

Wiesław Królikowski

Załącznik nr 2

## A U T O R E F E R A T

1. Wiesław Królikowski

### 2. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

- tytuł **magistra matematyki** (specjalność teoretyczna) uzyskałem w 1979r. po ukończeniu studiów na kierunku matematyka na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii w Uniwersytecie Łódzkim. Studia te ukończyłem z wyróżnieniem.

- tytuł **magistra fizyki** (specjalność teoretyczna) uzyskałem w 1979r. po ukończeniu studiów na kierunku fizyka na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii w Uniwersytecie Łódzkim.

- stopień naukowy **doktora nauk matematycznych** w zakresie matematyki uzyskałem w 1985r. w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk; tytuł rozprawy doktorskiej: "O niezmiennikach biholomorficznych związanych z homologiami relatywnymi prądów".

### 3. HISTORIA ZATRUDNIENIA

1980 - 1985

studia doktoranckie w Instytucie Matematycznym PAN

1985 - 1997; adiunkt

Instytut Matematyczny PAN

1998 - 2009; adiunkt

Wyższa Szkoła Kupiecka w Łodzi

2009 - 2011; adiunkt

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa we Włocławku

od 2011; adiunkt

Politechnika Częstochowska

**4. OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCE Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003r. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE NAUKOWYM W ZAKRESIE SZTUKI ZAWARTE W ROZPRAWIE HABILITACYJNEJ (Dz. U. nr 65. poz. 595 ze zm.) STANOWIĄ:**

pod wspólnym tytułem:

**THE FUETER-HURWITZ OPERATOR  
AND  
SOME PROBLEMS OF QUATERNIONIC ANALYSIS**

dwie monografie:

1. **The Fueter-Hurwitz operator and related topics**  
(część zasadnicza),

Akademickie Centrum Graficzno-Marketingowe Lodart S.A. (Politechnika Łódzka),  
Łódź 2000,

2. **Some problems of quaternionic analysis**  
(część dodatkowa),

Wydawnictwo Naukowe Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2012.

Obie książki zawierają także wyniki z następujących prac:

1. Anisotropic complex structure on the pseudo-Euclidean Hurwitz pairs, *Annales Polonici Mathematici*, Vol. 55, 1991, pp. 225-240,
2. Fueter-Hurwitz regular mappings and an integral representation, *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, Proc., Montpellier 1989, Ed. by A. Micali et al., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1992, pp. 221-237 (wspólna z E. Ramirez'em de Arellano),
3. Quaternionic regular and biregular functions in the sense of Fueter, *Ber. Univ. Jyväskylä Math. Inst.* 55, 1993, pp. 65-87 (wspólna z R.M. Porter'em),
4. Polynomial solutions of the Fueter-Hurwitz equation, *American Mathematical Society, Series: "Contemporary Mathematics"*, Vol. 137, 1992, pp. 297-305 (wspólna z E. Ramirez'em de Arellano),
5. On Lichnerowicz smooth homotopy invariants for G-structures, *Note di Matematica*, Vol. XIII, No. 1, 1993, pp. 197-212 (wspólna z S. Marchiafava),
6. Regular and biregular functions in the sense of Fueter - some problems, *Annales Polonici Mathematici*, Vol. 59, No. 1, 1994, pp. 53-64 (wspólna z R.M. Porter'em),

7. Biregular quaternionic functions, Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics, Proc. of the Internat. Conf., Deinze, May 3 - 7, 1993, Ed. by F. Brackx et al., Kluwer Academic Publishers 1993, Dordrecht-Boston-London, Vol. 55, pp. 129-135 (wspólna z R.M. Porter'em),
8. On Fueter-Hurwitz regular mappings, *Dissertationes Mathematicae*, Vol. CCCLIII, Warszawa 1996,
9. Pairs of Clifford algebras of the Hurwitz-type, Proc. of the Internat. Symposium on Generalizations of Complex Analysis and Their Applications in Physics, Warszawa, Maj 30 - Czerwiec 1, 1994, Ed. by J. Ławrynowicz, Banach Center Publications, Vol. 37, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1996, pp. 327-330,
10. Fueter regular mappings and harmonicity, *Annales Polonici Mathematici*, Vol. 64, No. 2, pp. 97-114, 1996,
11. Quaternionic condition for the existence of 4-dimensional locally conformally flat almost Kähler manifolds, *Demonstratio Mathematica*, Vol. XXXIX, No. 1, pp. 195-202, 2006,
12. On 4-dimensional locally conformally flat almost Kähler manifolds, *Archivum Mathematicum*, Tomus 42, No. 3, pp. 215-223, 2006.
13. Quaternionic regular functions in the sense of Fueter and fundamental 2-forms on 4-dimensional almost-Kähler manifold, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, Vol. 12, No. 1, Czestochowa University of Technology, 2013.

## 5. OMÓWIENIE ROZPRAWY

**Omówienie wyników uzyskanych w w/w monografiach, które stanowią osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym**

Wyróżnionym przeze mnie osiągnięciem, który stanowi podstawę do wszczęcia postępowania habilitacyjnego, są dwie w/w monografie oparte o cykl artykułów dotyczących zagadnień z analizy kwaternionowej i hiperzespolonej.

Celem prac było poszerzenie wiedzy n.t. uogólnień pojęcia holomorficzności na przypadek kwaternionowy i inne, poszerzenie wiedzy o kwaternionowych funkcjach regularnych w sensie Fuetera, znalezienie kwaternionowych uogólnień: teorii Eells'a i Lémaire'a odwzorowań harmonicznych, niezmiennika homotopijnego Lichnerowicza, rozwinięcia teorii par Hurwitza i zastosowanie otrzymanych wyników (pewnych) w analizie zespolonej.

## WSTĘP

Analiza zespolona jest piękną i bogatą teorią matematyczną. Jej zastosowania są tak rozległe, że trudno wyobrazić sobie współczesną matematykę i fizykę bez jej aparatu i głębokich rezultatów. Podstawowym pojęciem analizy zespolonej jest pojęcie „funkcji holomorficznej”. Mamy, co jest ogromną zaletą tej teorii, wiele równoważnych warunków określających holomorficzność (istnienie pochodnej zespolonej, równania Cauchy-Riemanna, przedstawienie w postaci szeregu potęgowego, tw. Morery, ...).

Jeżeli jednak posuniemy się o krok dalej w abstrakcji i zamiast ciała liczb zespolonych  $\mathbf{C}$  weźmiemy ciało kwaternionów  $\mathbf{H}$ , to uogólnienie podstawowych pojęć i twierdzeń z analizy zespolonej stanie się prawdziwym problemem. I może właśnie na tym polega piękno i powab matematyki.

Przybliżymy podstawową trudność, jaką stanowi uogólnienie pojęcia holomorficzności w analizie kwaternionowej.

Oznaczmy przez

$$q = x_o + ix_1 + jx_2 + kx_3, \quad x_o, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

typowy element ciała kwaternionów  $\mathbf{H}$ , gdzie  $i, j, k$  są jednostkami kwaternionowymi spełniającymi następujące warunki:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Sprzężenie w ciele  $\mathbf{H}$  określone jest wzorem:

$$\bar{q} := x_o - ix_1 - jx_2 - kx_3.$$

Norma  $\|q\| := (q \cdot \bar{q})^{\frac{1}{2}} = (\bar{q} \cdot q)^{\frac{1}{2}}$ , gdzie „ $\cdot$ ” oznacza mnożenie kwaternionowe, może być użyta do wyrażenia elementu odwrotnego: dla  $q \in \mathbf{H}, q \neq 0$ , mamy

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

Przypomnijmy podstawowe fakty. Na początek rozpatrzmy następującą „naturalną” definicję:

**Def. 1.** Funkcję  $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  nazywamy (lewo) różniczkowalną w punkcie  $q$ , jeżeli istnieje następująca granica

$$\frac{df}{dq}(q) := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[f(q+h) - f(q)].$$

Na pierwszy rzut oka jest to najbardziej naturalna definicja jaką możemy wziąć pod uwagę szukając uogólnienia pojęcia funkcji holomorficznej, lecz prowadzi ona do bardzo ograniczonej klasy funkcji, mamy bowiem:

**Tw. 1.** Jeżeli  $\frac{df}{dq}(q)$  istnieje dla  $q \in U \subseteq \mathbf{H}$ , gdzie  $U$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbf{H}$ , to

$$f(q) = a + qb, \quad a, b \in \mathbf{H}.$$

Rozpatrzmy kolejną naturalną możliwość.

Kwaterniony nie komutują, stąd rozsądnym uogólnieniem wyrazu  $a_n z^n$  z analizy zespolonej jest

$$a_0 q a_1 q \dots a_n q a_{n+1}, \quad a_i \in \mathbf{H}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n+1.$$

Definicja holomorficzności stosująca sumy takich wyrazów prowadzi jednak do zbyt ogólnej klasy funkcji, mianowicie są to rzeczywisto-analityczne odwzorowania z  $\mathbf{R}^4$  do  $\mathbf{R}^4$  [41].

W 1935r. R. Fueter [8] zaproponował definicję „regularności” (holomorficzności) dla funkcji kwaternionowych poprzez analogię do równań Cauchy-Riemanna. Oto ona:

**Def. 2.** Funkcję  $f := f^o + if^1 + jf^2 + kf^3 : U \rightarrow \mathbf{H}$  nazywamy (lewo) *regularną* w obszarze  $U \subseteq \mathbf{H}$ , jeżeli  $f$  jest różniczkowalna w zwykłym sensie, jako odwzorowanie zbioru otwartego w  $\mathbf{R}^4$  w  $\mathbf{R}^4$  oraz następujący warunek:

$$D^+ \cdot f = \frac{1}{4}(\partial_o + i\partial_1 + j\partial_2 + k\partial_3) \cdot f = 0$$

jest spełniony w  $U$ .

