politechnika Zielonogórska
1994 – 1996 asystent
1996 – 2001 adiunkt
- Uniwersytet Zielonogórski
2001 – 2011 adiunkt
od listopada 2011 starszy wykładowca

(4) Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.) stanowi jednotematyczny cykl pięciu publikacji pt. **Jednoznaczna faktoryzacja i generowanie klas grafów względem zbiorów grafów pierwszych.**

(a) Lista jednotematycznych publikacji (indeksacja zgodna ze spisem załączonym do autoreferatu, prezentacja zgodna z kolejnością omawiania prac):

[24] E. Drgas-Burchardt, On uniqueness of a general factorization of graph properties, *J. Graph Theory* **62** (2009) 48–64.

[13] I. Broere, E. Drgas-Burchardt, Unique factorization of composite hereditary graph properties *Acta Math. Sinica, English Series* **28 2** (2012) 267–280.

[21] E. Drgas-Burchardt, A note on joins of additive hereditary graph properties, *Discuss. Math. Graph Theory* **26** (2006) 413–418.

[22] E. Drgas-Burchardt, Cardinality of a minimal forbidden graph family for reducible additive hereditary graph properties, *Discuss. Math. Graph Theory* **29** (2009) 263–274.

[25] E. Drgas-Burchardt, On prime inductive classes of graphs, *European Journal of Combinatorics* **32(8)** (2011) 1317–1328.

(b) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników.

1. WSTĘP

Pojęcie jednoznaczności odgrywa w matematyce ogromną rolę, pozwalając czytelnie opisywać obiekty matematyczne i dowodzić ich własności. Teoria grafów, będąca młodą gałęzią matematyki, dość późno odkryła jednoznaczność, skupiając się w początkowej fazie na badaniu własności danego skończonego, czyli jednoznacznie opisanego, grafu. Z czasem badania teorii grafów wykroczyły poza obiekty skończone, dopuszczając istnienie grafów nieskończonych i nieskończonych klas grafów skończonych lub nieskończonych. W obu wypadkach jednoznaczność jest narzędziem co najmniej użytecznym a niekiedy koniecznym.

Zbiór W wierzchołków grafu G nazywamy modułem, jeżeli dla dowolnych dwóch jego elementów x, y zachodzi równość $N_G(x) \setminus W = N_G(y) \setminus W$. Powiemy, że n -wierzchołkowy graf jest pierwszy, jeżeli nie zawiera modułów mocy k , gdzie $2 \leq k \leq n - 1$. Innymi słowy n -wierzchołkowy graf jest pierwszy, jeżeli nie może być otrzymany przez podstawienie co najmniej 2-wierzchołkowego i co najwyżej $(n - 1)$ -wierzchołkowego grafu do innego grafu za jego dowolny wierzchołek. Symbolem **PRIME** oznaczamy klasę grafów pierwszych, co najmniej dwuwierzchołkowych.

Niech $H, G_1, \dots, G_n$ będą grafami i $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Przez $H[G_1, \dots, G_n]$ rozumiemy graf otrzymany przez jednoczesne podstawienie grafów G_i do H za v_i dla wszystkich $i \in [n]$. Graf $H[G_1, \dots, G_n]$ jest nazywany uogólnionym produktem leksykograficznym grafów $G_1, \dots, G_n$ i grafu bazowego H (produktem leksykograficznym grafu H i grafu G_1 w przypadku $G_1 = \dots = G_n$). W szczególności produkty $\overline{K_n}[G_1, \dots, G_n]$ i $K_n[G_1, \dots, G_n]$ są znane jako suma $G_1 \cup \dots \cup G_n$ i złączenie $G_1 + \dots + G_n$ grafów $G_1, \dots, G_n$.

W latach sześćdziesiątych poprzedniego stulecia Sabidussi [63] i niezależnie Vizing [69] udowodnili twierdzenie o jednoznacznej dekompozycji grafu na grafy niedekomponowalne względem produktu kartezjańskiego. To zapoczątkowało ciąg badań na

temat jednoznaczności dekompozycji grafu ze względu na inne produkty. W szczególności uznano, że produkt leksykograficzny nie jest jednoznacznie dekomponowalny [44]. Niezależnie, w świecie informatyki, dla potrzeb rekurencyjnej konstrukcji algorytmów grafowych, w różnoraki sposób było eksploatowane pojęcie modułu grafu. Algorytmy te rozwiązując problem na grafach podstawowych i znając zasady łączenia tych rozwiązań podawały całościowe rozwiązanie problemu. Potrzeba istniejąca w świecie informatyki szybko doprowadziła do wielokrotnego, niezależnego odkrycia jednoznacznej reprezentacji grafu przez jego drzewo modularnej dekompozycji. W roku 1967 Tibor Gallai [37] udowodnił twierdzenie o modularnej dekompozycji grafu. Twierdzenie Gallai, wraz ze wspomnianym wcześniej drzewem modularnej dekompozycji, pozwala zaprezentować graf jako jednoznaczne złożenie uogólnionych produktów leksykograficznych, których grafy bazowe są pierwsze (więcej informacji na ten temat można znaleźć w [24]).

W niniejszym opracowaniu zakładamy, że wszystkie rozważane grafy są skończone i proste (bez pętli i krawędzi wielokrotnych). Obiektem naszego zainteresowania nie są szczególne grafy lecz ich klasy, czyli zbiory zamknięte ze względu na izomorfizm. Pokażemy jak wykorzystać znane i nowe (dowiedzione przez autorkę opracowania) twierdzenia do jednoznacznego dekompozycyjnego bądź kompozycyjnego opisu wielu spośród tych klas. W swoich rozważaniach wielokrotnie będziemy nawiązywać do pojęcia grafu pierwszego i jednoznaczności drzewiastej dekompozycji grafu ze względu na uogólniony produkt leksykograficzny.

1.1. Faktoryzacja. Klasę grafów nazywamy faktoryzowalną, jeżeli jest definiowalna przez podziały. W szczególności mogą to być wierzchołkowe podziały grafów z tej klasy. Tego typu faktoryzacja klas grafów była po raz pierwszy rozważana przy okazji wierzchołkowego kolorowania grafów. Z czasem rozpoczęto studia nad uogólnieniami zwykłego kolorowania, rozważając dla przykładu H -kolorowanie (istnienie homomorfizmu do danego grafu H) [42] bądź $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ -kolorowanie [11, 15]. Wszystkie wspomniane koncepcje odpowiadają wierzchołkowym problemom podziałowym w grafach. Na przykład klasa grafów n -kolorowalnych może być rozpatrywana jako klasa tych grafów G , dla których istnieje podział zbioru wierzchołków $V(G)$ na zbiory $V_1, \dots, V_n$, tak że podgraf indukowany $G[V_i]$ jest grafem bezkrawędziowym. Dopuszczając inne możliwości niż być grafem bezkrawędziowym, powiedzmy żądając aby

graf $G[V_i]$ miał pewną własność $\mathcal{P}_i$, otrzymujemy definicję klasy grafów $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ -kolorowalnych. Z drugiej strony żądając dodatkowo w definicji n -kolorowości aby krawędzie między wierzchołkami będącymi w częściach podziału V_i, V_j były zabronione w G , dla pewnych ściśle opisanych par indeksów i, j ze zbioru $[n]$, otrzymujemy definicję H -kolorowości. W tym przypadku H jest grafem ze zbiorem wierzchołków $[n]$, w którym wierzchołki i, j są niesąsiednie wtedy i tylko wtedy gdy krawędzie między wierzchołkami zbiorów V_i i V_j są zabronione.

Z innym rodzajem faktoryzacji klas grafów mamy do czynienia analizując możliwość prezentacji danej klasy grafów jako supremum w kratce [11, 4, 45, 25]. W nielicznych przypadkach oba rodzaje faktoryzacji pokrywają się. Niniejsze opracowanie dotyczy głównie faktoryzacji klas grafów definiowanej przez wierzchołkowe podziały grafów z tej klasy, odwołując się do faktoryzacji w kratkach ze względu na niespodziewaną bliskość tych zagadnień.

1.2. Redukowalność. Klasę grafów nazywamy redukowalną jeżeli posiada faktoryzację spełniającą pewne dodatkowe warunki.

1.2.1. $\circ$ -redukowalność. Niech $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ będą klasami grafów. Przez $\mathcal{P}_1 \circ \dots \circ \mathcal{P}_n$ oznaczmy klasę grafów posiadających $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ -kolorowanie. Mówimy, że klasa grafów $\mathcal{P}$ jest $\circ$ -redukowalna jeżeli istnieją nietrywialne (różne od zbioru pustego i rodziny $\mathcal{I}$ wszystkich grafów skończonych) klasy grafów $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ takie, że $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$. W przeciwnym wypadku $\mathcal{P}$ jest nazywana $\circ$ -nieredukowalną. Jak wspomnieliśmy wcześniej, przedstawienie $\mathcal{P}$ jako $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ nazywamy faktoryzacją $\mathcal{P}$ a klasy $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ czynnikami tej faktoryzacji.

JEDNOZNACZNOŚĆ. Niech $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \circ \dots \circ \mathcal{P}_n$ dla pewnych klas grafów $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$. Przy takim założeniu naturalne jest pytanie o jednoznaczność takiego opisu. Po raz pierwszy problem ten postawiony został w książce Jensena i Tofta [46] (problem 17.9). Początkowo sądzono, że można otrzymać jednoznaczność bez założeń o zbiorze, z którego czerpiemy faktory danej faktoryzacji. Przykład pokazany w [65] zaprzeczył tej opinii. Stanowiło to motywację do wprowadzenia nowych żądań w definicji $\circ$ -redukowalności. Niech $\mathbb{P}$ będzie rodziną klas grafów. Klasa grafów $\mathcal{P}$ jest $\circ$ -redukowalna nad $\mathbb{P}$, jeżeli istnieją nietrywialne klasy grafów $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbb{P}$ takie, że $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$. W przeciwnym wypadku $\mathcal{P}$ jest $\circ$ -nieredukowalna nad $\mathbb{P}$. Jest jasne, że jednoznaczności $\circ$ -faktoryzacji nad $\mathbb{P}$ można oczekiwać tylko wówczas gdy faktory są

o-nieredukowalne nad $\mathbf{P}$. Takie faktoryzacje nazywamy o-nieredukowalnymi. Ich analiza zapoczątkowała zupełnie nowy kierunek badań kryteriów o-nieredukowalności klas grafów i dalej grafów jednoznacznie $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ -kolorowalnych [55, 56, 66]. Z drugiej strony pojawiło się pytanie dla jakich klas $\mathbf{P}$ i przy jakich warunkach, faktoryzacja klas grafów nad $\mathbf{P}$ może być jednoznaczna. W szczególności pokazano niejednoznaczność o-nieredukowalnych faktoryzacji nad rodziną $\mathbf{L}$, klas grafów zamkniętych ze względu na branie podgrafów [58]. Co więcej udowodniono, że jeżeli zbiorem faktorów jest klasa $\mathbf{L}_{\leq}$, klas grafów zamkniętych ze względu na branie indukowanych podgrafów, to jednoznaczność o-nieredukowalnych faktoryzacji otrzymujemy zaledwie w czterech precyzyjnie opisanych przypadkach, które obejmują bardzo nieliczną rodzinę klas grafów [33, 34]. Ponadto, uzyskując wcześniej wiele częściowych wyników, udowodniono jednoznaczność o-nieredukowalnych faktoryzacji nad rodzinami $\mathbf{L}_{\leq}^a$, $\mathbf{L}^a$ i $\mathbf{L}^c$ klas grafów odpowiednio zamkniętych ze względu na branie podgrafów indukowanych i addytywnych, zamkniętych ze względu na branie podgrafów i addytywnych oraz zamkniętych ze względu na branie podgrafów i kompozycyjnych [33, 34, 35, 57, 58]. Należy przypomnieć, że klasa grafów $\mathcal{P}$ jest addytywna, jeżeli jest zamknięta ze względu na branie rozłącznej sumy grafów i kompozycyjna, jeżeli dla dowolnych grafów $G_1, G_2 \in \mathcal{P}$ istnieje graf $G \in \mathcal{P}$, który zawiera jako podgrafy jednocześnie G_1 i G_2 .

1.2.2. $\vee$ -redukowalność. Niech $(\mathcal{L}, \preceq)$ będzie kratą, w której $\vee$ oznacza operację supremum. Element $x \in \mathcal{L}$ jest $\vee$ -redukowalny w tej kratce jeżeli $x = x_1 \vee x_2$, gdzie x_1, x_2 są dowolnymi elementami $\mathcal{L}$ dla których $x_1 \prec x$, $x_2 \prec x$. W przeciwnym wypadku x jest $\vee$ -nieredukowalny w danej kratce. Ogólnie, jeżeli $(\mathcal{L}, \preceq)$ jest kratą klas grafów to $\vee$ -redukowalność danej klasy nie musi mieć związku z wierzchołkowymi podziałami grafów z tej klasy. Jednakże w wypadku kraty rozdzielnej $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ (szczegółowo można znaleźć w [11]) pokazano, że $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ jest zbiorem wszystkich grafów których składowe spójności są elementami zbioru $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ [45], co indukuje odpowiedni podział zbioru wierzchołków takich grafów.

JEDNOZNACZNOŚĆ. Następujące twierdzenie o jednoznaczności w kratkach można znaleźć na przykład w [62].

Twierdzenie 1. *Niech $\bigvee_{i=1}^n x_i, \bigvee_{j=1}^m y_j$ będą dwoma reprezentacjami x jako supremum $\vee$ -nieredukowalnych elementów w kratce rozdzielnej. Niech ponadto żaden ele-*

ment x_i ani żaden element y_j nie może być pominięty w tych reprezentacjach. Wówczas $n = m$ i istnieje bijekcja $\varphi : [n] \rightarrow [n]$ taka że $x_i = y_{\varphi(i)}$, dla $i \in [n]$.

1.3. Rodziny grafów zabronionych. Dla dowolnej klasy grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}$ można zdefiniować rodzinę grafów zabronionych $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ następująco:

$\mathbf{F}(\mathcal{P}) = \{G : G \notin \mathcal{P} \text{ oraz } H \in \mathcal{P} \text{ dla dowolnego właściwego podgrafu } H \text{ grafu } G\}$.

Podobnie, dla dowolnej klasy grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$ można zdefiniować rodzinę indukowanych grafów zabronionych $\mathbf{C}(\mathcal{P})$ następująco:

$\mathbf{C}(\mathcal{P}) = \{G : G \notin \mathcal{P} \text{ oraz } H \in \mathcal{P} \text{ dla dowolnego właściwego podgrafu indukowanego } H \text{ grafu } G\}$.

Rodziny $\mathbf{F}(\mathcal{P})$, $\mathbf{C}(\mathcal{P})$ charakteryzują $\mathcal{P}$ jednoznacznie [39], co jest powodem nieustannego ich badania. Niektóre spośród nich są dane jako definicje klas grafów (na przykład klasa grafów bezkrawędziowych, nie zawierających trójkątów, claw-free grafy i tym podobne). Opisanie innych klas grafów przez grafy zabronione okupione było ogromnym wysiłkiem (na przykład twierdzenie Kuratowskiego dla grafów płanarnych, the strong perfect graph theorem dla grafów doskonałych [14], twierdzenie o rodzinie grafów zabronionych dla grafów krawędziowych [2], split-grafów [36]). Nie zawsze udaje się wyznaczyć wszystkie elementy rodzin $\mathbf{F}(\mathcal{P})$, $\mathbf{C}(\mathcal{P})$. Stąd jedną z ważniejszych kwestii dotyczących tych rodzin stało się pytanie o ich skończoność. Warto tutaj zauważyć, że $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_{\leq}$ oraz, że dla $\mathcal{P} \in \mathbf{L}$ zachodzi związek $\mathbf{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbf{C}(\mathcal{P})$. Ponadto stosując prosty algorytm generujący można pokazać, że w przypadku $\mathcal{P} \in \mathbf{L}$, rodzina $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ jest nieskończona wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{C}(\mathcal{P})$ jest nieskończona [34].

2. JEDNOZNACZNA FAKTORYZACJA I GENEROWANIE KLAS GRAFÓW WZGLĘDEM ZBIORÓW GRAFÓW PIERWSZYCH

Cztery pierwsze prace wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji związane są z faktoryzacją a piąta z generowaniem i faktoryzacją, w każdym przypadku, klas grafów względem zbiorów grafów pierwszych. Koncepcja faktoryzacji przedstawiona w pierwszej spośród cytowanych prac [24] została wprowadzona przez M. Borowieckiego w roku 2004 podczas warsztatów naukowych **Hereditarnia**. Jest

ona uogólnieniem szeroko badanych znanych modeli n -kolorowalności, H -kolorowalności (homomorfizmów), $\circ$ -redukowalności i w pewnych przypadkach $\vee$ -redukowalności klas grafów [4, 11, 42]. Problem jednoznaczności faktoryzacji w zakresie tej koncepcji rozważany jest w trzech pierwszych rozdziałach pracy [24]. W rozdziale czwartym zdefiniowano nowe, bardziej szczegółowe, bazujące na zbiorach grafów pierwszych, spojrzenie na ten problem. To pozwoliło faktoryzować i oceniać jednoznaczność faktoryzacji klas grafów, które w świetle poprzednich rozważań były nefaktoryzowalne. Rozważania na ten temat prowadzone w [24] dla faktoryzacji nad $\mathbf{L}^a$ znalazły kontynuację w pracy [13] dla faktoryzacji nad $\mathbf{L}^c$.

Niech G, H będą grafami oraz $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Przez $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podział grafu G rozumiemy podział $(V_1, \dots, V_n)$ zbioru $V(G)$ (części podziału mogą być puste) taki, że graf indukowany przez niepustą część V_i należy do klasy $\mathcal{P}_i$ dla wszystkich $i \in [n]$ oraz istnienie krawędzi $x_i x_j \in E(G)$, gdzie $x_i \in V_i$ i $x_j \in V_j$, implikuje istnienie krawędzi $v_i v_j \in E(H)$. Symbol $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ oznacza klasę wszystkich grafów posiadających $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podział. Jeżeli $\mathcal{P} = H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ i $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \in \mathbb{P}$ to mówimy, że $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ jest H -faktoryzacją (lub krótko *faktoryzacją*) $\mathcal{P}$ nad $\mathbb{P}$ i $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ są *faktorami* tej faktoryzacji oraz że $\mathcal{P}$ jest H -faktoryzowalna nad $\mathbb{P}$. W dalszej części będziemy rozważać tylko przypadki $\mathbb{P} = \mathbf{L}^a$ i $\mathbb{P} = \mathbf{L}^c$. Obie klasy $\mathbf{L}^a, \mathbf{L}^c$ zawierają się w $\mathbf{L}$, co umożliwia nam odwołanie się do pojęć grafu zabronionego, grafu maksymalnego czy też zbioru generującego. Precyzyjniej, każda klasa $\mathcal{P} \in \mathbf{L}$ może być scharakteryzowana przez rodzinę $\mathcal{P}$ -maksymalnych grafów $\mathbf{M}(\mathcal{P})$ postaci $\{G : G \in \mathcal{P} \text{ i dla dowolnej krawędzi } e \in E(\overline{G}) \text{ zachodzi } G + e \notin \mathcal{P}\}$. Rodzina $\mathbf{M}(\mathcal{P})$ jest szczególnym przypadkiem zbioru generującego $\mathcal{G}$ dla $\mathcal{P} \in \mathbf{L}$ czyli zbioru zawartego w $\mathcal{P}$, takiego że każdy graf $G \in \mathcal{P}$ jest podgrafem pewnego grafu z $\mathcal{G}$.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ jest faktoryzacją klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$ (nad $\mathbf{L}^c$) to $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^a$ (odpowiednio $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$).

O danej faktoryzacji $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}$ powiemy, że jest *właściwa*, jeżeli istnieje $\mathcal{P}$ -maksymalny graf G , dla którego w każdym jego $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podziale $(V_1, \dots, V_n)$ zachodzi $V_i \neq \emptyset$ dla wszystkich $i \in [n]$. Zbiór wszystkich $\mathcal{P}$ -maksymalnych grafów mających wyżej opisaną własność oznaczamy przez $\mathbf{M}^*(H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n])$.

Dla danego grafu $H = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$, powiemy, że klasa grafów $\mathcal{P}$ jest H -redukowalna nad $\mathbb{P}$, jeżeli istnieją nietrywialne klasy grafów $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \in \mathbb{P}$ takie,

że $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ jest właściwą faktoryzacją klasy $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{P}$. W przeciwnym wypadku, $\mathcal{P}$ jest nazywana *H-nieredukowalną nad $\mathbf{P}$* .

Klasa grafów $\mathcal{P}$ jest nazywana *redukowalną nad $\mathbf{P}$* , jeżeli jest *H-redukowalna nad $\mathbf{P}$* dla pewnego grafu H , który posiada co najmniej dwa wierzchołki. W przeciwnym wypadku, $\mathcal{P}$ jest nazywana *nieredukowalną nad $\mathbf{P}$* . O danej faktoryzacji klasy grafów $\mathcal{P}$ powiemy, że jest *nieredukowalna nad $\mathbf{P}$* , jeżeli wszystkie jej faktory są *nieredukowalne nad $\mathbf{P}$* .

2.1. Jednoznaczność $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -faktoryzacji nad $\mathbf{L}^a$. Pierwsza, z wchodzących w skład cyklu, praca [24] zawiera twierdzenia o jednoznaczności faktoryzacji $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ danej klasy grafów nad $\mathbf{L}^a$. W rozdziale 2 pracy pokazano kiedy *H-redukowalność* klas grafów jest równoważna *o-redukowalności* bądź odpowiednio *∨-redukowalności* (wcześniej znane było twierdzenie o rozłączności klas grafów *o-redukowalnych* i *∨-redukowalnych* [4]). Wyniki te cytowane są poniżej w lematach 1 i 2 oraz twierdzeniach 2 i 3 (Lemmas 1, 2 i Theorems 1, 2 w [24]).

Lemat 1. *Niech $H_1 = (\{v_1, \dots, v_j\}, E_1)$, $H_2 = (\{v_{j+1}, \dots, v_n\}, E_2)$ będą danymi grafami i niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^a$. Jeżeli $\mathcal{P} = (H_1 + H_2)[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$, to $\mathcal{P} = H_1[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_j] \circ H_2[\mathcal{P}_{j+1}, \dots, \mathcal{P}_n]$. Ponadto, jeżeli $(H_1 + H_2)[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ jest właściwą faktoryzacją $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$, to $H_1[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_j]$, $H_2[\mathcal{P}_{j+1}, \dots, \mathcal{P}_n]$ są właściwymi faktoryzacjami odpowiednich klas grafów nad $\mathbf{L}^a$.*

Lemat 2. *Niech $H_1 = (\{v_1, \dots, v_j\}, E_1)$, $H_2 = (\{v_{j+1}, \dots, v_n\}, E_2)$ będą danymi grafami i niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^a$. Jeżeli $\mathcal{P} = (H_1 \cup H_2)[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$, to $\mathcal{P} = H_1[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_j] \vee H_2[\mathcal{P}_{j+1}, \dots, \mathcal{P}_n]$. Ponadto, jeżeli $(H_1 \cup H_2)[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ jest właściwą faktoryzacją $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$, to $H_1[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_j]$, $H_2[\mathcal{P}_{j+1}, \dots, \mathcal{P}_n]$ są właściwymi faktoryzacjami odpowiednich klas grafów nad $\mathbf{L}^a$.*

Twierdzenie 2. *Niech $\mathcal{P}$ będzie klasą grafów *o-redukowalną nad $\mathbf{L}^a$* . Jeżeli $\mathcal{P}$ jest *H-redukowalna nad $\mathbf{L}^a$* dla pewnego, co najmniej dwuwierzchołkowego grafu H , to istnieją grafy H_1, H_2 takie, że $H = H_1 + H_2$.*

Twierdzenie 3. *Niech $\mathcal{P}$ będzie klasą grafów *∨-redukowalną w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$* . Jeżeli $\mathcal{P}$ jest *H-redukowalna nad $\mathbf{L}^a$* dla pewnego, co najmniej dwuwierzchołkowego grafu H , to istnieją grafy H_1, H_2 takie, że $H = H_1 \cup H_2$.*

Rozdział 2 pracy [24] zawiera też uogólnienie cytowanego wcześniej twierdzenia o jednoznaczności *∨-faktoryzacji* zastosowanego do kraty $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$. Rezultat ten i jego

konsekwencje podane zostały poniżej jako twierdzenie 4 i wnioski 1, 2 (Theorem 4 i Corollaries 1 i 2 w [24]).

Twierdzenie 4. *Niech $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1 \vee \dots \vee \mathcal{Q}_n = \bigvee_{i \in J} \mathcal{R}_i$, gdzie $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n, \mathcal{R}_i$, $i \in J$, są $\vee$ -nieredukowalnymi w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasami grafów. Ponadto, niech $\mathcal{P} \neq \bigvee_{j \in [n]: j \neq i} \mathcal{Q}_j$ dla każdego $i \in [n]$, i niech $\mathcal{P} \neq \bigvee_{j \in J: j \neq i} \mathcal{R}_j$ dla każdego $i \in J$. Wówczas $n = |J|$ i istnieje bijekcja φ zbioru $[n]$ na J spełniająca $\mathcal{Q}_i = \mathcal{R}_{\varphi(i)}$ dla $i \in [n]$.*

Wniosek 1. *Niech $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1 \circ \dots \circ \mathcal{Q}_n$, $n \geq 2$, gdzie $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n \in \mathbf{L}^a$ są $\circ$ -nieredukowalnymi nad $\mathbf{L}^a$ klasami grafów i niech H będzie danym grafem. Dla każdej nieredukowalnej nad $\mathbf{L}^a$ właściwej faktoryzacji $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m]$, $m \geq 2$, klasy grafów $\mathcal{P}$, graf $\bar{H}$ ma dokładnie n składowych spójności $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_n$. Ponadto, istnieje przeetykietowanie $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ postaci $\mathcal{P}_1^1, \mathcal{P}_2^1, \dots, \mathcal{P}_{m_1}^1, \mathcal{P}_1^2, \mathcal{P}_2^2, \dots, \mathcal{P}_{m_2}^2, \dots, \mathcal{P}_1^n, \mathcal{P}_2^n, \dots, \mathcal{P}_{m_n}^n$ spełniające $V(H_i) = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_{m_i}^i\}$ i $H_i[\mathcal{P}_1^i, \dots, \mathcal{P}_{m_i}^i] = \mathcal{Q}_i$ dla każdego $i \in [n]$.*

Wniosek 2. *Niech H będzie grafem i niech $\mathcal{P} = \bigvee_{j \in J} \mathcal{Q}_j$, $|J| \geq 2$, gdzie dla każdego $i \in J$, $\mathcal{Q}_i \in \mathbf{L}^a$ jest $\vee$ -nieredukowalną w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasą grafów. Niech ponadto $\mathcal{P} \neq \bigvee_{j \in J: j \neq i} \mathcal{Q}_j$ dla każdego $i \in J$. Jeżeli $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m]$, $m \geq 2$, jest dowolną nieredukowalną właściwą faktoryzacją $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$, to J jest skończony i H ma dokładnie $|J|$ składowych spójności $H_1, H_2, \dots, H_{|J|}$. Ponadto, istnieje przeetykietowanie $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ postaci $\mathcal{P}_1^1, \mathcal{P}_2^1, \dots, \mathcal{P}_{m_1}^1, \mathcal{P}_1^2, \mathcal{P}_2^2, \dots, \mathcal{P}_{m_2}^2, \dots, \mathcal{P}_1^{|J|}, \mathcal{P}_2^{|J|}, \dots, \mathcal{P}_{m_{|J|}}^{|J|}$ spełniające $V(H_i) = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_{m_i}^i\}$ i $H_i[\mathcal{P}_1^i, \dots, \mathcal{P}_{m_i}^i] = \mathcal{Q}_i$ dla każdego $i \in [|J|]$.*

W rozdziale 3 pracy [24] została pokazana jednoznaczność faktoryzacji nad $\mathbf{L}^a$ w klasie grafów pierwszych (Theorems 5 i 6, Corollary 3 oraz Lemma 3 pracy [24]).