Klasa funkcji regularnych w sensie Fuetera wydaje się wyrażać na wiele sposobów ducha analizy zespolonej w kontekście kwaternionowym. Mamy bowiem analogony takich twierdzeń jak: Cauchy’ego, wzoru całkowego Cauchy’ego, Morery, o przedstawieniu w szereg Laurenta, ... itd., uogólnione w mniej lub bardziej naturalny sposób [42]. Ze względu jednak na nieprzemienność kwaternionów wiele własności funkcji holomorficznych nie może być uogólnionych na funkcje regularne w sensie Fuetera. Na przykład, złożenie dwóch funkcji regularnych nie jest, w ogólności, funkcją regularną. Fakt ten uniemożliwia zdefiniowanie rozmaitości kwaternionowych (w sensie Fuetera) za pomocą funkcji przejścia.

Teoria funkcji regularnych w sensie Fuetera jest stale intensywnie rozwijana. Rozdział I mojej pracy „*The Fueter-Hurwitz operator and related topics*” jest pewnym wkładem do tej teorii. Dalej omówię ten wkład bardziej szczegółowo.

Mimo, iż zdefiniowanie nietrywialnych rozmaitości kwaternionowych w sposób klasyczny (tzn. poprzez funkcje przejścia) okazało się niemożliwe, to poszukiwania właści-

wej definicji trwały. Rozwiązanie problemu nadeszło po udowodnieniu przez Bergera [1] w 1955r. następującego:

**Tw. 2.** Grupa holonomii nieredukowalnych rozmaitości Riemannowskich, które nie są przestrzeniami symetrycznymi, jest zawarta w jednej z następujących grup:

$$SO(n), \quad U\left(\frac{n}{2}\right), \quad Sp\left(\frac{n}{2}\right) \cdot Sp(1) := Sp\left(\frac{n}{4}\right) \times_{\mathbf{Z}_2} Sp(1), \quad Sp\left(\frac{n}{4}\right), \\ G_2 \ (n=7), \quad Spin(7) \ (n=8), \quad Spin(19) \ (n=16).$$

Dodajmy, że rozmaitości, których grupa holonomii zawarta jest w  $SO(n)$ , to zorientowane rozmaitości Riemannowskie. Można o nich udowodnić jedynie ogólne twierdzenia dotyczące topologii. Rozmaitości Riemannowskie z grupą holonomii zawartą w  $U(\frac{n}{2})$  to zespolone rozmaitości Kählerowskie. Stanowią one ogromną i bardzo ważną część analizy zespolonej.

Następne dwie grupy z listy Bergera związane są właśnie z abstrakcyjną definicją rozmaitości kwaternionowej. Mamy dwie możliwości kwaternionowych analogonów rozmaitości Kählerowskich.

Niech  $M$  będzie spójną rozmaitością Riemannowską wymiaru  $4n$ . Wówczas żąda się aby grupa holonomii rozmaitości  $M$  była podgrupą albo  $Sp(n)$ , albo  $Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} Sp(1)$ . Warunek  $Hol(M) \subseteq Sp(n)$  jest równoważny z istnieniem na  $M$  równoległych ( $\nabla \cdot = 0$ ), określonych globalnie struktur prawie zespolonych  $I, J, K$  takich, że  $IJ = -JI = K$ . Na pierwszy rzut oka wydaje się, że warunek  $Hol(M) \subseteq Sp(n)$  jest naturalnym uogólnieniem pojęcia rozmaitości Kählerowskiej. Jednakże okazuje się, że jeżeli  $Hol(M) \subseteq Sp(n)$ , to  $M$  posiada krzywiznę Ricciego równą zero. Zatem bardziej ogólna sytuacja opisywana jest przez grupę  $Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} Sp(1)$ . I tak przyjmuje się:

**Def. 3.**  $4n$ -wymiarową rozmaitość Riemannowską nazywamy rozmaitością *kwaternionową* (ściślej - *kwaternionowo-Kählerowską*), jeżeli jej grupa holonomii jest podgrupą grupy  $Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} Sp(1)$  [2].

Najważniejszym i zarazem najbardziej znanym przykładem rozmaitości kwaternionowo-Kählerowskiej jest kwaternionowa przestrzeń rzutowa  $\mathbf{HP}^n$  ze standardową metryką [2]. Badania rozmaitości kwaternionowych stanowią drugi rodzaj analizy kwaternionowej.

Prosty fakt, że kwaterniony są nieprzemienne nie zawsze jest należycie doceniany. Rozpatrzmy bowiem następujący problem:

Rozwiązać w ciele  $K$  równanie:

$$ax + xb = c,$$

gdzie  $a, b, c \in K$ .

Problem ten jest banalny, gdy  $K$  jest ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$  lub zespolonych  $\mathbf{C}$ . Natomiast staje się bardzo trudny w ciele kwaternionów. Rozwiązanie podał R.M.

Porter z Meksyku. Wygląda ono następująco:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}, \\
 \text{numerator} &= |a|y|a| + |b|y|b| + ayb + \bar{a}y\bar{b}, \quad y := \bar{a}c + \bar{c}b, \\
 [\text{numerator} &= 2(a_o + b_o)\bar{a}c\bar{b} + \|a\|^2(\bar{a}c + cb) + \|b\|^2(ac + \bar{c}b)], \\
 \text{denominator} &= [(a_o + b_o)^2 + (\|a_u\| + \|b_u\|)^2][(a_o + b_o)^2 \\
 &\quad + (\|a_u\| - \|b_u\|)^2] \neq 0, \\
 a &= a_o + a_u = a_o + (a_1i + a_2j + a_3k), \\
 \langle a, b \rangle &= a_o b_o + \langle a_u, b_u \rangle = a_o b_o + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad \|a\|^2 = \langle a, a \rangle.
 \end{aligned}$$

Powyższe rozwiązanie znalezione zostało przy użyciu komputera za pomocą programu specjalnie wymyślonego dla tego problemu.

Przykład powyższy doskonale ilustruje trudności, jakie napotykamy w analizie kwaternionowej.

Omówię teraz najważniejsze wyniki zawarte w przedstawianej rozprawie. Zrobię to dosyć szczegółowo analizując poszczególne rozdziały moich prac.

## THE FUETER-HURWITZ OPERATOR AND RELATED TOPICS

### Rozdział I

W tym rozdziale badam problem istnienia odwzorowań biregularnych w sensie Fuetera. Podałem pełną klasyfikację liniowych odwzorowań biregularnych (Tw. 1.6.1) oraz skonstruowałem rodzinę przykładów nieliniowych odwzorowań biregularnych [25].

Ciało  $\mathbf{H}$  jest rozszerzeniem ciała liczb zespolonych  $\mathbf{C}$ , a regularność w sensie Fuetera dla funkcji kwaternionowych jest uogólnieniem holomorficzości funkcji zespolonych, zatem naturalnym jest szukanie wzajemnych relacji pomiędzy tymi dwiema klasami funkcji. Fueter [9] pokazał jak skonstruować funkcję regularną stosując funkcję holomorficzną symetrycznie ze względu na wszystkie trzy jednostki kwaternionowe. Ja badam zagadnienie odwrotne, tzn. holomorficzość obcięć odwzorowań kwaternionowych do płaszczyzn zespolonych.

W klasie różniczkowalnych odwzorowań  $\mathbf{H} \supseteq A$  (zbiór otwarty)  $\rightarrow \mathbf{H}$  wprowadziłem rodzinę odwzorowań „holomorphic on slices”, których obciążenia do płaszczyzn zespolonych są funkcjami holomorficznymi i podałem pełną klasyfikację takich odwzorowań (Tw. 1.4.1) [24].

Nadto rozstrzygnąłem problem klasyfikacji rozmaitości różniczkowych modelowanych lokalnie na przestrzeni  $\mathbf{H}$  i dopuszczających istnienie globalnych funkcji regularnych w sensie Fuetera. Są to rozmaitości afiniczne (Tw. 1.8.1). Uogólnienie tego faktu pokazuje, że aby funkcje regularne w sensie Fuetera  $F : M \rightarrow N$ , były dobrze zdefiniowane między dwiema rozmaitościami, to  $M$  musi być lewo-afiniczną a  $N$  - prawo-afiniczną

rozmaitością. Stąd rozpatrując zagadnienie biregularności doszedłem do wniosku, że bardziej naturalnym pojęciem jest wprowadzone przeze mnie pojęcie LR-biregularności (są to odwzorowania lewo-regularne, dla których odwzorowania odwrotne są prawo-regularne). Podałem pełną klasyfikację tego typu odwzorowań (Tw. 1.6.2) [25].

Najistotniejszą cechą kwaternionów jest ich nieprzemienność. Z tego powodu nie istnieje w klasycznej postaci reguła Leibniza dla odwzorowań kwaternionowych [24]. Jako ciekawostkę (choć niebanalną) podałem pewne wzory (Tw. 1.7.1), które można uważać za „regułę Leibniza” dla operatorów  $D^+$  - regularności i  $D$  - antyregularności w sensie Fuetera.

W przypadku zespolonym w sposób naturalny identyfikujemy funkcje zespolone z 0-formami. Rozważmy operator de Rhama

$$d : \mathcal{E}_\mathbf{C}^0 \rightarrow \mathcal{E}_\mathbf{C}^1,$$

gdzie  $\mathcal{E}_\mathbf{C}^k$  oznacza przestrzeń  $k$ -form o wartościach zespolonych. Wówczas operator  $d$  daje się rozłożyć na dwie części w sposób następujący:

$$d = \partial + \bar{\partial},$$

gdzie

$$\partial : \mathcal{E}_\mathbf{C}^0 \rightarrow \mathcal{E}_\mathbf{C}^{1,0}, \quad \bar{\partial} : \mathcal{E}_\mathbf{C}^0 \rightarrow \mathcal{E}_\mathbf{C}^{0,1}$$

i

$$\mathcal{E}_\mathbf{C}^1 = \mathcal{E}_\mathbf{C}^{1,0} \oplus \mathcal{E}_\mathbf{C}^{0,1}.$$

Znajduję analog tego rozkładu w przypadku kwaternionowym. Analog ten nie jest prostym uogólnieniem rozkładu z przypadku zespolonego. Otrzymany rozkład jest niezależny od wyboru jednostek kwaternionowych.