Twierdzenie 5. *Niech $H_1 = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E_1)$ i $H_2 = (\{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}, E_2)$, $m, n \geq 4$, będą grafami pierwszymi i niech $H_1[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n]$, $H_2[\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_m]$ będą dwoma właściwymi faktoryzacjami $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$. Ponadto niech $G \in M^*(H_1[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n]) \cap M^*(H_2[\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_m])$ i niech $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ będzie dowolnym $H_1[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podziałem grafu G oraz niech $(V'_1, V'_2, \dots, V'_m)$ będzie dowolnym $H_2[\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_m]$ -podziałem grafu G . Wówczas H_1 jest izomorficzny z H_2 ($n = m$) i istnieje automorfizm $\varphi : [n] \rightarrow [n]$ grafu H_1 taki, że $V'_i = V_{\varphi(i)}$, dla $i \in [n]$.*

Wniosek 3. *Niech $H = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$, $n \geq 4$, będzie grafem pierwszym i niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n \in \mathbf{L}^a$. Wówczas dowolne dwa $H[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podziały grafu*

$G \in M^*(H[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n])$ są takie same z dokładnością do etykietowania części podziału generowanego przez automorfizm grafu H .

Wierzchołek x jest nazywany *wierzchołkiem dominującym* w grafie H , jeżeli istnieje $y \in V(H)$ taki, że $N_H(y)$ jest właściwym podzbiorem zbioru $N_H(x)$.

Poniższy lemat wykorzystuje pojęcie wierzchołka dominującego w grafie i jest kluczowy w dowodzie twierdzenia 6.

Lemat 3. Niech $H = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$, $n \geq 4$, będzie ustalonym grafem pierwszym bez wierzchołków dominujących, G^* niech będzie dowolnym grafem i niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n \in \mathbf{L}^a$. Ponadto niech $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ będzie $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podziałem grafu $G \in M^*(H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n])$. Wówczas dowolny $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podział grafu $\hat{G} = H[X_1, \dots, X_n]$, gdzie

$$X_k = \begin{cases} G[V_k] \cup G^* & G^* \in \mathcal{P}_k, \\ G[V_k] & G^* \notin \mathcal{P}_k, \end{cases}$$

jest postaci $(V(X_{\varphi(1)}), \dots, V(X_{\varphi(n)}))$ gdzie φ jest automorfizmem grafu H spełniającym $G^* \in \mathcal{P}_{\varphi(i)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G^* \in \mathcal{P}_i$.

Stosując twierdzenie o istnieniu uporządkowanego zbioru generującego zaczerpnięte z [64] można udowodnić następujący fakt.

Twierdzenie 6. Niech $n \geq m \geq 4$ i niech $H_1[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ będzie właściwą H_1 -faktoryzacją klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$, gdzie H_1 jest grafem pierwszym bez wierzchołków dominujących. Wówczas dla każdego grafu pierwszego H_2 i każdej właściwej faktoryzacji $H_2[\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_m]$ klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$, grafy H_1, H_2 są izomorficzne i istnieje automorfizm φ grafu H_1 spełniający równości $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_{\varphi(i)}$ dla $i \in [n]$.

W dalszym ciągu rozdziału 3 pracy [24], korzystając z twierdzenia Gallai [37], sformułowano rezultat o jednoznaczności dekompozycji dowolnego grafu ze względu na uogólniony produkt leksykograficzny.

Twierdzenie 7. Każdy graf $G \in \mathcal{I}$ może być jednoznacznie skonstruowany z klasy grafów pierwszych, startując z $|V(G)|$ kopii grafu K_1 , używając rekurencyjnie trzech następujących operacji:

- (1) suma grafów,
- (2) złączenie grafów,
- (3) operacja $H[G_1, \dots, G_n]$, gdzie $H = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ jest grafem pierwszym i $n \geq 4$, i $G_1, \dots, G_n$ są K_1 lub grafami otrzymanymi z K_1 przez operacje opisane w punktach (1), (2), (3).

Powyższe twierdzenie daje możliwość poprawnego zdefiniowania klasy grafów *dobrych* następująco:

- (1) K_1 jest grafem dobrym,
- (2) jeżeli $H = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ jest grafem pierwszym bez wierzchołków dominujących i $G_1, G_2, \dots, G_n$ są grafami dobrymi, to $H[G_1, \dots, G_n]$ też jest grafem dobrym.

Poniżej podajemy jedno z dwóch najważniejszych twierdzeń omawianej pracy (Theorem 8 w [24]). Udowodniono w nim jednoznaczność H -faktoryzacji nieredukowalnych nad $\mathbf{L}^a$, w przypadku gdy H jest grafem dobrym.

Twierdzenie 8. *Niech $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ będzie nieredukowalną właściwą faktoryzacją nietrywialnej klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$. Jeżeli H jest grafem dobrym, to $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ jest jedyną nieredukowalną właściwą faktoryzacją $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$.*

Przypomnijmy raz jeszcze, że twierdzenie 8 uogólnia dwa znane wcześniej twierdzenia o jednoznaczności $\circ$ -faktoryzacji i $\vee$ -faktoryzacji klasy grafów odpowiednio nad $\mathbf{L}^a$ i w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ [4, 57, 62]. Fakt uogólnienia drugiego spośród cytowanych twierdzeń wynika z równoważności $\vee$ -redukowalności w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ i $\overline{K_2}$ -redukowalności nad $\mathbf{L}^a$ co stanowi jeden z wyników pracy [45].

W rozdziale 4 pracy [24] po raz pierwszy wprowadzono pojęcie redukowalności klasy grafów ze względu na zbiór grafów pierwszych, pokazując możliwość innego, nowego spojrzenia na zagadnienie redukowalności klas grafów. W poniższym twierdzeniu (Theorem 9 pracy [24]), sformułowanym w tym języku, podany został drugi spośród dwóch głównych rezultatów tej pracy. Wynik poprzedzony jest niezbędnymi definicjami. Ogólność sformułowań definicji wynika z faktu potrzeby wykorzystania ich w cytowanym twierdzeniu jak również w twierdzeniach następnego podrozdziału.

Niech $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$. Graf G jest nazywany $\mathcal{C}$ -grafem, jeżeli jest izomorficzny z K_1 lub $G = H[G_1, \dots, G_n]$ dla $H \in \mathcal{C}$ przy założeniu, że $G_1, \dots, G_n$ są $\mathcal{C}$ -grafami. Warto zauważyć, że jeżeli $\mathcal{C}$ jest klasą wszystkich co najmniej dwuwierzchołkowych grafów pierwszych bez wierzchołków dominujących, to pojęcie $\mathcal{C}$ -grafu jest równoważne pojęciu grafu dobrego. Twierdzenie 7, podobnie jak dla grafów dobrych, gwarantuje poprawność definicji $\mathcal{C}$ -grafu.

Klasa grafów $\mathcal{P}$ jest $\mathcal{C}$ -redukowalna nad $\mathbf{P}$, jeżeli $\mathcal{P}$ jest H -redukowalna nad $\mathbf{P}$, gdzie H jest $\mathcal{C}$ -grafem rzędu co najmniej dwa. W przeciwnym razie, $\mathcal{P}$ jest $\mathcal{C}$ -nieredukowalna nad $\mathbf{P}$. Każda H -faktoryzacja klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{P}$, gdzie H jest

$\mathcal{C}$ -grafem, jest nazywana $\mathcal{C}$ -faktoryzacją klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{P}$. Powiemy, że $\mathcal{C}$ -faktoryzacja klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{P}$ jest *nieredukowalna*, jeżeli wszystkie jej faktory są $\mathcal{C}$ -nieredukowalne nad $\mathbf{P}$.

W tym momencie należy podkreślić, że dla $H \in \mathbf{PRIME}$ pojęcia $\{H\}$ -redukowalności i H -redukowalności nad daną rodziną $\mathbf{P}$ są tożsame. Ponadto, wcześniejsze rozważania implikują, że $\{K_2\}$ -redukowalność nad $\mathbf{P}$ jest równoważna $\circ$ -redukowalności nad $\mathbf{P}$ oraz $\{\overline{K_2}\}$ -redukowalność nad $\mathbf{L}^a$ jest równoważna $\vee$ -redukowalności w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$.

Twierdzenie 9. *Niech $\mathcal{P}$ będzie klasą grafów i niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem grafów pierwszych, co najmniej dwuwierzchołkowych, bez wierzchołków dominujących. Jeżeli istnieje nieredukowalna $\mathcal{C}$ -faktoryzacja klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$ to jest to jedyna taka faktoryzacja klasy grafów $\mathcal{P}$.*

Warto zauważyć, że twierdzenie 9 implikuje główny rezultat pracy [52] i inne nieznanne fakty dotyczące klas grafów homomorficznych do ustalonego grafu, będącego homomorficznym rdzeniem.

2.2. Jednoznaczność $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -faktoryzacji nad $\mathbf{L}^c$. W drugiej spośród prac wchodzących w skład jednotematycznego cyklu [13] (współautor: Izak Broere) badana jest jednoznaczność faktoryzacji nad wcześniej wspomnianą klasą $\mathbf{L}^c$ klas grafów dziedzicznych i kompozycyjnych. Dwa najważniejsze rezultaty tego opracowania, zaprezentowane w języku faktoryzacji względem rodziny grafów pierwszych ($\mathcal{C}$ -faktoryzacji nad $\mathbf{L}^c$), rozwiązują problem postawiony w [24]. Wprowadzone w pracy pojęcie $\mathcal{C}$ -skończoności klasy grafów, dla $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$, umożliwiło badanie istnienia danej faktoryzacji przed postawieniem tez o jej jednoznaczności. Główna idea dowodu jednoznaczności faktoryzacji została zaczerpnięta z [24]. Część tej idei, $\overline{K_2}$ -redukowalność nad $\mathbf{L}^c$, przeciwieństwo do $\overline{K_2}$ -redukowalności nad $\mathbf{L}^a$, stanowi nowy kierunek badań.

Definicje i fakty cytowane w rozdziałach pierwszym i drugim pracy [13] zostały wcześniej zaprezentowane w niniejszym opracowaniu w ogólniejszej formie lub będą wspomniane w chwili odwoływania się do nich.

W pierwszym twierdzeniu rozdziału 3 (Theorem 3.1 w [13]), powołując się na wcześniejszy lemat, dowodzi się rozłączności klas grafów $\mathcal{C}_1$ -redukowalnych i $\mathcal{C}_2$ -redukowalnych nad $\mathbf{L}^c$ dla jednoelementowych, rozłącznych zbiorów $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbf{PRIME}$.

Twierdzenie 10. *Jeżeli klasa grafów $\mathcal{P}$ jest $\{H\}$ -redukowalna nad $\mathbf{L}^c$ dla pewnego grafu pierwszego H , to $\mathcal{P}$ jest $\{H_1\}$ -nieredukowalna nad $\mathbf{L}^c$ dla każdego grafu pierwszego H_1 , który nie jest izomorficzny z H .*

Poniżej przytaczamy definicję niezbędną w analizie dalszej części rozdziału 3 pracy [13].

Niech $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$. Klasa grafów $\mathcal{P}_1$ jest $\mathcal{C}$ -nieskończona nad $\mathbf{L}^c$, jeżeli istnieje nieskończony ciąg grafów H_i z $\mathcal{C}$ (powtórzenia są możliwe), $i \in \mathbb{N}$, i nieskończony ciąg dziedzicznych i kompozycyjnych klas grafów $\mathcal{P}_i$, $i \in \mathbb{N}$, takich że $H_i[\mathcal{P}_{i_1} = \mathcal{P}_{i+1}, \dots, \mathcal{P}_{i_{n_i}}]$ jest faktoryzacją klasy grafów $\mathcal{P}_i$ nad $\mathbf{L}^c$. W przeciwnym razie, $\mathcal{P}_1$ jest $\mathcal{C}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$.

Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbf{PRIME}$, to $\mathcal{C}_2$ -skończoność danej klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^c$ implikuje $\mathcal{C}_1$ -skończoność klasy $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^c$. Ponadto każda $\mathcal{C}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$ klasa grafów posiada nieredukowalną $\mathcal{C}$ -faktoryzację nad $\mathbf{L}^c$.

$\mathcal{C}$ -nieskończoność danej klasy grafów w zależności od klasy $\mathcal{C}$ jest analizowana w następnym twierdzeniu rozdziału 3 (Theorem 3.4 w [13]).

Twierdzenie 11. *Niech H_i , $i \in \mathbb{N}$, będzie nieskończonym ciągiem co najmniej dwuwierzchołkowych grafów pierwszych i niech $\mathcal{P}_i$, $i \in \mathbb{N}$, będą dziedzicznymi klasami grafów takimi że $H_i[\mathcal{P}_{i_1} = \mathcal{P}_{i+1}, \dots, \mathcal{P}_{i_{n_i}}]$ jest faktoryzacją $\mathcal{P}_i$ nad $\mathbf{L}$. Jeżeli istnieje nieskończony podciąg H_{n_i} , $i \in \mathbb{N}$, taki że $H_{n_i} \neq \overline{K_2}$ dla każdego i , to $\mathcal{P}_1$ jest trywialną klasą grafów $\mathcal{I}$.*

Powyższe twierdzenie i wcześniejsze rozważania pociągają za sobą dwa ważne wnioski (Corollaries 3.5, 3.6 w [13]).