Nadto podałem zupełnie nowy (oryginalny) dowód faktu, że zbieżne szeregi  $\sum a_n q^n$  i  $\sum q^n a_n$ , gdzie  $q, a_n \in \mathbf{H}$  nie są funkcjami regularnymi w sensie Fuetera (różnymi od stałych) (Tw. 1.5.1).

## Rozdział II

Problemy rozważane w początkowej części tego rozdziału związane są z poszukiwaniem przeze mnie funkcji regularnych w sensie Fuetera na rozmaitościach kwaternionowych zdefiniowanych przez warunek  $Hol(M) \subseteq Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} Sp(1)$ . Ze względu na abstrakcyjną definicję rozmaitości kwaternionowej pojawienie się funkcji regularnej w sensie Fuetera, która wyrażałaby jakieś właściwości samej rozmaitości bądź odwzorowań między takimi rozmaitościami byłoby samo w sobie zaskakujące.

Niech  $(M, g)$  i  $(N, h)$  będą dwiema gładkimi rozmaitościami Riemannowskimi, o których zakładamy, że są: spójne, zwarte, orientowalne i bez brzegu oraz niech  $m := \dim_{\mathbf{R}} M$  i  $n := \dim_{\mathbf{R}} N$ .

Dalej, niech  $\Phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  będzie gładkim odwzorowaniem. Jego różniczka  $d\Phi$  może być traktowana jako cięcie wiązki  $\Lambda^1(\Phi^{-1}TN) = T^*M \otimes \Phi^{-1}TN$ . Oznaczmy przez  $|d\Phi(x)|$  jej normę w punkcie  $x \in M$  indukowaną przez metryki  $g$  i  $h$ , tzn. normę Hilberta-Schmidt'a odwzorowania liniowego  $d\Phi(x)$ .

Jeżeli  $(x^i)$  oraz  $(u^\alpha)$  są lokalnymi układami współrzędnych wokół punktów  $x$  oraz  $\Phi(x)$ , wówczas mamy:

$$|d\Phi|^2 = g^{ij} h_{\alpha\beta} \Phi_i^\alpha \Phi_j^\beta,$$

gdzie  $(\Phi_i^\alpha) = (\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^i})$  jest lokalną reprezentacją odwzorowania  $d\Phi$  [6].

**Def. 4.** *Gęstością energii* odwzorowania  $\Phi$  nazywamy funkcję

$$e(\Phi) := \frac{1}{2} |d\Phi|^2.$$

*Energia* odwzorowania  $\Phi$  nazywamy liczbę

$$E(\Phi) := \int_M e(\Phi) v_g.$$

Zauważmy, że dla dowolnego odwzorowania mamy  $E(\Phi) \geq 0$  oraz, że  $(E(\Phi) = 0) \Leftrightarrow (\Phi = \text{const.})$ .

W teorii Eells'a i Lémaire'a [6] przyjmuje się następującą definicję odwzorowania harmonicznego:

**Def. 5.** Odwzorowanie  $\Phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  nazywamy *harmonicznym*  $\Leftrightarrow$  gdy jest odwzorowaniem ekstremalnym dla funkcjonału energii  $E(\Phi)$ .

Ciekawą i ważną charakteryzację odwzorowań harmonicznych podali Eells i Baird w [6]. Użyli do tego pojęcia „tensora napięcia i energii” (stress-energy tensor).

**Def. 6.** Niech  $\Phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  będzie gładkim odwzorowaniem, a  $e := e(\Phi)$  jego gęstością energii. Wówczas *tensorem napięcia i energii* odwzorowania  $\Phi$  nazywamy symetryczny 2-tensor  $S_\Phi$  określony na  $M$  i zdefiniowany następująco:

$$S_\Phi := e \cdot g - \Phi^* h.$$

Dla takiego 2-tensora definiujemy jego dywergencję: jeżeli  $(x^i)$  oznacza lokalny układ współrzędnych, to

$$(\text{div } S_\Phi)_i := g^{jk} \nabla_{\partial_j} S_{ki}.$$

Eells i Baird [6] udowodnili następujące:

**Tw. 3.** Jeżeli  $\Phi$  jest odwzorowaniem harmonicznym, to  $S_\Phi$  jest tensorem zachowawczym, tzn.  $\text{div } S_\Phi = 0$ . Jeżeli  $\Phi$  jest różniczkowalną submersją prawie wszędzie i jeżeli  $\text{div } S_\Phi = 0$ , to  $\Phi$  jest harmoniczne.

Nadto Eells i Lémaire zauważyli, że w przypadku gdy  $(M, g)$  jest powierzchnią Riemanna i możemy wprowadzić zmienne zespolone, powyższy warunek na harmoniczność jest równoważny istnieniu pewnej funkcji holomorficzej. Mówiąc bardziej precyzyjnie: jeżeli  $(M, g)$  jest powierzchnią Riemanna i  $g = g_0 dz d\bar{z}$ , wówczas

$$(\text{div } S_\Phi = 0) \Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle \Phi_z, \Phi_z \rangle = 0 \right),$$

gdzie  $\Phi_z := \frac{1}{2}(\Phi_x - i\Phi_y)$ , a  $\langle, \rangle$  jest kompleksyfikacją metryki  $h$ .

Stosując dalej własności funkcji holomorficznych Eells i Lémaire udowodnili wiele innych twierdzeń o odwzorowaniach harmonicznym określonych na powierzchni Riemanna [6].

Po przestudiowaniu teorii Eells'a i Lémaire'a nasunął mi się pomysł przeanalizowania warunku Eells'a i Lémaire'a na harmoniczność w przypadku 4-wymiarowych rozmaitości kwaternionowych.

I tak, rozważmy 4-wymiarowe rzeczywiste rozmaitości Riemannowskie  $M$ , które są lokalnie konforemnie płaskie (np. sfera  $S^4 \equiv \mathbf{H}\mathbf{P}^1$  lub torus  $T^4 \equiv \mathbf{H}/\mathbf{Z}^4$ ), tzn. w otoczeniu każdego punktu  $p \in M$  istnieje taki układ lokalnych współrzędnych  $(x^o, x^1, x^2, x^3)$ , że metrykę  $g$  można przedstawić w postaci:

$$g = g_{\mathbf{R}}^o[(dx^o)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2],$$

gdzie  $g_{\mathbf{R}}^o$  jest rzeczywistą, dodatnią,  $C^\infty$ -funkcją określoną w otoczeniu punktu  $p$ .

Zdefiniujmy lokalną współrzędną kwaternionową:

$$q := x^o + ix^1 + jx^2 + kx^3,$$

wówczas kwaternionowa postać metryki  $g$  jest następująca:

$$g = g_{\mathbf{R}}^o[d\bar{q} \otimes dq + \overline{dq^1} \otimes dq^1 + \overline{dq^2} \otimes dq^2 + \overline{dq^3} \otimes dq^3].$$

Użyliśmy poniższych „sprzężeń kwaternionowych”:

$$\begin{aligned}\bar{q} &= x^o - ix^1 - jx^2 - kx^3, \\ q^1 &= x^o + ix^1 - jx^2 - kx^3, \\ q^2 &= x^o - ix^1 + jx^2 - kx^3, \\ q^3 &= x^o - ix^1 - jx^2 + kx^3.\end{aligned}$$

Dalej, niech  $\Phi : (M^4, g) \rightarrow (N^{4n}, h)$  będzie odwzorowaniem gładkim. W rozpatrywanym przypadku można obliczyć tensor napięcia-energii dla  $\Phi$  we współrzędnych kwaternionowych. Ma on następującą postać:

$$\begin{aligned}S_\Phi &= \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_q \rangle [d\bar{q}dq + \overline{dq^1}dq^1 + \overline{dq^2}dq^2 + \overline{dq^3}dq^3] \\ &\quad - [d\bar{q}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle dq^1 + \overline{dq^1}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle^1 dq + \overline{dq^2}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle^2 dq^3 \\ &\quad + \overline{dq^3}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle^3 dq^2] \\ &\quad - [d\bar{q}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle dq^2 + \overline{dq^2}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle^2 dq + \overline{dq^1}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle^1 dq^3 \\ &\quad + \overline{dq^3}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle^3 dq^1] \\ &\quad - [d\bar{q}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle dq^3 + \overline{dq^3}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle^3 dq + \overline{dq^1}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle^1 dq^2 \\ &\quad + \overline{dq^2}\langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle^2 dq^1],\end{aligned}$$

gdzie  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza rozszerzenie metryki  $h$  na skwaternionizowaną wiązkę styczną  $T^{\mathbf{H}}N := TN \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H}$ .

Zgodnie z powyższym wzorem możemy zdefiniować cztery tensory  $S_o, S_1, S_2, S_3$ , każdy odpowiadający jednej linijce tak, że  $S = S_o + S_1 + S_2 + S_3$ .

Znalezienie kwaternionowej postaci tensora napięcia-energii daje ciekawą charakterystykę odwzorowań konforemnych, mianowicie:

**Tw. 4.**

$$\begin{aligned} (\Phi \text{ jest konforemne}) &\Leftrightarrow (S_1 = S_2 = S_3 = 0) \\ &\Leftrightarrow (S_\Phi \text{ jest tensorem Q-Hermitowskim}) \Leftrightarrow (\Phi \text{ jest Q-holomorficzne}). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc uogólnienie twierdzenia Eells'a-Lémaire'a na przypadek 4-wymiarowy, gdzie pojęcia z analizy zespolonej, takie jak Hermitowskość i holomorficzność zostały zastąpione przez ich kwaternionowe uogólnienia.

Mając kwaternionową postać tensora napięcia-energii znajdujemy szereg kwaternionowych warunków na harmoniczną odwzorowań. Na przykład:

**Tw. 5.** Niech  $\Phi : (M^4, g) \rightarrow (N^{4n}, h)$  będzie gładkim odwzorowaniem między dwiema gładkimi rozmaitościami Riemannowskimi. Załóżmy, że  $M^4$  jest lokalnie konforemnie płaska i  $\dim_{\mathbf{R}} M^4 = 4$ ,  $\dim_{\mathbf{R}} N^{4n} = 4n$ . Jeżeli  $\Phi$  jest harmoniczne, wówczas  $\Phi$  spełnia następujący układ równań:

$$\begin{aligned} &Re\{\nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_q \rangle - \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle - \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle \\ &\quad - \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle\} = 0, \\ &Re\{i[\nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle - \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^1}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_q \rangle + \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle \\ &\quad + \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle]\} = 0, \\ &Re\{j[\nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle + \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle - \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^2}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_q \rangle \\ &\quad + \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle]\} = 0, \\ &Re\{k[\nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^3} \rangle + \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^2} \rangle + \nabla_{\frac{\partial}{\partial q}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_{q^1} \rangle \\ &\quad - \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^3}} \langle \Phi_{\bar{q}}, \Phi_q \rangle]\} = 0. \end{aligned}$$

Co więcej, jeżeli  $\Phi$  jest różniczkowalną submersją prawie wszędzie i powyższy układ jest spełniony, to  $\Phi$  jest harmoniczne (Propozycja 2.6.5).

W wyniku dalszych rozważań otrzymałem następujące uogólnienie rezultatu Eells'a i Lémaire'a w przypadku kwaternionowym:

**Tw. 6.** Niech  $\Phi : (M^4, g) \rightarrow (N^{4n}, h)$  będzie gładkim odwzorowaniem pomiędzy dwiema gładkimi rozmaitościami Riemannowskimi. Dalej, niech  $(M^4, g)$  będzie lokalnie konforemnie płaska oraz  $\dim_{\mathbf{R}} M^4 = 4$  i  $\dim_{\mathbf{R}} N^{4n} = 4n$ . Załóżmy, że

$$Re[D \cdot (G_m - i_m G_o)] = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_m &:= \langle \Phi_m, \Phi_o \rangle + i \langle \Phi_m, \Phi_1 \rangle + j \langle \Phi_m, \Phi_2 \rangle + k \langle \Phi_m, \Phi_3 \rangle, \\ m &= 0, 1, 2, 3; \quad i_o = 1, \quad i_1 = i, \quad i_2 = j, \quad i_3 = k. \end{aligned}$$

Jeżeli  $\Phi$  jest harmoniczne wówczas funkcja

$$F_\Phi := F_o + iF_1 + jF_2 + kF_3 = \frac{1}{2}(|\Phi_o|^2 - |\Phi_1|^2 - |\Phi_2|^2 - |\Phi_3|^2) \\ + i\langle \Phi_o, \Phi_1 \rangle + j\langle \Phi_o, \Phi_2 \rangle + k\langle \Phi_o, \Phi_3 \rangle$$

jest antyregularna w sensie Fuetera. Co więcej, jeżeli  $\Phi$  jest różniczkowalną submersją prawie wszędzie i funkcja  $F_\Phi$  jest antyregularna w sensie Fuetera, to  $\Phi$  jest harmoniczne (Tw. 2.6.2).

Mimo pewnej „trywialności” tezy odwrotnej, dopisałem ją celowo, by zachować formę uogólnionego twierdzenia Eells’a-Lémaire’a (Twierdzenie 2.6.1).

\* \* \*

W 1969r. A. Lichnerowicz [31] znalazł gładki niezmiennik homotopijny  $K(\Phi)$  dla odwzorowań  $\Phi : M \rightarrow N$ , gdzie  $M$  jest specjalną rozmaitością prawie Hermitowską, a  $N$  - rozmaitością prawie Kählerowską. Lichnerowicz zdefiniował swój niezmiennik używając form Kählerowskich rozpatrywanych rozmaitości następująco:

$$K(\Phi) := \int_M \langle \omega^M, \Phi^* \omega^N \rangle dV_M.$$

Lichnerowicz pokazał także, że niezmiennik  $K(\Phi)$  może być wyrażony przy pomocy dwóch „częściowych” energii  $E'(\Phi)$  i  $E''(\Phi)$  związanych w sposób naturalny z danym odwzorowaniem:

$$K(\Phi) = E'(\Phi) - E''(\Phi), \\ E'(\Phi) := \int_M e'(\Phi) dV_M, \quad E''(\Phi) := \int_M e''(\Phi) dV_M, \\ e'(\Phi) := |\partial\Phi|^2 = g^{i\bar{j}} h_{\alpha\bar{\beta}} \Phi_i^\alpha \overline{\Phi_j^\beta}, \quad e''(\Phi) := |\bar{\partial}\Phi|^2 = g^{i\bar{j}} h_{\alpha\bar{\beta}} \Phi_j^\alpha \overline{\Phi_i^\beta}.$$

Udało mi się uogólnić niezmiennik homotopijny Lichnerowicza na przypadek rozmaitości kwaternionowych [23] wykorzystując stary pomysł „kwaternionowej” formy Kählerowskiej pochodzący od Martinelliego [37].

Zauważyłem, że idea konstrukcji niezmiennika  $K(\Phi)$  może być zastosowana w wielu bardzo różnych przypadkach. I tak, przy odpowiednio ogólnych założeniach niezmiennik homotopijny  $K_{\xi,\eta}$  można zdefiniować dla gładkich odwzorowań  $\Phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  pomiędzy rozmaitościami Riemannowskimi, które dopuszczają zdefiniowane „kanoniczne”  $p$ -formy  $\xi \in \Lambda^p M$  i  $\eta \in \Lambda^p N$  grające rolę Kählerowskich 2-form z analizy zespolonej.

Zauważyłem również, że w przypadku rozmaitości Riemannowskich z grupą holonomii z listy Bergera [1], takie formy zawsze istnieją i mogą być użyte do definicji niezmiennika homotopijnego bez żadnych dodatkowych założeń.

W szczególności pokazałem, że nawet w przypadku grupy  $U(n)$  (przypadek zespolony) niezmiennik Lichnerowicza jest tylko pierwszym z serii możliwych do zdefiniowania niezmienników homotopijnych [23]. Także godnym zauważenia jest fakt, że w przypadku form  $\xi$  i  $\eta$  maksymalnego stopnia (równego wspólnemu wymiarowi rozpatrywa-

ných rozmaitości) niezmiennik  $K_{\xi,\eta}$  daje się wyrazić poprzez stopień odwzorowania  $\Phi$  z dokładnością do stałej zależnej od  $Vol(N)$  [23].

Jako zastosowanie niezmienników homotopijnych wprowadzonych w mojej pracy uodowodniłem szereg twierdzeń o homotopijności pewnych klas gładkich odwzorowań  $\Phi : M \rightarrow N$ , gdzie  $M$  i  $N$  są rozmaitościami z  $G$ -strukturami z listy Bergera, m.in. następujące:

**Tw. 8.** Każda immersyjna kwaternionowa podrozmaitość rozmaitości kwaternionowo-Kählerowskiej  $(N^{4n}, h)$ , która jest izometryczna z  $\mathbf{HP}^1$  definiuje nietrywialny element w grupie homotopii  $\pi_4(N^{4n})$  [23].

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem klasycznego twierdzenia Wu [43]. Rezultat Wu dotyczył przypadku, gdy  $(N^{4n}, h)$  jest kwaternionową przestrzenią rzutową  $\mathbf{HP}^m$ , a  $\Phi : \mathbf{HP}^1 \rightarrow \mathbf{HP}^m$  jest kanoniczną immersją kwaternionowej prostej rzutowej.

### Rozdział III

Okazuje się, że zarówno analiza zespolona, jak również analiza kwaternionowa w sensie Fuetera, są szczególnymi przypadkami ogólnej analizy w tzw. teorii „par Hurwitza” [32] - [36]. Teoria ta ma swoje źródło w tzw. „problemie Hurwitza”, który można przedstawić następująco.

Rozważmy dwie rzeczywiste przestrzenie wektorowe  $S$  i  $V$  wyposażone w rzeczywiste iloczyny skalarne  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  i  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ . Załóżmy, że  $\dim_{\mathbf{R}} S = p$ ,  $\dim_{\mathbf{R}} V = n$ ,  $p \leq n$ . Spytajmy, dla jakich  $p$  i  $n$  istnieje biliniowe odwzorowanie  $f : S \times V \rightarrow V$  (zwane „mnożeniem” elementów przestrzeni  $S$  przez elementy przestrzeni  $V$ ) takie, że spełniony jest następujący warunek:

$$\|f(s, v)\|_V = \|s\|_S \cdot \|v\|_V,$$

zwany „warunkiem Hurwitza”.

Ciekawym jest, że w przypadku, gdy  $p = n$  jedynym rozwiązaniem jest:

$$n = 1, 2, 4, 8.$$

A to oznacza, że dla  $n = 1$  mamy  $V \equiv \mathbf{R}$ , dla  $n = 2$  -  $V \equiv \mathbf{C}$ , a dla  $n = 4$  -  $V \equiv \mathbf{H}$  i w końcu, dla  $n = 8$  -  $V \equiv \mathbf{O}$  (oktoniony).

W przypadku, gdy  $S \neq V$  (tzn.  $p \neq n$ ) rozwiązanie podał Hurwitz [11]. Natomiast, jeżeli weźmiemy trzy różne przestrzenie wektorowe  $S, V$  oraz  $W$  o wymiarach odpowiednio  $p, n$  i  $r$  oraz założymy istnienie biliniowego odwzorowania  $f : S \times V \rightarrow W$  z własnością

$$\|f(s, v)\|_W = \|s\|_S \cdot \|v\|_V,$$

to problem Hurwitza pozostaje nadal otwarty.

Przypomnijmy definicję „pary Hurwitza”.

**Def. 7.** Niech  $S$  i  $V$  będą rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi wyposażonymi w niezdegenerowane pseudo-Euklidesowe rzeczywiste iloczyny skalarne  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  i  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  mające standardowe własności.

Przez „mnożenie” elementów przestrzeni  $S$  przez elementy przestrzeni  $V$  rozumiemy biliniowe odwzorowanie  $\circ : S \times V \rightarrow V$  o następujących własnościach:

- i)  $\|a \circ f\|_V^2 = \|a\|_S^2 \cdot \|f\|_V^2$  - warunek Hurwitza, dla  $a \in S, f \in V$ ,  
 ii) istnieje element jednostkowy  $\epsilon_o$  w  $S$  ze względu na to mnożenie,  
 tzn.  $\epsilon_o \circ f = f$  dla każdego  $f \in V$ .