Wniosek 4. *Jeżeli $\overline{K_2} \notin \mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$ i klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ jest nietrywialna, to $\mathcal{P}$ jest $\mathcal{C}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$.*

Wniosek 5. *Jeżeli $\overline{K_2} \notin \mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$ i klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ jest nietrywialna, to $\mathcal{P}$ posiada nieredukowalną $\mathcal{C}$ -faktoryzację nad $\mathbf{L}^c$.*

Rozdział 3 pracy [13] kończy dowód technicznego lematu (Lemma 3.7) cytowanego poniżej. Relację: być podgrafem w $\mathcal{I}$ oznaczamy symbolem $\subseteq$.

Lemat 4. *Niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ będzie $\{\overline{K_2}\}$ -nieredukowalną nad $\mathbf{L}^c$ klasą grafów i niech G_1 oraz G_2 będą dwoma spójnymi grafami, które są nieporównywalne w częściowo uporządkowanym zbiorze $(\mathcal{I}, \subseteq)$. Jeżeli $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{P}$, to istnieje spójny graf $G \in \mathcal{P}$, taki że $G_1 \cup G_2 \subseteq G$.*

Ponadto, jeżeli $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ jest $\{\overline{K_2}\}$ -nieredukowalna i $\{\overline{K_2}\}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$, to dla dowolnych dwóch spójnych grafów G_1 i G_2 spełniających $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{P}$ istnieje spójny graf $G \in \mathcal{P}$ taki, że $G_1 \cup G_2 \subseteq G$.

Rozdział 4 pracy skupia się głównie na dowodzie jednoznaczności $\mathcal{C}$ -faktoryzacji w wypadku gdy $\mathcal{C}$ jest jednoelementowym zbiorem zawierającym graf pierwszy. Część pierwsza tego rozdziału dowodzi, najtrudniejszego w świetle poprzednich rezultatów, przypadku gdy danym grafem pierwszym jest $\overline{K_2}$. Odpowiednie twierdzenie (Theorem 4.4 w [13]) poprzedzone jest trzema lematami (Lemmas 4.1, 4.2, 4.3 w [13]), które cytujemy poniżej.

Lemat 5. *Jeżeli $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ jest $\{\overline{K_2}\}$ -nieredukowalna i $\{\overline{K_2}\}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$, to klasa wszystkich spójnych grafów z $\mathcal{P}$ jest kompozycyjna.*

Lemat 6. *Niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ będzie $\{\overline{K_2}\}$ -nieredukowalna i $\{\overline{K_2}\}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$. Wówczas dla $\mathcal{P}$ istnieje (skończony lub nieskończony) uporządkowany zbiór generujący złożony wyłącznie z grafów spójnych.*

Lemat 7. *Niech $\mathcal{P}$ będzie nietrywialną klasą grafów, która jest $\{\overline{K_2}\}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$ oraz dla $n \geq 2$, niech $\overline{K_n}[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ będzie nieredukowalną właściwą $\{\overline{K_2}\}$ -faktoryzacją klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^c$. Wówczas nie istnieje żadna właściwa faktoryzacja klasy $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^c$ postaci $\overline{K_m}[\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_m]$, gdzie $m > n$.*

Twierdzenie 12. *Każda nietrywialna klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ która jest $\{\overline{K_2}\}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$ posiada jedyną właściwą nieredukowalną $\{\overline{K_2}\}$ -faktoryzację nad $\mathbf{L}^c$.*

Przechodząc z badania jednoznaczności $\{\overline{K_2}\}$ -redukowalności do badania jednoznaczności $\{H\}$ -redukowalności, przy założeniu, że H jest grafem pierwszym, otrzymujemy rezultat przytoczony poniżej (Theorem 4.6 w [13]). Odpowiednie twierdzenie poprzedzone będzie technicznym i jednocześnie kluczowym lematem (Lemma 4.5 w [13]).

Lemat 8. *Niech H będzie grafem pierwszym bez wierzchołków dominujących oraz $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 4$. Niech G będzie ustalonym grafem, $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \in \mathbf{L}^c$, i niech $(V_1, \dots, V_n)$ będzie $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podziałem grafu $G^* \in M^*(H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n])$. Niech $X_k = G^*[V_k]$ jeżeli $G \notin \mathcal{P}_k$, i niech X_k będzie grafem z klasy $\mathcal{P}_k$ zawierającym oba grafy $G^*[V_k]$ i G jako podgrafy jeżeli $G \in \mathcal{P}_k$, i niech $\hat{G} = H[X_1, \dots, X_n]$. Wówczas każdy $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ -podział grafu $\hat{G}$ jest postaci $(V(X_{\varphi(1)}), \dots, V(X_{\varphi(n)}))$*

gdzie φ jest automorfizmem grafu H spełniającym $G \in \mathcal{P}_{\varphi(i)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \in \mathcal{P}_i$.

Twierdzenie 13. *Niech H będzie co najmniej 3-wierzchołkowym grafem pierwszym bez wierzchołków dominujących. Jeżeli klasa grafów $\mathcal{P}$ posiada właściwą $\{H\}$ -faktoryzację nad $\mathbf{L}^c$, to jest to jedyna taka faktoryzacja.*

Rozdział 5 pracy, zgodnie ze swym tytułem, zawiera dwa główne twierdzenia (Theorems 5.1, 5.2 w [13]). Przypomnieć należy, że w dowodach tych faktów wykorzystano wszystkie poprzednie wyniki pracy oraz rezultat udowodniony w [33, 34], że każda nietrywialna klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ posiada jedyną nieredukowalną właściwą $\{K_2\}$ -faktoryzację nad $\mathbf{L}^c$.

Twierdzenie 14. *Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem grafów pierwszych bez wierzchołków dominujących i niech $\overline{K_2} \notin \mathcal{C}$. Każda nietrywialna klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ posiada jedyną właściwą nieredukowalną $\mathcal{C}$ -faktoryzację nad $\mathbf{L}^c$.*

Twierdzenie 15. *Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem grafów pierwszych bez wierzchołków dominujących. Jeżeli nietrywialna klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}^c$ jest $\mathcal{C}$ -skończona nad $\mathbf{L}^c$, to posiada jedyną właściwą nieredukowalną $\mathcal{C}$ -faktoryzację nad $\mathbf{L}^c$.*

Twierdzenie 11 cytowane w niniejszym opracowaniu zostało sformułowane dla klas grafów z $\mathbf{L}$. Daje to możliwość zastosowania go nie tylko do rodziny $\mathbf{L}^c$ ale również do rodziny $\mathbf{L}^a$. Takie rozumowanie, po wprowadzeniu definicji $\mathcal{C}$ -nieskończoności klasy grafów nad $\mathbf{L}^a$, pozwala zrezygnować w twierdzeniu 9 z założenia o istnieniu odpowiedniej faktoryzacji. Ściśle mówiąc istnienie $\mathcal{C}$ -faktoryzacji spełniającej założenia twierdzenia, jest zagwarantowane dla $\mathcal{C}$ nie zawierającego $\overline{K_2}$ i implikowane w przeciwnym przypadku przez założenie $\mathcal{C}$ -skończoności nad $\mathbf{L}^a$ faktoryzowanej klasy grafów.

2.3. Rodziny grafów zabronionych klas grafów $\{\overline{K_2}\}$ -redukowalnych nad $\mathbf{L}^a$. Jak wspominaliśmy wcześniej, dla danej klasy grafów, pojęcia $\overline{K_2}$ -redukowalności nad $\mathbf{L}^a$ i $\vee$ -redukowalności w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ pokrywają się (niewątpliwie warunkiem koniecznym dla takiej tożsamości jest addytywność). Ponieważ $K_2 \in \mathbf{PRIME}$, to uwaga poczyniona przed twierdzeniem 9 implikuje, że wyniki kolejnej pracy [21] jednotematycznego cyklu, sformułowane w języku supremów w kracie $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$, stanowią wkład w badania dotyczące $\mathcal{C}$ -redukowalności klas grafów. Dokładniej, jest to szczególnie przypadek $\mathcal{C} = \{\overline{K_2}\}$.

W dalszej części rozważań przyjmujemy oznaczenia: $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{I} \setminus \mathcal{P}$, oraz dla danych $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{L}^a$:

$$A_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2} = \{G \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2) : G \in (\mathbf{F}(\mathcal{P}_1) \cap \overline{\mathcal{P}_2}) \cup (\mathbf{F}(\mathcal{P}_2) \cap \overline{\mathcal{P}_1})\},$$

$$B_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2} = \{G \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2) \setminus A_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2} : \text{dla każdej krawędzi } e \in E(G), G - e \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2\},$$

$$C_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2} = \{G \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2) : \text{istnieje krawędź } e \in E(G), \text{ taka że } G - e \in \overline{\mathcal{P}_1} \cap \overline{\mathcal{P}_2}\}.$$

Jest jasne, że $(A_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2}, B_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2}, C_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2})$ jest podziałem rodziny $\mathbf{F}(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2)$ dla danych $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{L}^a$.

Niech $G_1 v_1 \xleftrightarrow{k} v_2 G_2$ oznacza graf otrzymany z rozłącznych grafów G_1, G_2 przez połączenie ustalonego wierzchołka v_1 grafu G_1 i ustalonego wierzchołka v_2 grafu G_2 drogą k -krawędziową (długości k). Jeżeli wybór wierzchołków v_1, v_2 nie ma znaczenia to używamy symboliki $G_1 \xleftrightarrow{k} G_2$.

Pierwszy rezultat omawianej pracy (Lemma 2 w [21]) pokazuje jak, przy odpowiednich założeniach, zbudowane są grafy rodziny $C_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2}$.

Lemat 9. Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in L^a$ będą dwoma nieporównywalnymi w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasami grafów. Wówczas każdy graf $G \in C_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2}$ jest postaci $G_1 \xleftrightarrow{k} G_2$, gdzie $G_1 \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{P}_2$ oraz $G_2 \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_2) \cap \mathcal{P}_1$.

W następnym lemacie pracy (Lemma 3 w [21]) badana jest skończoność rodziny $B_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2}$ w zależności od skończoności rodzin grafów zabronionych dla $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$.

Lemat 10. Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in L^a$ będą dwoma nieporównywalnymi w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasami grafów. Jeżeli $\mathbf{F}(\mathcal{P}_1) \cup \mathbf{F}(\mathcal{P}_2)$ jest zbiorem skończonym, to $B_{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2}$ jest również zbiorem skończonym.

Kolejne twierdzenie (Theorem 4 w [21]) znajduje warunek wystarczający dla nieskończoności rodziny grafów zabronionych supremum dwóch nieporównywalnych w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klas grafów.

Twierdzenie 16. Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in L^a$ będą dwoma nieporównywalnymi w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasami grafów i niech dla każdego grafu $G \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1) \cup \mathbf{F}(\mathcal{P}_2)$ zachodzi $\delta(G) \geq 2$. Wówczas $\mathbf{F}(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2)$ jest rodziną nieskończoną.

Ostatni spośród faktów udowodnionych w analizowanej pracy (Theorem 5 w [21]) pokazuje zależność skończoności rodziny grafów zabronionych dla supremum w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ od relacji między co najmniej jedną z klas grafów dla której wyznaczane jest supremum i klasą $\mathcal{O}_k$. Należy wspomnieć, że $\mathcal{O}_k = \{G \in \mathcal{I} : \text{każda składowa spójności grafu } G \text{ zawiera co najwyżej } k + 1 \text{ wierzchołków}\}$.

Twierdzenie 17. *Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{L}^a$ będą dwoma nieporównywalnymi w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasami grafów. Jeżeli istnieje liczba naturalna k , taka że $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{O}_k$, to $\mathbf{F}(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2)$ jest rodziną skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{F}(\mathcal{P}_2)$ jest rodziną skończoną.*

2.4. Rodziny grafów zabronionych klas grafów H -faktoryzowalnych nad $\mathbf{L}^a$.

Niech H będzie dowolnym, co najmniej dwuwierzchołkowym, grafem. Nieskończoność rodzin grafów zabronionych dla H -faktoryzowalnych klas grafów jest przedmiotem badań kolejnej pracy [22], wchodzącej w skład jednotematycznego cyklu. Przypomnijmy, że jeżeli klasa grafów $\mathcal{P}$ jest H -faktoryzowalna nad $\mathbf{L}^a$ dla pewnego ustalonego grafu H to jest też $\mathcal{C}$ -faktoryzowalna nad $\mathbf{L}^a$ dla zbioru $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$ zawierającego co najmniej jeden graf pierwszy, użyty jako pierwszy w jednoznacznej dekompozycji grafu H ze względu na uogólniony produkt leksykograficzny (patrz twierdzenie 7). Z drugiej strony jeżeli $\mathcal{C}$ zawiera nawet wszystkie grafy pierwsze, z których zgodnie z twierdzeniem 7 jednoznacznie wyprodukowano H , to $\mathcal{C}$ -faktoryzowalność klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$ nie gwarantuje H -faktoryzowalności $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$. Sytuacja staje się bardziej klarowna dla jednoelementowych zbiorów $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$. W szczególności $\{\overline{K_2}\}$ -faktoryzowalność klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$ jest równoważna $\overline{K_2}$ -faktoryzowalności nad $\mathbf{L}^a$. Fakt, że $\overline{K_2}$ -redukowalność nad $\mathbf{L}^a$ implikuje $\overline{K_2}$ -faktoryzowalność nad $\mathbf{L}^a$ pozwoli nam w tej części opracowania skorzystać z wyników pracy [21].

Rozdział 2 pracy [22] całkowicie rozstrzyga problem skończoności rodzin grafów zabronionych klas grafów H -faktoryzowalnych nad $\mathbf{L}^a$, dla grafów H bez wierzchołków izolowanych. W dowodzie i treści odpowiedniego rezultatu (Theorem 3 w [22]) odwołujemy się do pojęcia cyklicznego bloku grafu czyli bloku grafu różnego od K_2 . W pracy [3] udowodniono to twierdzenie w przypadku $H = K_n$, $n \geq 2$. Po analizie metody dowodu zastosowanej w [3] okazało się, że rozumowanie to można wykorzystać również w ogólnym przypadku.

Twierdzenie 18. *Niech H będzie grafem bez wierzchołków izolowanych i niech $\mathcal{P}$ będzie H -faktoryzowalną nad $\mathbf{L}^a$ nietrywialną klasą grafów. Wówczas zbiór wszystkich cyklicznych bloków grafów z rodziny $\mathbf{F}(\mathcal{P})$, jest nieskończony i stąd $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ jest rodziną nieskończoną.*

W następnym twierdzeniu pracy (Theorem 7 w [22]) podany został warunek dostateczny dla nieskończoności rodziny grafów zabronionych w przypadku klasy grafów H -faktoryzowalnej nad $\mathbf{L}^a$ gdy H posiada wierzchołki izolowane. Rezultat ten

poprzedzono dwoma nowymi lematami (Lemmas 4, 5 w [22]) i twierdzeniem 16 z niniejszego opracowania. Zauważmy, że H -faktoryzacja, której istnienie zakładamy w tym twierdzeniu musi być właściwa w przeciwieństwie do faktoryzacji, której istnienie założyliśmy w twierdzeniu 18.

Lemat 11. *Niech $\overline{K_n}[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$, $n \in \mathbb{N}$, będzie faktoryzacją klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$. Jeżeli dla każdego $F \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1) \cup \dots \cup \mathbf{F}(\mathcal{P}_n)$ spełniony jest warunek $\delta(F) \geq 2$ to dla każdego $F^* \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ zachodzi $\delta(F^*) \geq 2$.*

Lemat 12. *Niech H będzie co najmniej dwuwierzchołkowym spójnym grafem i niech $\mathcal{P}$ będzie klasą grafów, która jest H -faktoryzowalna nad $\mathbf{L}^a$. Wówczas dla dowolnego $F \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ spełniony jest warunek $\delta(F) \geq 2$.*

Twierdzenie 19. *Niech $H = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ będzie grafem, $n \geq 2$, i niech $H[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ będzie właściwą H -faktoryzacją klasy grafów $\mathcal{P}$ nad $\mathbf{L}^a$ spełniającą warunek, że dla każdego $i \in [n]$ dla którego $\deg_H(v_i) = 0$ i dowolnego $F \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_i)$ zachodzi $\delta(F) \geq 2$. Wówczas rodzina $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ jest nieskończona.*

Podsumowując prezentowane przed chwilą rezultaty zauważmy, że jeżeli klasa grafów $\mathcal{P}$ jest H -redukowalna nad $\mathbf{L}^a$, dla dowolnego, co najmniej dwuwierzchołkowego grafu H , to w wielu przypadkach otrzymujemy nieskończoność rodziny grafów zabronionych dla $\mathcal{P}$. W nierozstrzygniętym przypadku $\mathcal{P}$ musi być klasą grafów $\overline{K_2}$ -redukowalną nad $\mathbf{L}^a$ ($\mathcal{P}$ jest supremum dwóch nieporównywalnych w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klas grafów $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$). Ponadto co najmniej jedna spośród tych klas, powiedzmy $\mathcal{P}_1$, jest nieredukowalna nad $\mathbf{L}^a$ i istnieje $F \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1)$ spełniający $\delta(F) = 1$. Twierdzenia otrzymane w rozdziale 3 pracy [22] nawiązują do tej otwartej tematyki.

Nieoczekiwanie, badania w wyżej wspomnianym zakresie, mają związek ze znanym parametrem, rankingiem grafu. Z definicjami i faktami wykorzystanymi w pracy [22] z zakresu tej tematyki można zapoznać się w [41, 45, 48]. Niech $\mathcal{B}_k$ oznacza zbiór wszystkich grafów, których rdzeń, zdefiniowany w [48] (definicję powielono w [22]), ma liczbę rankingową nie większą niż k . Niech ponadto dla $i \in \{1, 2\}$, graf G_i będzie drogą długości dwa i v_i jego wierzchołkiem stopnia dwa. Przez H_m oznaczamy graf $G_1 v_1 \xleftrightarrow{m} v_2 G_2$.

Pierwszy nowy fakt (Corollary 11 w [22]) odnotowany w rozdziale 3 pracy jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia dowiedzionego w [48].

Wniosek 6. *Niech $\mathcal{G}$ będzie zbiorem grafów takim, że $\mathcal{G}$ nie zawiera się w $\mathcal{B}_k$ dla żadnego naturalnego k . Niech ponadto $\mathcal{P}$ będzie klasą grafów generowaną przez $\mathcal{G}$.*

Wówczas $\mathcal{P}$ zawiera nieskończoną rodzinę cykli $\{C_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ lub nieskończoną rodzinę grafów $\{H_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$.

Bazując na twierdzeniu o dobrym quasi-uporządkowaniu zbioru $(\mathcal{B}_k, \subseteq)$ [48] podane zostało następujące twierdzenie (Theorem 13 w [22]) charakteryzujące klasy grafów z $\mathbf{L}$ mające nieskończone rodziny grafów zabronionych.

Twierdzenie 20. *Niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}$. Rodzina $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ jest nieskończona wtedy i tylko wtedy gdy grafy z $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ zawierają jako podgrafy nieskończoną rodzinę $\{C_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ lub nieskończoną rodzinę $\{H_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$.*

Powyższy rezultat, interesujący w swym ogólnym sformułowaniu, okazuje się mieć zastosowanie w dowodzie poniższego lematu (Lemma 14 w [22]), który z kolei wspiera dowód pierwszego z twierdzeń odnoszącego się do nierozstrzygniętych przypadków problemu rozważanego w poprzednim rozdziale omawianej pracy.

Lemat 13. *Niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}$ i niech dla pewnego naturalnego k , droga k -wierzchołkowa będzie grafem zabronionym dla $\mathcal{P}$. Wówczas rodzina $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ jest skończona.*

Twierdzenie 21. *Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ będą dwoma nieporównywalnymi w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasami grafów. Jeżeli dla pewnego naturalnego k , droga k -wierzchołkowa jest grafem zabronionym dla $\mathcal{P}_1$ to rodzina $\mathbf{F}(\overline{K_2}[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2])$ jest skończona wtedy i tylko wtedy gdy rodzina $\mathbf{F}(\mathcal{P}_2)$ jest skończona.*

Warto dodać, że twierdzenie 21 uogólnia twierdzenie 17. Jest tak ponieważ $\mathbf{F}(\mathcal{O}_k)$ zawiera drogę $k + 2$ wierzchołkową.

Niestety, problemu charakterystyki klas grafów H -faktoryzowalnych nad $\mathbf{L}^a$ i posiadających skończone rodziny grafów zabronionych nie udało się w całości rozwiązać. Ostatnie twierdzenie omawianej pracy (Theorem 16 w [22]) pokazuje tylko warunki, które muszą spełniać klasy grafów stanowiące, w tym zakresie, nierozstrzygnięte przypadki.

Twierdzenie 22. *Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ będą dwoma nieporównywalnymi w $(\mathbf{L}^a, \subseteq)$ klasami grafów i niech rodziny $\mathbf{F}(\mathcal{P}_1), \mathbf{F}(\mathcal{P}_2)$ będą nieskończone. Jeżeli rodzina $\mathbf{F}(\overline{K_2}[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2])$ jest skończona, to istnieją grafy $F^{**} \in \mathbf{F}(\overline{K_2}[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]) \cap \mathbf{F}(\mathcal{P}_i)$ oraz $F_2 \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_j)$, takie że $\delta(F^{**}) = \delta(F_2) = 1$, gdzie i, j są różnymi indeksami.*

2.5. Generowanie klas grafów względem zbiorów grafów pierwszych. Niech dany będzie dowolny graf G . Oznaczmy przez $Z(G)$ zbiór wszystkich grafów $H \in \mathbf{PRIME}$, które są grafami bazowymi w jednoznacznej dekompozycji grafu G ze względu na uogólniony produkt leksykograficzny, którą gwarantuje twierdzenie 7. Oznaczmy ponadto przez $Z^*(G)$ zbiór wszystkich indukowanych podgrafów grafów z $Z(G)$, należących do $\mathbf{PRIME}$. W ostatniej, z jednotematycznego cyklu publikacji [25], eksploatujemy relację częściowego porządku " $\leq$ " być podgrafem indukowanym w klasie $\mathcal{I}$. Fakt ten zasadniczo różni analizowaną pracę od poprzednich, gdzie skupialiśmy się na porządku " $\subseteq$ " być podgrafem w $\mathcal{I}$.

Pierwszą, niezwykle użyteczną w dowodach dalszych twierdzeń, obserwacją analizowanej pracy jest następujący lemat (Lemma 1 w [25]).

Lemat 14. *Niech $G, G' \in \mathcal{I}$ i niech $G' \in \mathbf{PRIME}$. Wówczas $G' \leq G$ wtedy i tylko wtedy gdy $G' \in Z^*(G)$.*

Dla $C \in \mathbf{PRIME}$ i ciągu nieetykietowanych grafów $G_1, \dots, G_{|V(C)|}$, które mogą być izomorficzne, oznaczmy przez $\varphi_C(G_1, \dots, G_{|V(C)|})$ zbiór wszystkich uogólnionych produktów leksykograficznych $C[G_1, \dots, G_{|V(C)|}]$ generowanych po wszystkich możliwych uporządkowaniach zbioru $V(C)$. Przez $I(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ rozumiemy klasę wszystkich grafów, które możemy otrzymać z grafów z $\mathcal{B}$ stosując rekurencyjnie operację φ_C z założeniem, że $C \in \mathcal{C}$. W szczególnym przypadku, jeżeli $\mathcal{B} = \{K_1\}$ i $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$ to $I(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ jest rodziną wszystkich $\mathcal{C}$ -grafów.

Klasy grafów definiowane rekurencyjnie są od dawna znane w literaturze [1, 5, 29, 40]. Zainteresowanie takimi klasami wynika głównie ze względów algorytmicznych. Efektywność algorytmów dla problemów zawężonych do klas grafów definiowalnych rekurencyjnie zależy od efektywności rozwiązania tego problemu na grafach podstawowych i efektywności wiązania tych rozwiązań w rozwiązanie całościowe. Definicja rekurencyjna klasy grafów nie zapewnia jej dziedziczności a nawet jej indukowanej dziedziczności. W pierwszym rozdziale pracy [25] podano warunek wystarczający dla faktu $I(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathbf{L}_{\leq}$. Co więcej klasy spełniające ten warunek scharakteryzowano rodziną $\mathbf{C}(\mathcal{P})$.

Zbiór $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{PRIME}$ jest nazywany *pierwszo-indukowanie dziedzicznym* jeżeli $G \in \mathcal{A}$ implikuje $Z^*(G) \subseteq \mathcal{A}$. Niestety warunek, że $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ są zbiorami grafów pierwszych, pierwszo-indukowanie dziedzicznych nie pociąga za sobą faktu $I(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathbf{L}_{\leq}$ (patrz przykład w [25]). Poniższe twierdzenie (Theorem 2 w [25]), poprzedzone lematem (Lemma 2 w [25]) podaje warunek wystarczający dla tego stwierdzenia.

Lemat 15. *Niech $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ będą zbiorami grafów pierwszych, które są pierwszo-indukowanie dziedziczne. Niech ponadto $K_1 \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ oraz $\{K_2, \overline{K_2}\} \subseteq \mathcal{C}$. Wówczas $F \in \mathbf{PRIME} \cap I(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ wtedy i tylko wtedy gdy $F \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.*

Niech $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ będą zbiorami grafów, które są pierwszo-indukowanie dziedziczne. Przez $\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ oznaczamy klasę grafów $\bigcup_G (\varphi_G(K_2, K_1, \dots, K_1) \cup \varphi_G(\overline{K_2}, K_1, \dots, K_1))$, gdzie suma jest wzięta po wszystkich grafach G , które są elementami minimalnymi w częściowo uporządkowanym zbiorze $(\mathcal{B} \setminus (\mathcal{C} \cup \{K_1\}), \leq)$.

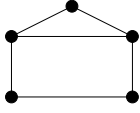
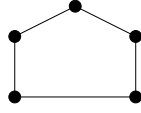
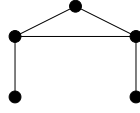
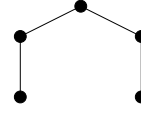
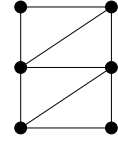
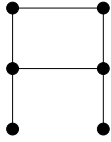
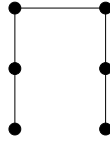
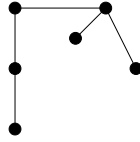
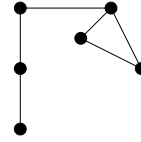
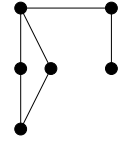
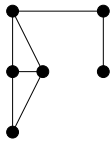
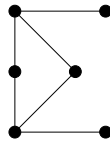
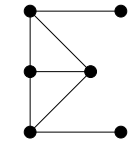
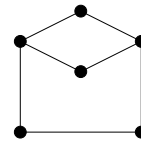
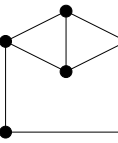
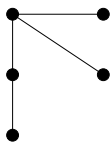
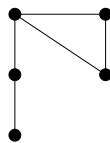
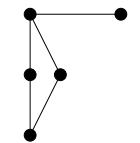
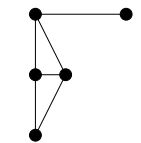
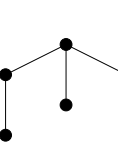
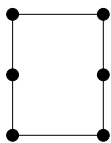
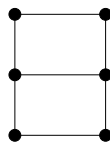
Twierdzenie 23. *Niech $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ będą zbiorami grafów pierwszych, które są pierwszo-indukowanie dziedziczne, $K_1 \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ i niech $\{K_2, \overline{K_2}\} \subseteq \mathcal{C}$. Jeżeli warunki $H' \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ oraz $H \in \mathcal{B}$ pociągają za sobą warunek $H' \not\leq H$, to $I(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathbf{L}_{\leq}$.*

Twierdzenie 24. *Niech $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ będą zbiorami grafów pierwszych, które są pierwszo-indukowanie dziedziczne. Niech ponadto $K_1 \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ oraz $\{K_2, \overline{K_2}\} \subseteq \mathcal{C}$. Jeżeli warunki $H' \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ oraz $H \in \mathcal{B}$ pociągają za sobą warunek $H' \not\leq H$, to $\mathbf{C}(I(\mathcal{B}, \mathcal{C})) = \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cup \min_{\leq}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cup (\mathbf{PRIME} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})))$.*

W dalszej części rozdziału 2 pracy podano w twierdzeniach 25, 26 (Theorems 4, 5, 6 w [25]) i w tabeli wiele przykładów zastosowania twierdzenia 24. Wszystkie te rezultaty cytujemy poniżej wraz z niezbędną w ich zrozumieniu listą grafów (Rysunek 1).