Co więcej, żądamy „nieredukowalności” mnożenia  $\circ : S \times V \rightarrow V$ , co oznacza, że nie pozostawia ono niezmienniczymi podprzestrzeni właściwych przestrzeni  $V$ .

Jeżeli to ma miejsce, to taką trójkę  $(S, V, \circ)$  nazywamy *pseudo-Euklidesową parą Hurwitza* [32 - 36].

Zauważmy, że iloczyn  $a \circ f$  jest jednoznacznie wyznaczony przez tablicę mnożenia dla wektorów bazowych: mianowicie, jeżeli  $(\epsilon_\alpha)$  stanowi bazę w  $S$ , a  $(e_j)$  - bazę w  $V$ , wówczas tablica ta wygląda następująco:

$$\epsilon_\alpha \circ e_j = C_{\alpha j}^k e_k, \quad \alpha = 1, \dots, p = \dim S, \quad j, k = 1, \dots, \dim V.$$

Warunek Hurwitza jest równoważny następującemu warunkowi macierzowemu:

$$C_\alpha C_\beta^+ + C_\beta C_\alpha^+ = 2\eta_{\alpha\beta} I_n,$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_\alpha &:= [C_{\alpha j}^k], & C_\alpha^+ &:= \kappa C_\alpha^T \kappa^{-1}, \\ \kappa &:= [\kappa_{jk}] := [(e_j, e_k)_V], & \eta &:= [\eta_{\alpha\beta}] := [(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta)_S]. \end{aligned}$$

Niech  $(S, V, \circ)$  będzie parą Hurwitza. Rozważmy różniczkowalne w sposób ciągły odwzorowanie  $f$  określone na otwartym zbiorze  $\Omega \subseteq S$  o wartościach w  $V$ :  $f : \Omega \rightarrow V$ . Można je przedstawić następująco:

$$f(\vec{x}) = f(x^\alpha \epsilon_\alpha) = f^k(\vec{x}) e_k, \quad \vec{x} \in S.$$

Definiujemy uogólniony operator Fuetera  $D^+$  jako:

$$D^+ := \epsilon_\alpha \partial^\alpha, \quad \partial^\alpha := \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, p = \dim_{\mathbf{R}} S.$$

Odwzorowanie  $f$  wprowadzone wyżej nazywamy *regularnym* w sensie Fuetera-Hurwitza, jeżeli spełnia równanie *Fuetera-Hurwitza*:

$$D^+ \circ f = 0,$$

gdzie „ $\circ$ ” oznacza mnożenie Hurwitza.

Dodajmy jeszcze, że każdy uogólniony operator Hurwitza  $D^+$  posiada swoje „sprzężenie”  $D := \epsilon_\alpha^+ \partial^\alpha$ , gdzie elementy  $\epsilon_\alpha^+$  zdefiniowane są następująco:

$$\epsilon_\alpha^+ \circ e_j := C_{\alpha j}^{+k} e_k.$$

Operatory  $D$  i  $D^+$  posiadają następującą własność: jeżeli  $f$  jest regularne, to  $D \circ f$  jest także regularne, tzn.  $D \circ D^+ \circ f = D^+ \circ D \circ f$ . Co więcej:

$$D \circ D^+ = D^+ \circ D = \eta_{\alpha\beta} \partial^\alpha \partial^\beta.$$

Przedstawię teraz najważniejsze moje wyniki w teorii par Hurwitza.

**Problem 1.** Znaleźć jakiekolwiek rozwiązanie równania Fuetera-Hurwitza (różne od stałej).

Problem nie jest łatwy. Już w przypadku kwaternionowym, najprostszym (poza zespolonym), żadna „prosta” funkcja typu:  $q^n, e^q, \log|q|$  itp. nie jest rozwiązaniem równania Fuetera.

W ogólnym przypadku sytuacja jest jeszcze bardziej skomplikowana. Niech  $(S, V, \circ)$  oznacza parę Hurwitza. Zauważmy przede wszystkim, że równanie Fuetera-Hurwitza może być zapisane w następującej postaci:

$$(*) \quad \left( \sum_{\alpha=1}^{p-1} \epsilon_\alpha \partial^\alpha + \epsilon_p \partial^p \right) \circ f = 0,$$

gdzie  $f = f^k e_k$  jest odwzorowaniem z  $S$  w  $V$ , a  $\epsilon_p$  może być wybrany jako element jednostkowy w  $S$ , tzn.  $\epsilon_p \circ e_k = e_k$ ,  $k = 1, \dots, \dim V$  ( $\epsilon_p \equiv \epsilon_0$ ).

Korzystając z postaci (\*) równania Fuetera-Hurwitza i stosując kilka trików technicznych znajdujemy krok po kroku rozwiązania wielomianowe.

Definiujemy odwzorowanie  $F_1 : S \rightarrow V$  jako:

$$\begin{aligned} F_1(x, t) &:= F_1(x, \vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n) \\ &:= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\beta=1}^{p-1} t_k^\beta \epsilon_\beta \right) \circ x^p e_k - \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\gamma=1}^{p-1} t_k^\gamma x^\gamma \right) e_k, \end{aligned}$$

gdzie  $\vec{t}_k := (t_k^\beta)$ ,  $t_k^\beta \in \mathbf{R}$ ,  $\beta = 1, \dots, p-1$ ,  $k = 1, \dots, n$  są dowolnymi parametrami. Ponieważ  $\epsilon_\beta \circ e_k = C_{\beta k}^m e_m$ , więc odwzorowanie  $F_1$  jest dobrze zdefiniowane dla każdego układu parametrów  $(\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n) \in \underbrace{\mathbf{R}^{p-1} \times \dots \times \mathbf{R}^{p-1}}_n$ .

$F_1$  jest wielomianem jednorodnym stopnia 1 w zmiennych  $x^\gamma$ ,  $\gamma = 1, \dots, p$  i spełnia równanie Fuetera-Hurwitza.

Aby znaleźć wielomiany jednorodne dowolnego stopnia  $m > 1$  w zmiennych  $x^\gamma$ , postępujemy następująco.

Przed wszystkim zauważamy, że

$$F_1(x, \vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n) = \sum_{k=1}^n (x^p \vec{t}_k - \langle \vec{t}_k, \vec{x} \rangle) \circ e_k,$$

gdzie

$$\vec{t}_k := \sum_{\alpha=1}^{p-1} t_k^\alpha \epsilon_\alpha, \quad k = 1, \dots, n, \quad \vec{x} := \sum_{\beta=1}^{p-1} x^\beta \epsilon_\beta,$$

a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza standardowy iloczyn skalarny w  $\mathbf{R}^{p-1}$ .

Wprowadzając formalne oznaczenia:

$$\begin{aligned} (\vec{t}_k)^{\circ m} &:= \underbrace{\vec{t}_k \dots \vec{t}_k}_m \\ (\vec{t}_k)^{\circ m} \circ e_k &:= \underbrace{\vec{t}_k \dots \vec{t}_k}_{m-1} \circ (\vec{t}_k \circ e_k) := (\vec{t}_k)^{\circ(m-1)} \circ (\vec{t}_k \circ e_k), \\ (\epsilon_p)^{\circ m} &:= \epsilon_p, \quad \epsilon_p \circ e_k = e_k, \quad \vec{t}_k \epsilon_p = \vec{t}_k, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

definiujemy

$$F_m(x, t) := F_m(x, \vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n) := \sum_{k=1}^n [x^p t_k - \langle \vec{t}_k, \vec{x} \rangle]^{om} \circ e_k.$$

$F_m$  są dobrze zdefiniowanymi odwzorowaniami z  $S$  do  $V$  dla każdego układu parametrów  $(\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n) \in \underbrace{\mathbf{R}^{p-1} \times \dots \times \mathbf{R}^{p-1}}_n$  i dla każdego  $m = 1, 2, \dots$ . Co więcej,  $F_m$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $m$  w zmiennej  $x \in S$  oraz  $F_m$  spełnia równanie Fuetera-Hurwitza [28].

Mając rozwiązania wielomianowe dowolnego stopnia w następnym kroku znajdujemy rozwiązanie wykładnicze:

$$(E) \quad \exp\left[\sum_{k=1}^n (x^p t_k - \langle \vec{t}_k, \vec{x} \rangle) \circ e_k\right] := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} F_s(x, t).$$

Ogólne rozwiązanie równania Fuetera-Hurwitza jest dane poprzez superpozycję rozwiązań specjalnych (E) scałkowanych po parametrach  $\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n$ ,  $\vec{t}_k = (t_k^1, \dots, t_k^{p-1})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , zatem wygląda następująco:

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n) \exp\left[\sum_{k=1}^n (x^p t_k - \langle \vec{t}_k, \vec{x} \rangle) \circ e_k\right] dt$$

z odpowiednim jądrem  $A(\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n)$ .

Dalsze szczegóły dotyczące rozwiązań równania Fuetera-Hurwitza, a w tym jego reprezentacji Fourierowskiej, pomijam, by nie przedłużać tego tematu i przejdę do następnych kwestii.

\*      \*      \*

Analiza zespolona, jak również analiza kwaternionowa w sensie Fuetera, są szczególnymi przypadkami analizy w teorii par Hurwitza. Aby uzasadnić takie stwierdzenie, podałem odpowiedniki podstawowych pojęć i twierdzeń analizy zespolonej w analizie Fuetera-Hurwitza.

Przypadek kwaternionowy, pod względem „technicznym” i rachunkowym, jest bardzo trudny. Skala trudności, w przypadku ogólnym, teorii par Hurwitza, zwiększa się jeszcze bardziej. Przedstawię to na przykładzie poszukiwania odpowiedników następujących twierdzeń: Cauchy’ego i wzoru całkowego Cauchy’ego.

Zacznę od uogólnienia pojęcia „indeksu”.