Każdy z wierszy tabeli odpowiada twierdzeniu wskazującemu dla danych $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ rodzinę $\mathbf{C}(I(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$.

$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathbf{C}(I(\mathcal{B}, \mathcal{C})) = \{Q_i : i \in J\}$
$\{K_1, K_2, \overline{K_2}, P_4\}$	$\{K_2, \overline{K_2}\}$	$J = \{1, 2, 3, 4, 16, 17, 18, 19\}$
$\{K_1, K_2, \overline{K_2}, P_4, P_5\}$	$\{K_2, \overline{K_2}\}$	$J = \{1, 2, 3, 7, 16, 17, 18, 19, 21\}$
$\{K_1, K_2, \overline{K_2}, P_4, C_5\}$	$\{K_2, \overline{K_2}\}$	$J = \{1, 3, 4, 16, 17, 18, 19\}$
$\{K_1, K_2, \overline{K_2}, P_4, C_5\}$	$\{K_2, \overline{K_2}, P_4\}$	$J = \{1, 3, 4, 5, 6, 14, 15\}$
$\{K_1, K_2, \overline{K_2}, P_4, P_5\}$	$\{K_2, \overline{K_2}, P_4\}$	$J = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22\}$

 $Q_1 = H_s$  $Q_2 = C_5$  Q_3  $Q_4 = P_5$  Q_5  Q_6  Q_7  Q_8  Q_9  Q_{10}  Q_{11}  Q_{12}  Q_{13}  Q_{14}  Q_{15}  Q_{16}  Q_{17}  Q_{18}  Q_{19}  Q_{20}  Q_{21}  Q_{22}

Twierdzenie 25. *Niech $G^* \in \mathbf{PRIME}$ będzie grafem co najmniej 4-wierzchołkowym, $M = \varphi_{G^*}(K_2, K_1, \dots, K_1) \cup \varphi_{G^*}(\overline{K_2}, K_1, \dots, K_1)$ oraz niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$. Wówczas $\mathbf{C}(\mathcal{P}) = M$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{P} = I(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, gdzie $\mathcal{B} = \{G \in \mathbf{PRIME} : \text{dla każdego } G' \in M \text{ zachodzi } G' \not\leq G\} \cup \{K_1\}$ oraz $\mathcal{C} = \{G \in \mathbf{PRIME} : G^* \not\leq G\}$.*

Twierdzenie 26. *Niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$. $\mathbf{C}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbf{PRIME}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje zbiór $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$, który jest pierwszo-indukowane dziedziczny taki że $\mathcal{P} = I(\{K_1\}, \mathcal{C})$.*

Rozdział 4 pracy [25] poświęcony jest rodzinie $\mathbf{L}_{\leq}^*$ klas grafów, które są indukowanie dziedziczne i zamknięte ze względu na uogólniony produkt leksykograficzny.

W [38] Giakoumakis rozważał dla danej klasy grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$ jej domknięcie $\mathcal{P}^*$ ze względu na uogólniony produkt leksykograficzny. Przy zadanym $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$, dla jednoznacznie wyznaczonej klasy grafów $\mathcal{P}^*$, autor opisał na bazie rodziny $\mathbf{C}(\mathcal{P})$ rodzinę $\mathbf{C}(\mathcal{P}^*)$. Wyniki tej pracy pozwalają sformułować uwagę, że o ile klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$ to warunek $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}^*$ jest równoważny warunkowi $\mathbf{C}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbf{PRIME}$. Fakt ten i twierdzenie 26 implikują następujący wniosek (Corollary 1 w [25]).

Wniosek 7. *$\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}^*$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{P} = I(\{K_1\}, \mathcal{C})$ dla pewnego pierwszo-indukowanie dziedzicznego zbioru $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$.*

Wynika stąd, że jeżeli klasa grafów $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$ ma choćby jeden graf zabroniony, który nie jest pierwszy, to nie jest klasą typu $I(\{K_1\}, \mathcal{C})$ dla żadnego $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$. Stanowi to motywację do poszukiwań maksymalnych, ze względu na inkluzję, podklas klasy $\mathcal{P}$, które posiadają taki opis. W odróżnieniu od minimalnej nadklasy maksymalna podklasa z $\mathbf{L}_{\leq}^*$ klasy $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$ może nie być jedyną (przykład w [25]). Aby sformułować rezultaty z zakresu tej tematyki (Lemma 5, Theorem 7 w [25]) musimy przypomnieć dwie definicje i skorzystać z faktu udowodnionego w [11], wskazującego relację między rodzinami minimalnych indukowanych grafów zabronionych dla klas grafów, z których jedna zawiera się w drugiej.

Niech $\mathbf{P}$ będzie rodziną klas grafów. Klasa grafów $\mathcal{T}$ jest nazywana *transwersalą* (odpowiednio, *nieporównywalną transwersalą*) rodziny $\mathbf{P}$, jeżeli dla każdego $\mathcal{P} \in \mathbf{P}$ zachodzi $\mathcal{T} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ (odpowiednio, $\mathcal{T} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{T}$ jest antylańcuchem w $(\mathcal{I}, \leq)$).

Lemat 16. *Niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$. Klasa grafów $\mathcal{Q} \in \mathbf{L}_{\leq}^*$ spełnia warunek $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{C}(\mathcal{Q})$ jest nieporównywalną transwersalą rodziny $\{Z^*(F) : F \in \mathbf{C}(\mathcal{P})\}$.*

Niech $\mathcal{K}, \mathcal{M}$ będą dwoma antyłańcuchami w częściowo uporządkowanym zbiorze $(\mathcal{I}, \leq)$. Powiemy, że $\mathcal{K} \rho \mathcal{M}$, jeżeli dla każdego $F \in \mathcal{M}$ istnieje $F' \in \mathcal{K}$ taki, że $F' \leq F$. Łatwo zauważyć, że ρ jest częściowym porządkiem w klasie wszystkich antyłańcuchów w $(\mathcal{I}, \leq)$, co wraz z wcześniej przytoczonymi faktami pozwala sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 27. *Niech $\mathcal{P} \in \mathbf{L}_{\leq}$ oraz niech $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ będzie klasą wszystkich nieporównywalnych transversal rodziny $\{Z^*(F) : F \in \mathbf{C}(\mathcal{P})\}$. Klasa grafów $\mathcal{Q}$ jest maksymalnym w sensie relacji $\leq$ elementem z $\mathbf{L}_{\leq}^*$, który jest zawarty w $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{C}(\mathcal{P})$ jest maksymalnym elementem w $(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}, \rho)$.*

W rozdziale 5 pracy umieszczono krótki komentarz na temat związków prezentowanych wcześniej wyników ze znanym niezmiennikiem grafowym, szerokością klikową. Pojęcie szerokości klikowej $cwd(G)$ danego grafu G jest definiowane w [17] jako najmniejsza możliwa liczba etykiet potrzebna do skonstruowania grafu G przez użycie czterech operacji:

- kreowanie nowego wierzchołka v z etykietą i ,
- branie rozłącznej sumy dwóch zaetykietowanych grafów,
- wykonanie operacji złączenia na podgrafach indukowanych przez wierzchołki z etykietą i oraz wierzchołki z etykietą j ,
- przemianowanie etykiety i na j .

Jest rzeczą znaną, że wiele algorytmów grafowych działa efektywnie na grafach z ograniczoną szerokością klikową. Fakt ten przestaje dziwić w kontekście spostrzeżeń prezentowanych poniżej.

W 2000 Courcelle i Olariu [18] opublikowali rezultat, który stwierdzał że dla każdego grafu G , $cwd(G) = \max\{cwd(H) : H \leq G \text{ oraz } H \in \mathbf{PRIME}\}$. Stąd lemat 14 pozwala wyciągnąć wniosek, że $cwd(G) = \max\{cwd(H) : H \in Z^*(G)\}$. W świetle tego faktu, jeżeli dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy CWD_k jako klasę $\{G \in \mathcal{I} : cwd(G) \leq k\}$, to definicja klasy $I(\{K_1\}, \mathcal{C})$ i twierdzenie 26 implikują, że jeżeli $k \in \mathbb{N}$, to

- (1) $CWD_k = I(\{K_1\}, \mathcal{C})$, gdzie $\mathcal{C} = \{G \in \mathbf{PRIME} : cwd(G) \leq k\}$, oraz
- (2) $\mathbf{C}(CWD_k) \subseteq \mathbf{PRIME}$.

Następny rozdział pracy pokazuje, że klasy $\mathcal{C}$ -grafów definiowane dla zbiorów $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}$ dają się opisać w języku struktur algebraicznych (Theorems 8, 9 w [25]).

Niech $\mathcal{C}^* = \{I(\{K_1\}, \mathcal{C}) : \mathcal{C} \subseteq \mathbf{PRIME}\}$.

Twierdzenie 28. $(\mathcal{C}^*, \subseteq)$ jest algebrą Boole’a.

Twierdzenie 29. $(\mathbf{L}_{\leq}^*, \subseteq)$ jest podkratką rozdzielną kraty $(\mathcal{C}^*, \subseteq)$.

Ostatni rezultat pracy [25] jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzeń 1, 28, 29.

Wniosek 8. Niech $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ będą $\vee$ -nieredukowalnymi w $(\mathbf{L}_{\leq}^*, \subseteq)$ (odpowiednio w $(\mathcal{C}^*, \subseteq)$) klasami grafów. Jeżeli $\bigvee_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \mathcal{P}$, przy czym żaden element $\mathcal{P}_i$ nie może być pominięty w tej reprezentacji, to jest to jedyna reprezentacja klasy grafów $\mathcal{P}$ jako supremum skończonej liczby $\vee$ -nieredukowalnych klas grafów w $(\mathbf{L}_{\leq}^*, \subseteq)$ (odpowiednio w $(\mathcal{C}^*, \subseteq)$), w której żadna klasa nie może być pominięta.

Warto zauważyć, że otrzymana w powyższym wniosku jednoznaczność faktoryzacji klasy grafów nie ma związku z podziałami zbioru wierzchołków grafów z tych klas.

3. PODSUMOWANIE

Wierzchołkowe podziały grafów spełniające ustalone założenia stanowią jedną z fundamentalnych koncepcji teorii grafów. Bardzo często analizuje się je jako zagadnienie rozpoznawania klasy grafów wierzchołkowo kolorowalnych względem pewnych reguł. W jednotematycznym cyklu publikacji prezentowanym w poprzednim rozdziale niniejszego opracowania rozwiązane zostały pewne problemy opisu takich klas w aspektach jednoznaczności reguł kolorowania i oceny liczności rodziny grafów zabronionych. Najważniejszymi otrzymanymi rezultatami z tego zakresu są:

- twierdzenia 8, 9, 14, 15 o jednoznaczności faktoryzacji (reguł kolorowania),
- twierdzenia 18, 19, 21 o nieskończoności rodzin grafów zabronionych.

Wyniki te uogólniają rezultaty z [3, 4, 52, 58, 34]. Badania podobnego typu, szczegółowo opisane we wstępie autoreferatu, można ponadto znaleźć w [33, 35, 57, 72]. Pamiętajmy, że grafy zabronione lub indukowane grafy zabronione dla $\{K_2\}$ -faktoryzowalnych klas grafów (szczególny przypadek $\{H\}$ -faktoryzowalnych klas grafów) są również znane jako wierzchołkowe grafy Ramseya. Ich badanie związane jest z analizą dwuhipergrafów dwudzielnych [73] i częściowo z analizą hipergrafów Bernsteina.

Teoria grafów, jak każda inna dziedzina matematyki, dąży do prostoty opisu badanych obiektów. W tym kontekście grafy niedekomponowalne ze względu na ustalone

reguły dekompozycji stanowią ważny obiekt badań. Wśród nich, głównie ze względu na aspekt algorytmiczny, wyróżnione zostały grafy niedekomponowalne ze względu na uogólniony produkt leksykograficzny. O znaczeniu tych grafów świadczy fakt, że uzyskały miano grafów pierwszych przez analogię do liczb pierwszych, których wagi w teorii liczb nie jesteśmy w stanie przecenić.

W niniejszym opracowaniu użyto, w cytowanych już twierdzeniach 9, 14, 15, pojęcia grafu pierwszego w opisie jednoznaczności faktoryzacji odpowiadającej wierzchołkowym podziałom grafów.

Ważnymi rezultatami jednotematycznego cyklu publikacji, wykorzystującymi pojęcie grafu pierwszego do opisu jednoznaczności faktoryzacji klas grafów kreowanej przez kraty dystrybtywne, są:

- twierdzenia 28, 29 i wniosek 8.

Grafy pierwsze zastosowano również w celu rekurencyjnego generowania indukowania dziedzicznych klas grafów a następnie wyodrębniono ich rodziny indukowanych grafów zabronionych. W tym zakresie najważniejsze uzyskane wyniki to:

- twierdzenia 23, 24.

Rekurencyjne definicje szczególnych klas grafów są narzędziem od dawna stosowanym w, zwłaszcza algorytmicznej części, teorii grafów. Wykorzystano je na przykład do opisu co-grafów, k -drzew, grafów szeregowo równoległych, grafów Halina, dwudzielnych kubicznych [53, 16, 1, 5]. Jeżeli tego typu klasa grafów jest dodatkowo indukowanie dziedziczna, to często rezultatem dotyczącym takiej klasy jest jej charakterystyka przez rodzinę indukowanych grafów zabronionych [12]. Każdy wiersz prezentowanej w poprzednim rozdziale tabeli jest wynikiem tego typu.

Warto podkreślić znaczenie twierdzeń 7, 20, 26, 27 mimo, że otrzymano je jako bezpośrednie wnioski z wcześniej znanych rezultatów.

- (5) Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

4. GRAFY ZABRONIONE KLAS GRAFÓW $\{K_2\}$ -REDUKOWALNYCH NAD $\mathbf{L}^a$

Przypomnijmy pracę [3], w której udowodniono, że nietrywialna, $\{K_2\}$ -redukowalna nad $\mathbf{L}^a$ klasa grafów, posiada zawsze nieskończenie wiele grafów zabronionych. Dowód tego faktu, podobnie jak dowód jego uogólnienia, twierdzenia 18, jest niekonstrukcyjny. Wedle mojej wiedzy w tym zakresie, nie jest znany żaden konstrukcyjny dowód wymienionych wyżej twierdzeń. Stanowi to motywację do wszelkiego rodzaju konstrukcji nieskończonych rodzin grafów zabronionych dla klas grafów, które są $\{K_2\}$ -redukowalne nad $\mathbf{L}^a$. Jednym z ważniejszych rezultatów tego typu jest konstrukcja koniunkcji dwóch grafów zaproponowana przez Hajósa w [40].

Niech $\mathcal{O}$ oznacza klasę grafów bezkrawędziowych oraz niech dla dowolnego naturalnego n , symbol $\mathcal{P}^n$ oznacza $K_n[\mathcal{P}, \dots, \mathcal{P}]$. Hajós pokazał, że jeżeli $G_1, G_2 \in \mathbf{F}(\mathcal{O}^n)$ to każda koniunkcja grafów G_1, G_2 jest również w zbiorze $\mathbf{F}(\mathcal{O}^n)$. W pracy [29] (współautorzy: M. Hałuszczak i P. Mihók) dowiedziono, że uogólniona koniunkcja grafów z $\mathbf{F}(K_n[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n])$ jest grafem zabronionym dla $K_n[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$ przy założeniu, że klasy grafów $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \in \mathbf{L}^a$ są 2-spójne, r -cykliczne oraz istnieje graf $G \in \mathbf{F}(\mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n)$. Ostatnie założenie, w szczególności, wymusza nietrywialność klasy grafów $K_n[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n]$. Szczególny przypadek uogólnionej koniunkcji zastosowano w tej samej pracy [29] do znalezienia nieskończonych rodzin grafów zabronionych dla $\mathcal{O}_k^2$ i $K_n[\mathcal{D}_{p_1}, \dots, \mathcal{D}_{p_n}]$. Przypomnijmy, że $\mathcal{O}_k$ oznacza klasę grafów, z których każdy ma składowe spójności rzędu nie większego niż $k + 1$. Dodajmy także, że $\mathcal{D}_k$ oznacza klasę grafów k -zdegenerowanych. Wyraźnie należy podkreślić, że żadna z klas $\mathcal{O}_k, \mathcal{D}_k$ nie jest 2-spójna.

W pracy [6] (współautorzy: M. Borowiecka-Olszewska i P. Mihók) zastosowano konstrukcję Hajósa do grafów z $\mathbf{F}(\mathcal{O}_1^n)$, dowodząc że otrzymany graf należy do rodziny $\mathbf{F}(\mathcal{O}_1^n)$ o ile spełnione są pewne dodatkowe założenia. Główne twierdzenie tej pracy charakteryzuje wszystkie grafy zabronione dla klasy grafów $\mathcal{O}_1^k$, będące złączeniem pewnego grafu H i niespójnego grafu G . Charakterystyka ta otrzymana została w języku grafów zabronionych dla klas $\mathcal{O}^k$ i $\mathcal{O}^{n-k-1}$.

Istnieje hipoteza, że nieskończoność rodzin grafów zabronionych dla $\{K_2\}$ -redukowalnych nad $\mathbf{L}^a$, nietrywialnych klas grafów przenosi się na rodziny indukowanych grafów zabronionych klas grafów $\{K_2\}$ -redukowalnych nad $\mathbf{L}_{\leq}^a$. Wiadomo również, że istnieją klasy grafów $\{K_2\}$ -redukowalne nad $\mathbf{L}$ lub nad $\mathbf{L}_{\leq}$, których rodziny grafów

zabronionych są skończone. Prosty przykład ilustrującym ten fakt jest klasa split grafów $\mathcal{O} \circ \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ oznacza klasę grafów pełnych), dla której rodzina indukowanych grafów zabronionych jest postaci $\{C_5, C_4, 2K_2\}$ [36]. W [72] I. Zverovich znalazł warunki wystarczające dla skończoności rodziny indukowanych grafów zabronionych, klasy grafów, która jest $\{K_2\}$ -redukowalna nad $\mathbf{L}_{\leq}$. Do opisu swoich wniosków użył liczby niezależności $\alpha(G)$ grafu G i liczby klikowej $\omega(G)$ grafu G . Klasa grafów $\mathcal{P}$ jest α -ograniczona (odpowiednio, ω -ograniczona), jeżeli istnieje stała c taka, że $\alpha(G) \leq c$ (odpowiednio, $\omega(G) \leq c$) dla każdego grafu $G \in \mathcal{P}$.

Zverovich pokazał, że jeżeli $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{L}_{\leq}$ oraz $\mathcal{P}_1$ jest α -ograniczona i $\mathcal{P}_2$ jest ω -ograniczona, to skończoność rodzin indukowanych grafów zabronionych dla obu klas $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ implikuje skończoność rodziny indukowanych grafów zabronionych dla $K_2[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]$. W tej samej pracy [72] postawiono przypuszczenie prezentowane poniżej.

Hipoteza 1. *Niech $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{L}_{\leq}$. Klasa grafów $K_2[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]$ posiada skończoną rodzinę indukowanych grafów zabronionych wtedy i tylko wtedy, gdy*

- (1) $\mathcal{P}_1$ jest α -ograniczona, $\mathcal{P}_2$ jest ω -ograniczona i obie mają skończone rodziny indukowanych grafów zabronionych, lub
- (2) $\mathcal{P}_1$ jest skończona i $\mathcal{C}(\mathcal{P}_2)$ jest skończona.

W pracy [23] (przygotowanej do druku) pokazano, że hipoteza 1 jest prawdziwa w rodzinie klas grafów $\mathcal{P}$, które są K_2 -faktoryzowalne nad $\mathbf{L}_{\leq}^*$. Co ciekawe, takie klasy zawsze są elementami rodziny $\mathbf{L}_{\leq} \setminus \mathbf{L}_{\leq}^*$. Ponadto opisano konstrukcyjnie, zgodnie z twierdzeniem 7, wszystkie grafy zabronione dla $\mathcal{P}$, które są silnie dekomponowalne w sensie uogólnionego produktu leksykograficznego.

5. ACYKLICZNE $K_{1,n}[\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}]$ -PODZIAŁY W GRAFACH DWUDZIELNYCH

Niech $K_{1,n}$ oznacza gwiazdę rzędu $n+1$. Jest jasne, że dla każdego grafu dwudzielnego G istnieje liczba naturalna n taka, że G posiada $K_{1,n}[\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}]$ -podział. Stwierdzenie to pozostaje prawdziwe nawet wówczas gdy zażądamy aby przy założeniu, że $V(K_{1,n}) = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ z v_1 będącym centrum gwiazdy, znaleziony $K_{1,n}[\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}]$ -podział $(V_1, \dots, V_{n+1})$ spełniał warunek: dla dowolnego $i \in \{2, \dots, n+1\}$ graf $G[V_1 \cup V_i]$ jest acykliczny. Najmniejszą liczbę n dla której, w dwudzielnym grafie G , opisany wyżej podział ze wskazanym ograniczeniem istnieje, nazywamy gwiazdną liczbą acykliczną grafu G i oznaczamy $\chi_{(S, \mathcal{D}_1)}(G)$.

W pracy [9] (współautor: M. Borowiecki) podane zostały ograniczenia dla liczby $\chi_{(S, \mathcal{D}_1)}(G)$ dowolnego dwudzielnego grafu G . Badano tę liczbę dla produktu kartezjańskiego dwóch grafów dwudzielnych, co pozwoliło ustalić dokładne wartości lub ograniczenia tego parametru dla hiperkostek, cylindrów, uogólnionych siatek. Uzyskane, w tym zakresie, wyniki zastosowano do wskazania nowych ograniczeń dla liczby decykliczującej wielu klas grafów. Przedmiotem badań pracy [9] była też złożoność obliczeniowa problemu istnienia acyklicznego $K_{1,n}[\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}]$ -podziału grafu G dla zadanego dwudzielnego grafu G i parametru n . Pokazano, że jest to problem NP -zupełny dając motywację do badań tego typu. Ostatni wynik doskonale wpisuje się w rezultaty o wielomianowości problemu istnienia $H[\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}]$ -podziału dla danego grafu G wtedy i tylko wtedy gdy H jest dwudzielny [43], oraz NP -zupełności problemu istnienia $K_n[\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}]$ -podziału z ograniczeniem o acykliczności grafu indukowanego przez każde dwie części tego podziału, otrzymanego w [49].

6. WIERZCHOŁKOWE PODZIAŁY W HIPERGRAFACH

Mając na uwadze, że pojęcia wierzchołkowy podział grafu (odpowiednio hipergrafu) i kolorowanie grafu (odpowiednio hipergrafu) są tożsame, oraz że kolorowanie jest słowem częściej używanym w odnoszącej literaturze, przytoczymy poniżej wyniki na temat wierzchołkowych podziałów w hipergrafach w języku kolorowań. Będzie to jednocześnie terminologia używana w cytowanych pracach.

6.1. Podziały kosztowe w hipergrafach. W roku 1989, zainicjowana zastosowaniami, pojawiła się pierwsza praca [51] na temat kolorowań grafów kosztami. Rozważano w niej właściwe kolorowania, czyli funkcje przyporządkowujące wierzchołkom grafu koszty, czerpane z ustalonego skończonego podzbioru zbioru $\mathbb{N}$, tak aby obraz każdej krawędzi był co najmniej dwuelementowy. Wśród takich kolorowań szukano tych, dla których suma użytych kosztów jest możliwie najmniejsza, nazywając je minimalnymi. Przedmiotem badań pracy [27] (współautor: A. Fiedorowicz) są kosztowe kolorowania hipergrafów, zdefiniowane dokładnie tak jak dla grafów (słowo graf w definicji należy zastąpić słowem hipergraf), których zastosowania wskazano w pracy. Głównym, spośród otrzymanych rezultatów jest twierdzenie typu Brooksa. Podaje ono dla dowolnego spójnego hipergrafu $\mathcal{H}$, który nie jest grafem pełnym i którego maksymalny stopień wierzchołka $\Delta(\mathcal{H})$ jest nie mniejszy niż 3, górne ograniczenie

równe $\Delta(\mathcal{H})$ na możliwie najmniejszą liczbę kosztów użytych w minimalnym kolorowaniu. Podobnie jak w twierdzeniu Brooksa, udowodniono, że wszystkie hipergrafy, które nie podpadają pod schemat założeń twierdzenia, mają tę liczbę ograniczoną z góry przez $\Delta(\mathcal{H}) + 1$. Drugi, ważny rezultat, dowiedziony w [27] wskazuje zależność między najmniejszym możliwym sumarycznym kosztem kolorowania kosztami (sumą hipergrafu z danym zbiorem kosztów) i liczbą krawędzi hipergrafu, w wypadku gdy elementy zbioru kosztów generują ciąg arytmetyczny. Dodatkowo, wspierając się wynikami otrzymanymi dla grafów [59, 67], znaleziono, między innymi, ograniczenia dla sumy hiperdrzewa i hipergrafu pełnego k -jednorodnego ze zbiorem kosztów $\mathbb{N}$.

Kosztowe kolorowania hipergrafu Spernera, czyli hipergrafu, którego żadna krawędź nie zawiera się w innej krawędzi, stanowią tematykę, drugiej z tej serii, pracy [28] (współautor: A. Fiedorowicz). Dla dowolnego k naturalnego, przy założeniu, że zbiorem kosztów jest zbiór $\mathbb{N}$, definiujemy jako $\sum_k$ klasę hipergrafów Spernera, których suma każdej składowej spójności jest nie większa niż $\binom{k+2}{2}$. Nie jest trudno zauważyć, że tak zdefiniowane klasy hipergrafów są dziedziczne, czyli zamknięte ze względu na podhipergrafy, których krawędzie są podzbiorami zbioru krawędzi hipergrafu wyjściowego. Stąd klasa $\sum_k$, przy ustalonym naturalnym k , posiada rodzinę hipergrafów maksymalnych. Przedmiotem badań pracy [28] są grafy maksymalne i spójne z rodziny $\mathcal{M}^*(\sum_k)$ hipergrafów maksymalnych, dla których istnieje co najmniej jeden podzbiór zbioru wierzchołków, który nie jest krawędzią hipergrafu i którego dodanie kreuje nowy hipergraf Spernera. Podano rezultat charakteryzujący takie grafy i postać funkcji tworzącej, która je zlicza.

6.2. Podziały listowe w hipergrafach. Koncepcja kolorowania grafów z list została wprowadzona niezależnie przez Vizinga [70] i Erdösa, Rubina, Taylora [31]. Idea ta była rozszerzona na hipergrafy w [50]. W pracy [20], badając tę tematykę, udowodniono dwa rezultaty. Pierwszy z nich podaje warunki dostateczne dla kolorowania hipergrafu z list, uogólniając podobne warunki otrzymane w [61] dla kolorowania grafów z list. Drugi dowodzi faktu, że dla dowolnych liczb naturalnych $k \geq 3$, $l \geq 2$ i $s \geq 1$ istnieje k -jednorodny hipergraf o liczbie chromatycznej nie mniejszej niż l , dla którego różnica między liczbą wyboru i liczbą chromatyczną wynosi co najmniej s . Wcześniej znany był podobny rezultat dla k -jednorodnych 2-kolorowalnych hipergrafów, przy czym do dowodu tego faktu użyto innej techniki.