Niech  $(S, V, \circ)$  będzie parą Hurwitza. Zdefiniujemy pewną  $(p - 1)$ -formę w  $S$ , która będzie grać rolę jądra. Przyjmujemy:

$$K_x := \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \epsilon_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p,$$

gdzie  $(\epsilon_i)$  jest bazą w  $S$ , symbol  $\widehat{\phantom{x}}$  oznacza, że odpowiedni wyraz jest pominięty.  $K_x$  jest dobrze zdefiniowaną  $(p - 1)$ -formą w  $S$ .

**Def. 8.** Niech  $\Gamma$  będzie  $(p - 1)$ -cyklem w  $S \setminus \{x_o\}$ ,  $x_o$  - wyróżniony punkt w  $S$ . Definiujemy *indeks* punktu  $x_o$  względem  $\Gamma$  i dowolnego ustalonego wektora  $\vec{l} \in V$  następująco:

$$\text{Ind}_{\Gamma, \vec{l}}(x_o) := \frac{1}{\sigma_{p-1}} \int_{\Gamma} \frac{(x - x_o)^+}{\|x - x_o\|^p} \circ (K_x \circ \vec{l}),$$

gdzie  $x^+ := \epsilon_{\alpha}^+ x^{\alpha}$ , a  $\sigma_{p-1}$  oznacza  $(p - 1)$ -objętość  $(p - 1)$ -sfery jednostkowej  $S_{p-1}$  [27].

Przykład tak zdefiniowanego indeksu pokazuje następujący:

**Lemat 1.** Niech  $\Gamma = S_{p-1}^r$  będzie  $(p - 1)$ -sferą o promieniu  $r$  (i orientacji indukowanej z  $\mathbf{R}^p$ ) traktowaną jako cykl w  $S \setminus \{0\}$  [27], wówczas

$$\text{Ind}_{\Gamma, \vec{l}}(0) = \vec{l}.$$

Dowodzimy (co nie jest oczywiste), że:

1. Indeks  $\text{Ind}_{\Gamma, \vec{l}}(x_o)$  zależy jedynie od klasy homologii cyklu  $\Gamma$  w  $S \setminus \{x_o\}$ .
2.  $\text{Ind}_{\Gamma, \vec{l}}(x_o) \in \mathbf{Z} \cdot \vec{l}$ ,  $\mathbf{Z}$  - oznacza zbiór liczb całkowitych.
3.  $\text{Ind}_{\Gamma, \vec{l}}(x_o)$ , jako funkcja punktu  $x_o$ , jest stałą na każdej spójnej składowej zbioru  $S \setminus \{\Gamma\}$ .

Zauważmy, że  $\text{Ind}_{\Gamma, \vec{l}}(x_o) = k \cdot \vec{l}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Ponieważ  $k$  nie zależy od  $\vec{l} \neq 0$ , zatem możemy przyjąć następującą definicję:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(x_o) := k$$

tak, że

$$\text{Ind}_{\Gamma, \vec{l}}(x_o) = \text{Ind}_{\Gamma}(x_o) \cdot \vec{l}.$$

**Tw. 9 (uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego).** Niech  $f : \Omega \rightarrow V$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem otwartym w  $S$ , będzie odwzorowaniem regularnym w sensie Fuetera-Hurwitza, a  $\Gamma$  -  $(p - 1)$ -cyklem homologicznie trywialnym w  $\Omega$ . Wówczas dla każdego  $x_o \in \Omega \setminus \{\Gamma\}$  mamy:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(x_o) \cdot f(x_o) = \frac{1}{\sigma_{p-1}} \int_{\Gamma} \frac{(x - x_o)^+}{\|x - x_o\|^p} \circ [K_x \circ f(x)].$$

**Tw. 10 (uogólnione tw. Cauchy'ego).** Jeżeli  $f$  jest odwzorowaniem regularnym w sensie Fuetera-Hurwitza w obszarze  $\Omega \subseteq S$ ,  $f : \Omega \rightarrow V$ , a  $\Gamma$  jest  $(p - 1)$ -wymiarowym cyklem homologicznym zeru w  $\Omega$ , wówczas

$$\int_{\Gamma} K_x \circ f(x) = 0.$$

**Uwaga 1.** Zasada maksimum, twierdzenie o wartości głównej (mean value property), jak i wiele innych klasycznych twierdzeń mają swoje analogony w analizie odwzorowań regularnych w sensie Fuetera-Hurwitza.

Jak pokazują powyższe przykłady konstrukcja ogólnej analizy Fuetera-Hurwitza wymaga jedynie definicji pary Hurwitza. Wszystko poza tym „robi się” korzystając z wewnętrznej struktury danej pary Hurwitza.

Warto zaznaczyć, że pojęcie pary Hurwitza okazało się być ważnym narzędziem. Jest ono ściśle związane z teorią algebr Clifforda, stanowi podstawę ogólnej analizy (której przypadkami szczególnymi są: analiza zespolona i analiza kwaternionowa w sensie Fuetera) oraz posiada wiele związków z fizyką teoretyczną [29, 34, 35].

\*      \*      \*

W kolejnej części moich rozważań uogólniłem pojęcie struktury superzespolonej wprowadzonej w [35] na pseudo-Euklidesowe pary Hurwitza [15]. Opisuję podstawowe algebraiczne i geometryczne własności tych struktur i znajduję warunek konieczny i wystarczający dla ich istnienia [15].

W skrócie teorię tę można przedstawić następująco.

Punktem wyjścia jest:

**Def. 9.** Przestrzenią wektorową typu Hurwitza  $\mathbf{E}$  dla pseudo-Euklidesowej przestrzeni wektorowej  $(V, \kappa)$  jest  $p$ -wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni  $End(V, \kappa)$  endomorfizmów przestrzeni  $(V, \kappa)$  składająca się ze wszystkich endomorfizmów  $E$ , które nie pozostawiają niezmienniczymi podprzestrzeni właściwych przestrzeni  $V$  oraz spełniają warunek:

$$(Ef, Ef)_V = \|E\|^2(f, f)_V \quad \text{dla } f \in V, E \in \mathbf{E},$$

gdzie norma  $\|E\| := (Tr E^T E)^{\frac{1}{2}}$ , jest przedstawiona w dowolnej macierzowej reprezentacji endomorfizmu  $E$  dla ustalonej ortonormalnej bazy  $(e_j)$  w  $V$ . Załóżmy jeszcze, że  $\mathbf{E}$  zawiera endomorfizm identycznościowy  $E_o$ .

Rozważmy dalej układ  $\{\gamma_\alpha\}$ ,  $p - 1$  urojonych,  $n \times n$  macierzy określonych poprzez wzory:

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha &= 2\widehat{\eta_{\alpha\beta}} I_n, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, p, \quad \alpha, \beta \neq t, \\ \gamma_\alpha^+ &= -\gamma_\alpha, \quad Re \gamma_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad \alpha \neq t, \\ \gamma_\alpha^+ &:= \kappa \gamma_\alpha^T \kappa^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie  $I_n$  jest  $n \times n$  macierzą jednostkową, a  $\widehat{\eta_{\alpha\beta}}$  określone jest następująco:

$$\widehat{\eta_{\alpha\beta}} := \eta_{\alpha\beta} / \eta_{tt}.$$

Wyberzmy endomorfizmy bazowe  $\{E_o, E_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ ,  $\alpha \neq t$  w  $\mathbf{E}$  tak, że

$$E_o e_j = e_j, \quad E_\alpha e_j = i \gamma_{j\alpha}^k e_k, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad \alpha \neq t, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

gdzie  $i$  oznacza jednostkę urojoną.

Rozważmy teraz ustalony kierunek  $\tilde{n}$  w  $\mathbf{E}$  związany z endomorfizmami  $E_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ ,  $\alpha \neq t$ . Definiujemy ten kierunek następująco:

$$\tilde{n} := \sum_{\alpha=1, \alpha \neq t}^p E_\alpha n^\alpha, \quad \sum_{\alpha, \beta=1; \alpha, \beta \neq t}^p \widehat{\eta_{\alpha\beta}} n^\alpha n^\beta = 1,$$

gdzie  $(n^\alpha)$  jest układem  $p - 1$  liczb rzeczywistych. Zauważmy, że

$$\tilde{n}^2 = -E_o.$$

Co więcej, endomorfizm  $\tilde{n}$  reprezentowany jest w bazie  $(e_j)$  za pomocą macierzy

$$J := in^\alpha \gamma_\alpha$$

o własności:

$$J^2 = -I_n.$$

Oznaczmy przez  $O(k, l)$  grupę ortogonalnych transformacji przestrzeni  $(V, \kappa)$ , gdzie  $\kappa = \text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{-1, \dots, -1}_l \right)$ . Mamy  $J \in O(k, l)$ .

**Problem 2.** Dla jakich par  $(k, l)$  dodatnich liczb całkowitych istnieje macierz  $J \in O(k, l)$  taka, że  $J^2 = -I_n$ ,  $n = k + l$ ?

Odpowiedź dana jest poprzez następujące:

**Tw. 11.** Niech

$$\kappa = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix}, \quad k, l \neq 0.$$

Jeżeli  $J \in O(k, l)$  i  $J$  spełnia warunek  $J^2 = -I_n$ ,  $n = k + l$ , wówczas:

1)  $J$  ma postać:

$$J = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix},$$

gdzie  $A \in \mathcal{M}(k)$ ,  $A \neq 0$ ,  $A^T = -A$ ;  $B \in \mathcal{M}(l)$ ,  $B \neq 0$ ,  $B^T = -B$ ;  $C \in \mathcal{M}(l \times k)$  oraz macierze  $A, B, C$  spełniają warunki:

- a)  $A^T A - C^T C = I_k$ ,
- b)  $A^T C - C^T B = 0$ ,
- c)  $B^T B - C^T C = I_l$ .

2) Liczby  $k$  i  $l$  muszą być parzyste.

Najprostszym przykładem  $J$  jest następująca macierz:

$$J^o = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dowodzę, że zbiór wszystkich macierzy  $J$  spełniających warunki :  $J \in O(k, l)$ ,  $J^2 = -I_n$ ,  $n = k + l$ , jest postaci:

$$J = R J^o R^{-1}, \quad \text{gdzie } R \in O(k, l).$$

Wykorzystując opisany wyżej pomysł struktury superzespolonej podaję efektywną konstrukcję zespolonego iloczynu skalarnego w przestrzeni  $V$  danej pseudo-Euklidesowej pary Hurwitza  $(S, V, \circ)$  [15]. Ten wynik jest odpowiednikiem w teorii par Hurwitza tzw. „lifting theorem” pochodzącego od Fröhlich’a i Mc Evett’a [7].

W części końcowej tego rozdziału pokazuję istnienie odwzorowania biliniowego  $\star : C(Q_S) \times C(Q_V) \rightarrow C(Q_V)$ , gdzie  $(S, V, \circ)$  jest daną parą Hurwitza, a  $C(Q_B)$  oznacza algebrę Clifforda nad przestrzenią wektorową  $B$  wyposażoną w formę kwadratową  $Q_B$ , które to (odwzorowanie) powoduje, że następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} S \times V & \xrightarrow{\circ\text{-Hurwitz multiplication}} & V \\ i_S \times i_V \downarrow & & \downarrow i_V \\ C(Q_S) \times C(Q_V) & \xrightarrow{\star = ?} & C(Q_V) \end{array}$$

jest przemienny (tutaj  $i_B : B \rightarrow C(Q_B)$  oznacza kanoniczne włożenie).

Główny rezultat tej części to:

**Tw. 12.** Niech  $S$  i  $V$  będą rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi wyposażonymi w niezdegenerowane formy kwadratowe, odpowiednio  $Q_S$  i  $Q_V$ . Oznaczmy przez  $C^{\mathbf{C}}(Q_S)$  (odpowiednio -  $C^{\mathbf{C}}(Q_V)$ ) zespoloną algebrę Clifforda dla przestrzeni  $(S, Q_S)$  (odpowiednio  $(V, Q_V)$ ). Załóżmy, że istnieje biliniowe odwzorowanie

$$\star : C^{\mathbf{C}}(Q_S) \times C^{\mathbf{C}}(Q_V) \rightarrow C^{\mathbf{C}}(Q_V),$$

które spełnia następujący warunek:

$$(N) \quad N_V(x_S \star y_V) = N_S(x_S)N_V(y_V), \quad x_S \in \Gamma_S, \quad y_V \in \Gamma_V,$$

gdzie  $\Gamma$  oznacza grupę Clifforda, a  $N$  jest normą spinorową.

Wówczas  $\star$  jest generowane przez mnożenie Hurwitza, tzn.  $\star|_{S \times V} = \circ$ , gdzie  $\circ : S \times V \rightarrow V$  jest biliniowym odwzorowaniem takim, że  $\|s \circ v\|_V = \|s\|_S \|v\|_V$  dla wszystkich  $s \in S$  i wszystkich  $v \in V$  [15].

Rezultat powyższy jest uzupełniony przykładem biliniowego odwzorowania  $\square : C^{\mathbf{C}}(Q_S) \times C^{\mathbf{C}}(Q_V) \rightarrow C^{\mathbf{C}}(Q_V)$ , które nie spełnia warunku (N).

## SOME PROBLEMS OF QUATERNIONIC ANALYSIS

Uwaga

Praca ta jest właściwie wstępem, wprowadzeniem do tematyki książki „The Fueter-Hurwitz operator and related topics”. Zawiera podstawowe pojęcia i podstawowe fakty z tzw. analizy kwaternionowej. Rozdziały I - III, zawierają rzeczy znane lub prawdopodobnie znane, zostały napisane specjalnie z myślą, by przedstawić fundamety tej nie-

znanej powszechnie teorii matematycznej. Nie oznacza to jednak, iż pewne, przedstawione dowody, nie są oryginalne. Omawiając wyniki z tej pracy skupię się wyłącznie na tych, które z pewnością są wyłącznie mojego autorstwa.

### Rozdział III

W tym rozdziale przedstawiłem alternatywną definicję holomorficzności dla funkcji kwaternionowych, tzw. Q-holomorficzność (alternatywną w stosunku do pojęcia funkcji regularnej w sensie Fuetera) i pokazałem dwie własności odwzorowań Q-holomorficznych, które nie mają odpowiedników w analizie zespolonej.

W Rozdziale I definiuję pojęcie *struktury prawie kwaternionowej*, jako uogólnienie struktury prawie zespolonej, w sposób następujący:

**Def. 1.** Niech  $V$  będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. *Strukturą prawie kwaternionową*  $\mathcal{H}$  na  $V$  nazywamy układ 2 struktur prawie zespolonych  $\{I, J\}$  takich, że

$$IJ + JI = 0, \quad I^2 = J^2 = -Id \quad (IJ = -JI),$$

gdzie  $Id$  oznacza endomorfizm identycznościowy na  $V$ .

Stosując pojęcie struktury prawie kwaternionowej definiuję pojęcie odwzorowania *Q-holomorficznego*.

**Def. 2.** Niech  $V = (V, \mathcal{H}_V)$  i  $W = (W, \mathcal{H}_W)$  będą rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi wyposażonymi w struktury prawie kwaternionowe, odpowiednio  $\mathcal{H}_V = (I_1, I_2)$  i  $\mathcal{H}_W = (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ . Załóżmy, że  $\Phi : V \rightarrow W$  jest gładkim odwzorowaniem. Wówczas odwzorowanie  $\Phi$  nazywamy *Q-holomorficznym*, jeżeli spełnia następujący warunek:

$$\tilde{I}_\alpha \circ d\Phi = d\Phi \circ I_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Pokazuję następujące:

**Tw. 1.** Niech  $U$  będzie otwartym otoczeniem 0 w  $\mathbf{R}^4$ . Załóżmy, że  $\Phi : \mathbf{R}^{4n} \rightarrow \mathbf{R}^4$  jest odwzorowaniem Q-holomorficznym ze względu na standardowe struktury prawie zespolone, odpowiednio  $\{I_1, I_2\}$  i  $\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2\}$ . Jeżeli  $\Phi$  jest odwzorowaniem osobliwym w 0, to jest odwzorowaniem stałym.

**Przykład 1.** Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe w analizie zespolonej. Weźmy, dla przykładu, odwzorowanie  $\Phi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  określone wzorem:  $\Phi(z) := z^2$ . Odwzorowanie to spełnia założenia Tw. 1 i jest osobliwe w 0, ale nie jest odwzorowaniem stałym.

### Rozdział IV

W tym rozdziale udowadniam jeden z najbardziej znaczących rezultatów moich prac. Mianowicie stosując podstawowe pojęcia analizy kwaternionowej pokazuję, że nie istnieją 4-wymiarowe rozmaitości prawie Kählerowskie, które są lokalnie konforemnie płaskie i posiadają metrykę szczególnej postaci. Dokładnie udowadniam, że prawdziwe jest

poniższe Tw.2, ale zanim je sformułuję koniecznym jest wprowadzenie następującej definicji:

**Def. 3.** Rozmaitość Riemannowską  $(M^4, g)$  nazywamy *lokalnie konforemnie płaską*, jeżeli dla każdego punktu  $p_o \in M^4$  istnieje układ lokalnych współrzędnych  $(U; w, x, y, z)$  taki, że w tym układzie metrykę  $g$  można przedstawić w postaci:

$$(g) \quad g = g_o(p)[dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad p \in U_{p_o},$$

gdzie  $g_o$  jest rzeczywistą, dodatnią funkcją klasy  $C^\infty$ , określoną w  $U_{p_o}$ .

**Tw. 2.** 4-wymiarowa rozmaitość prawie Kählerowska nie może posiadać lokalnie konforemnie płaskiej metryki Riemannowskiej postaci:

$$g_o(w, x, y, z) := g_o(r), \quad r^2 := w^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

gdzie  $g_o(r)$  jest funkcją analityczną w zmiennej  $r$  różną od stałej.

Punktem wyjścia dla udowodnienia powyższego twierdzenia jest ciekawy fakt pokazujący związek 4-wymiarowych lokalnie konforemnie płaskich rozmaitości prawie Kählerowskich z kwaternionowymi funkcjami regularnymi w sensie Fuetera. Oto on:

**Lemat 1 (Basic Lemma).** Jeżeli  $(M^4, J, g, \Omega)$  jest 4-wymiarową lokalnie konforemnie płaską rozmaitością prawie Kählerowską, wówczas funkcja  $g_o$ , zdefiniowana w (g), jest modułem kwaternionowej funkcji, która jest regularna w sensie Fuetera i wyznaczona jednoznacznie przez strukturę prawie zespoloną  $J$  i 2-formę fundamentalną  $\Omega$ .

Jako uzupełnienie powyższych rozważań podałem kilka przykładów metryk lokalnie konforemnie płaskich, o których mowa w Tw. 2 i Lemacie 1. Jeden z nich jest godny podkreślenia, a mianowicie:

**Przykład 2.** Model Poincaré'go, tzn. kula jednostkowa  $B^4$  w  $\mathbf{R}^4$  wyposażona w metrykę:

$$g := \frac{4}{(1 - r^2)^2}(dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad r^2 := w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

nie jest rozmaitością prawie Kählerowską.

Z dowodu Tw. 2 wynika kolejny znaczący wynik, a mianowicie:

**Tw. 3.** Równanie Fuetera  $D^+ \cdot F = 0$  (Def. 2 Wstępu) nie posiada rozwiązania, którego moduł byłby postaci:

$$\|F\| := g(r), \quad r^2 := w^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

gdzie  $g(r)$  jest funkcją analityczną różną od stałej.

## Rozdział V

Ta część poświęcona jest kwaternionowym podrozmaitościom Lagranżanowskim. Podaję w nim m.in. warunek konieczny i wystarczający aby graf był kwaternionową podrozmaitością Lagranżanowską.