6.3. Wielomiany chromatyczne hipergrafów. Twierdzenie (H. Whitney [71]) analizujące wielomian chromatyczny regularnej mapy dało podstawy do wielu dalszych badań wielomianu chromatycznego grafu i jego współczynników [60, 54, 32]. Współczynniki wielomianu chromatycznego hipergrafu były studiowane między innymi przez Dohmen [19], Tomescu [68], Borowiecki i Łazuka [10]. W pracy [30] (współautor: E. Łazuka) pokazane zostały uogólnienia wielu spośród rezultatów zamieszczonych w wyżej wspomnianej literaturze.

Niech $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ będzie hipergrafem ze zbiorem wierzchołków $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ i zbiorem krawędzi $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$. Dla danej liczby naturalnej λ , symbolem $f_{(x_1, \dots, x_m)}(\mathcal{H}, \lambda)$ oznaczamy liczbę różnych λ -kolorowań zbioru X , takich że obraz krawędzi e_i jest co najmniej x_i -elementowym zbiorem dla wszystkich $i \in [m]$. W pracy [30] dowiedziono, że $f_{(x_1, \dots, x_m)}(\mathcal{H}, \lambda)$ jest wielomianem zmiennej λ stopnia n i może być wyrażony jako suma wielomianów chromatycznych grafów. Znaleziona została formuła redukcyjna dla liczenia wielomianu $f_{(x_1, \dots, x_m)}(\mathcal{H}, \lambda)$, która uogólnia formuły tego typu znalezione przez H. Whitney [71] i R.P. Jones [47] dla standardowego λ -kolorowania grafów i hipergrafów. Formuła ta została wyrażona przez liczby *złych podziałów* w hipergrafie i liczby Stirlinga pierwszego rodzaju. Ponadto pokazano zależności pomiędzy współczynnikami tego wielomianu i rozmiarami krawędzi hipergrafu.

W pracy [26] badany jest wielomian $f_3(\mathcal{H}, \lambda)$ hipergrafu $\mathcal{H}$, który jest szczególnym przypadkiem wielomianu $f_{(x_1, \dots, x_m)}(\mathcal{H}, \lambda)$ dla $x_1 = \dots = x_m = 3$. Głównymi wynikami tej pracy są twierdzenia wskazujące klasę hipergrafów scharakteryzowanych jednoznacznie przez wielomian tego typu i rodzinę hipergrafów równoważną w sensie tego wielomianu. Zagadnienia chromatycznej jednoznaczności i równoważności grafów były wcześniej przedmiotem badań autorki niniejszego opracowania, stanowiąc część jej rozprawy doktorskiej. Odpowiednie wyniki zostały opublikowane w [7, 8].

LITERATURA

- [1] V. Batagelj, Inductive classes of bipartite cubic graphs, *Discrete Math.* **134** (1994) 3–8.
- [2] L.W. Beineke, Characterization of derived graphs, *J. Comb. Theory* **9** (1970) 129–135.
- [3] A.J. Berger, Minimal forbidden subgraphs of reducible graph properties. *Discuss. Math. Graph Theory* **21** (2001) 111–117.
- [4] A.J. Berger, I. Broere, S.J.T. Moagi, P. Mihók, Meet- and join-irreducibility of additive hereditary properties of graphs. *Discrete Math.* **251** (2002) 11–18.

- [5] R.B. Borie, R.G. Parker, C.A. Tovey, Solving Problems on Recursively Constructed Graphs, *ACM Computing Surveys* **41**(1) (2008) 1-51.
- [6] M. Borowiecka-Olszewska, E. Drgas-Burchardt, P. Mihók, Minimal vertex Ramsey graphs and minimal forbidden subgraphs, *Discrete Math.* **286** (2004) 31-36.
- [7] M. Borowiecki, E. Drgas-Burchardt, Classes of chromatically unique graphs, *Discrete Math.* **111** (1993) 71-75.
- [8] M. Borowiecki, E. Drgas-Burchardt, Classes of chromatically unique or equivalent graphs, *Discrete Math.* **121** (1993) 11-18.
- [9] M. Borowiecki, E. Drgas-Burchardt, Acyclic homomorphisms to stars of graph Cartesian products and chordal bipartite graphs, *Discrete Math.*, w druku.
- [10] M. Borowiecki, E. Łazuka, On chromaticity of hypergraphs, *Discrete Math.* **307** (2007) 1418-1429.
- [11] M. Borowiecki, P. Mihók, Hereditary properties of graphs, in: V.R.Kulli, ed., *Advances in Graph Theory (Vishawa International Publication, Gulbarga* (1991) 41-68.
- [12] A. Brandstädt V.B. Le, G.P. Spinrad, Graph Classes — A Survey, Philadelphia (2004).
- [13] I. Broere, E. Drgas-Burchardt, Unique factorization of compositive hereditary graph properties *Acta Math. Sinica, English Series* **28** 2(2012) 267-280.
- [14] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour, R. Thomas, The strong perfect graph theorem, *Annals of Math.* **164** (2006) 51-229.
- [15] E.J. Cockayne, Colour classes for r -graphs. *Canad. Math. Bull.* **15** (1972) 349-354.
- [16] D.G. Corneil, H. Lerchs, L. Stewart-Burlingham, Complement reducible graphs, *Discrete Appl. Math.* **3** (1981) 163-174.
- [17] B. Courcelle, J. Engelfriet, G. Rozenberg, Handle-rewriting hypergraph grammars, *J. Comput. Syst. Sciences* **46** (1993) 218-270.
- [18] B. Courcelle, S. Olariu, Upper bounds to the clique with of graphs, *Discrete Appl. Math.* **101** (2000) 77-114.
- [19] K. Dohmen, A broken-circuits-theorem for hypergraphs, *Arch. Math.* **64** (1995) 159-162.
- [20] E. Drgas-Burchardt, A note on a list colouring of hypergraphs, *Opuscula Mathematica* **24/2** (2004) 171-175.
- [21] E. Drgas-Burchardt, A note on joins of additive hereditary graph properties, *Discuss. Math. Graph Theory* **26** (2006) 413-418.
- [22] E. Drgas-Burchardt, Cardinality of a minimal forbidden graph family for reducible additive hereditary graph properties, *Discuss. Math. Graph Theory* **29** (2009) 263-274.
- [23] E. Drgas-Burchardt, Forbidden graphs for classes of split-like graphs, w recenzji.
- [24] E. Drgas-Burchardt, On uniqueness of a general factorization of graph properties, *J. Graph Theory* **62** (2009) 48-64.
- [25] E. Drgas-Burchardt, On prime inductive classes of graphs, *European Journal of Combinatorics* **32**(8) (2011) 1317-1328.
- [26] E. Drgas-Burchardt, On 3-chromatically unique and 3-chromatically equivalent hypergraphs, *Ars Combin.* **93** (2009) 409-415.

- [27] E. Drgas-Burchardt, A. Fiedorowicz, Cost colourings of hypergraphs, *Discrete Math.* **307** (2007) 1298–1305.
- [28] E. Drgas-Burchardt, A. Fiedorowicz, Maximal hypergraphs with respect to the bounded cost hereditary property, *Discuss. Math. Graph Theory* **25** (2005) 67–77.
- [29] E. Drgas-Burchardt, M. Hałuszczak, P. Mihók, Minimal forbidden graphs of reducible additive hereditary graph properties, *Ars Combin.* **95** (2010) 487–497.
- [30] E. Drgas-Burchardt, E. Łazuka, Chromatic polynomials of hypergraphs, *Appl. Math. Letters* **20** (2007) 1250–1254.
- [31] P. Erdős, A.L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, in: Proceedings West Coast Conference on Combinatorics, *Graph Theory and Computing, Arcata CA, Sept.5-7* (1979), Congr. Numer. **26**.
- [32] E.J. Farrell, On chromatic coefficients, *Discrete Math.* **29** (1980) 257–264.
- [33] A. Farrugia, Uniqueness and complexity in generalised coloring, PhD thesis, Waterloo, Ontario, Canada, 2003
- [34] A. Farrugia, P. Mihók, R.B. Richter, G. Semanišin, Factorizations and characterizations of induced-hereditary and compositive properties. *J. Graph Theory* **49** (2000) 11–27.
- [35] A. Farrugia, R.B. Richter, Unique factorisation of additive induced-hereditary properties. *Discuss. Math. Graph Theory* **24** (2004) 319–343.
- [36] S. Földes, P.L. Hammer, Split graphs, in: *Proc. 8th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congr. Numer.* **XIX** (1977) 311–315.
- [37] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **18** (1967) 25–66.
- [38] V. Giakoumakis, On the closure of graphs under substitution, *Discrete Math.* **177** (1997) 83–97.
- [39] D.L. Greenwell, R.L. Hemminger, J. Klerlein, Forbidden subgraphs, in: Proceedings of the 4th S-E Conf. Combinatorics, *Graph Theory and Computing* (Utilitas Math., Winnipeg, Man. (1973) 389–394.
- [40] G. Hajós, Über eine Konstruktion nicht n -färbbarer Graphen, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math. Natur.Reihe* **10** (1961) 116–117.
- [41] G. Higman, Ordering by divisibility in abstract algebras, *Proc. London Math. Soc* **2** (1952) 326–336.
- [42] P. Hell, J. Nešetřil, Graphs and Homomorphisms, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press, 2004.
- [43] P. Hell, J. Nešetřil, On the complexity of H -colouring, *J. Combin. Theory (B)* **48** (1990) 92–110.
- [44] W. Imrich, S. Klavžar, Product Graphs, New York (2000).
- [45] J. Jakubík, On the Lattice of Additive Hereditary Properties of Finite Graphs. *Discuss. Math. General Algebra and Applications* **22** (2002) 73–86.
- [46] T.R. Jensen, B. Toft, Graph Coloring Problems, Wiley-Interscience Publications, New York 1995.

- [47] R.P. Jones, Some results of chromatic hypergraph theory proved by reduction to graphs, *Colloque CNRS. Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes* **260** (1976) 249–250.
- [48] M. Katchalski, W. McCuaig, S. Seager, Ordered colourings *Discrete Math.* **142** (1995) 141–154.
- [49] A.V. Kostochka, Upper bounds of chromatic function, Ph.D. Thesis, Novosibirsk, 1978 (in Russian).
- [50] A.V. Kostochka, M. Stiebitz, B. Wirth, The colour theorems of Brooks and Gallai extended, *Discrete Math.* **162** (1996) 299–303.
- [51] E. Kubicka, A.J. Schwenk, An introduction to chromatic sums, in: *Proceedings of the Seventeenth, Annual ACM Computer Sciences Conference*, ACM Press (1989) 39–45.
- [52] J. Kratochvíl, P. Mihók, Hom-properties are uniquely factorizable into irreducible factors, *Discrete Math.* **213** (2000) 189–194.
- [53] H. Lerchs, On cliques and kernels, *Tech. Report. Dept. of Comput. Sci. University of Toronto* (1971).
- [54] G.H.J. Meredith, Coefficients of chromatic polynomials, *J. Combin. Theory (B)* **13** (1972) 14–17.
- [55] P. Mihók, On the existence of uniquely partitionable graphs, *Electronic Notes in Discrete Math.* **11** (2002) 485–490.
- [56] P. Mihók, Reducible properties and uniquely partitionable graphs, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **49** (1999) 44–53.
- [57] P. Mihók, Unique factorization theorem, *Discuss. Math. Graph Theory* **20** (2000) 143–153.
- [58] P. Mihók, G. Semanišin, R. Vaský, Additive and hereditary properties of graphs are uniquely factorizable into irreducible factors, *J. Graph Theory* **33** (2000) 44–53.
- [59] J. Mitchem, P. Morris, On the cost chromatic number of graphs, *Discrete Math.* **171** (1997) 201–211.
- [60] R.C. Read, An introduction to chromatic polynomials, *J. Combin. Theory* **4** (1968) 52–71.
- [61] B. Reed, The list colouring constants, *J. Graph Theory* **31** (1997) 149–153.
- [62] D.E. Rutherford, *Introduction to Lattice Theory*, New York (1965).
- [63] G. Sabidussi, Graph multiplication, *Math. Z.* **72** (1960) 446–457.
- [64] E.R. Scheinerman, Characterizing intersection classes of graphs, *Discrete Math.* **55** (1985) 185–193.
- [65] G. Semanišin, On generating sets of hereditary properties, *Discuss. Math. Graph Theory* **22** (2002) 183–192.
- [66] J.M.S. Simoes-Pereira, On graphs uniquely partitionable into n -degenerate subgraphs, in: *Infinite and Finite Sets, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai* **10** (1975) 1351–1364.
- [67] C. Thomassen, P. Erdős, Y. Alavi, P.J. Malde, A.J. Schwenk, Tight bounds on the chromatic sum of a connected graph, *J. Graph Theory* **13** (1989) 353–357.
- [68] I. Tomescu, Chromatic coefficients of linear uniform hypergraphs, *J. Combin. Theory (B)* **72** (1998) 229–235.
- [69] V.G. Vizing, The Cartesian product of graphs, *Vicisl. Sistemy* **9** (1963) 30–43. English translation in *Comp. Al. Syst.* **2** (1966) 352–365 (in Russian).

- [70] V.G. Vizing, Colouring the vertices of graph in prescribed colours, *Diskret. Analiz.* **29**, *Metody Diskret. Analiz. v Teorii Kodov i Shem* **101** (1976) 3-10 (in Russian).
- [71] H. Whitney, A logical expansion in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (1932) 572-579.
- [72] I.E. Zverovich, r -bounded k -complete bipartite bihypergraphs and generalized split graphs. *Discrete Math.* **247** (2002) 261-270.
- [73] I. Zverovich, I. Zverovich, Bipartite bihypergraphs: A survey and new results, *Discrete Math.* **306** (2006) 801-811.

Евг. Ингас-Бирчаров