**Tw. 4.** Załóżmy, że  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$  jest zbiorem otwartym i niech  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^1$ . Oznaczmy przez  $M$  graf odwzorowania  $f$  w  $\mathbf{H}^n = \mathbf{R}^n + i\mathbf{R}^n + j\mathbf{R}^n + k\mathbf{R}^n$ . Wówczas graf  $M$  jest kwaternionową podrozmaitością Lagranżanowską wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Jacobiego  $[\frac{\partial f^i}{\partial x_j}]$  jest symetryczna.

W szczególności, jeżeli  $\Omega$  jest zbiorem jednopójnym, wówczas  $M$  jest Lagranżanowską wtedy i tylko wtedy, gdy  $f = \nabla F$ , tzn. gdy  $f$  jest gradientem pewnego potencjału  $F \in C^2(\Omega)$ .

Udowodniłem także

**Tw. 5.** (Proposition V.2.1) Jeżeli  $\xi \subset \mathbf{C}^{2n}$  jest płaszczyzną Lagranżanowską w sensie zespolonym, to również  $\xi \subset \mathbf{H}^{2n}$  jest Lagranżanowską w sensie kwaternionowym.

W tym rozdziale pokazuję również jawne postaci pewnych charakterystycznych równań różniczkowych naturalnie związanych z pewnymi typami kwaternionowych podrozmaitości Lagranżanowskich.

Dodatkowo przedstawiam odkryty przeze mnie niedawno związek pomiędzy kwaternionowymi funkcjami regularnymi w sensie Fuetera a 2-formami fundamentalnymi na 4-wymiarowej rozmaitości prawie Kählerowskiej.

## QUATERNIONIC REGULAR FUNCTIONS IN THE SENSE OF FUETER AND FUNDAMENTAL 2-FORMS ON A 4-DIMENSIONAL ALMOST KÄHLER MANIFOLD

Jest rzeczą bardzo ciekawą, że wykorzystując własności funkcji kwaternionowych można otrzymać znaczące wyniki w analizie zespolonej. Istnieje wiele zdumiewających związków pomiędzy kwaternionowymi funkcjami regularnymi w sensie Fuetera a wieloma obiektami (pojęciami) z analizy zespolonej (n.p. Rozdział IV w mojej książce „Some problems of quaternionic analysis”). W mojej pracy pokazuję kolejny z takich faktów, mianowicie, że istnieje związek między kwaternionowymi funkcjami regularnymi w sensie Fuetera a fundamentalnymi 2-formami na 4 wymiarowej rozmaitości prawie Kählerowskiej.

**Tw.**

a) Każdej kwaternionowej funkcji  $F$  postaci:

$$F = Ai + Bj + Ck,$$

która jest lewo regularna w sensie Fuetera można przyporządkować skośnie symetryczną  $4 \times 4$ -macierz postaci:

$$(*) \quad \Omega_F = \begin{pmatrix} 0 & C & -B & A \\ -C & 0 & A & B \\ B & -A & 0 & C \\ -A & -B & -C & 0 \end{pmatrix},$$

która jest zamkniętą 2-formą:  $d\Omega_F = 0$ .

b) Odwrotnie, każdej skośnie symetrycznej  $4 \times 4$ -macierzy  $\Omega$  postaci (\*), która jest zamkniętą 2-formą, można przyporządkować w sposób jednoznaczny funkcję kwaternionową

$$F_\Omega := Ai + Bj + Ck,$$

która jest lewo regularna w sensie Fuetera.

c) Spełniona jest równość:

$$\det \Omega_F = (A^2 + B^2 + C^2)^2 = \|F_\Omega\|^2.$$

c) Dla dowolnych skośnie symetrycznych  $4 \times 4$ -macierzy postaci (\*):

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & -B_1 & A_1 \\ -C_1 & 0 & A_1 & B_1 \\ B_1 & -A_1 & 0 & C_1 \\ -A_1 & -B_1 & -C_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & C_2 & -B_2 & A_2 \\ -C_2 & 0 & A_2 & B_2 \\ B_2 & -A_2 & 0 & C_2 \\ -A_2 & -B_2 & -C_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ich iloczyny  $\Omega_1 \cdot \Omega_2$  oraz  $\Omega_2 \cdot \Omega_1$  są postaci (\*) wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujący warunek:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

e) Dla dowolnych kwaternionowych funkcji postaci:

$$F_1 := A_1 i + B_1 j + C_1 k,$$

$$F_2 := A_2 i + B_2 j + C_2 k$$

ich iloczyny  $F_1 \cdot F_2$  oraz  $F_2 \cdot F_1$  są postaci:

$$Ai + Bj + Ck$$

wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujący warunek:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

f) Jeżeli

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & C & -B & A \\ -C & 0 & A & B \\ B & -A & 0 & C \\ -A & -B & -C & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

wówczas

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} &= -\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & C & -B & A \\ -C & 0 & A & B \\ B & -A & 0 & C \\ -A & -B & -C & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \Omega = -\frac{1}{\sqrt{\det \Omega}} \Omega \end{aligned}$$

g) Jeżeli

$$F = Ai + Bj + Ck \quad (F \neq 0),$$

wówczas

$$F^{-1} = \frac{\overline{F}}{\|F\|} = \frac{-(Ai + Bj + Ck)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{\|F\|} F.$$

## LITERATURA

- [1] M.M. B e r g e r, Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés Riemanniennes, Bull. Soc. Math. France 83 (1955), pp. 279-330.
- [2] A.L. B e s s e, Einstein manifolds, Ergeb. der Math. 3, Folge Band 10, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1987.
- [3] E. B o n a n, Sur les G-structures de type quaternionen, Cahiers de Top. et Geom. Diff. 9 (1967), pp. 389-461.
- [4] F. B r a c k x, R. D e l a n g h e and F. S o m m e n, Clifford analysis, Research Notes in Math. 75, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1982.
- [5] S.S. C h e r n, On a generalization of Kähler geometry, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton, N.J., 1957.
- [6] J. E e l l s and L. L é m a i r e, Selected topics in harmonic maps, Conference Board of the Mathematical Sciences, Amer. Math. Soc. Vol 50, Rhode Island, 1983.
- [7] A. F r ö l i c h and A. M c E v e t t, Forms over rings with involution, J. Algebra 12 (1969), pp. 79-104.
- [8] R. F u e t e r, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta=0$  und  $\Delta\Delta=0$  mit vier reellen Variablen, Comment. Math. 7 (1935), pp. 307-330.
- [9] —, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, Comment. Math. Helv. 8 (1936), pp. 371-378.
- [10] W.V.D. H o d g e, The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge Univ. Press, New York, 1952.
- [11] A. H u r w i t z, Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Kl (1898), pp. 309-316; reprinted in: A. Hurwitz, Mathematische Werke II, Birkhäuser Verlag, Basel (1933), pp. 565-571.
- [12] —, Über die Komposition der quadratischen Formen, Math. Ann. 88 (1923), pp. 1-25; reprinted in: A. Hurwitz, Mathematische Werke II, Birkhäuser Verlag, Basel (1933), pp. 641-666.
- [13] W. K l i g e n b e r g, Manifolds with restricted conjugate locus, Ann. of Math., 78, pp. 537-547, 1963.
- [14] S. K o b a y a s h i and K. N o m i z u, Foundations of Differential Geometry, Vols. I-II, Interscience, 1963.
- [15] W. K r ó i k o w s k i, Anisotropic complex structure on the pseudo-Euclidean Hurwitz pairs, Ann. Pol. Math., Vol. 55 (1991), pp. 225-240.
- [16] —, On Fueter-Hurwitz regular mappings, Dissertationes Mathematicae, Vol. CCCLIII, Warsaw 1996, 91 pages.
- [17] —, Pairs of Clifford algebras of the Hurwitz-type, Proc. of the Internat. Symposium on Generalizations of Complex Analysis and Their Applications in Physics, Warsaw,

May 30 - July 1, 1994, Ed. by J. Ławrynowicz, Banach Center Publications, Vol. 37, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw 1996, pp. 327-330.

[18] —, Fueter regular mappings and harmonicity, *Ann. Pol. Math.*, Vol. 64, No. 2, 1996, pp. 97-114.

[19] —, A Clifford-type structure, *Demonstratio Math.*, Vol. XXXVI, No. 3, pp. 563-578, 2003.

[20] —, Quaternionic condition for the existence of 4-dimensional locally conformally flat almost Kähler manifolds, *Demonstratio Math.*, Vol. XXXIX, No. 1, pp. 195-202, 2006.

[21] —, On some singularity of a hypercomplex analysis, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Sectio Mathematica*, Vol. 48, 2005, pp. 19-29.

[22] —, On 4-dimensional locally conformally flat almost Kähler manifolds, *Archivum Mathematicum*, Tomus 42, pp. 1-9, 2006.

[23] — and S. Marchiava, On Lichnerowicz smooth homotopy invariants for G-structures, *Noti di Matematica*, Vol. 13, No. 1 (1993), pp. 197-212.

[24] — and R.M. Porter, Quaternionic regular and biregular functions in the sense of Fueter, *Ber. Univ. Jyväskylä Math. Inst.* 55 (1993), pp. 65-87.

[25] — and —, Regular and biregular functions in the sense of Fueter - some problems, *Ann. Pol. Math.*, Vol. LIX, No. 1 (1994), pp. 53-64.

[26] — and —, Biregular quaternionic functions, *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, Proc. of the Internat. Conf., Deinze, May 3 - 7, 1993, Ed. by F. Brackx et al., Kluwer Academic Publishers, 1993, Dordrecht-Boston-London, Vol. 55, pp. 129-135.

[27] — and E. Ramirez de Arellano, Fueter-Hurwitz regular mappings and an integral representation, *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, Proc. Montpellier 1989, Ed. by A. Micali et al., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London (1992), pp. 221-237.

[28] — and —, On polynomial solutions of the Fueter-Hurwitz equation, *American Mathematical Society, Series "Contemporary Mathematics"*, Vol. 137 (1992), pp. 297-305.

[29] — and D. Lambert, J. Ławrynowicz and J. Rembeliński, The CR-problem and Hurwitz pairs applied to field theory and solid state physics, *Reports on Mathematical Physics*, Vol. 29, No. 1 (1991), pp. 23-44.

[30] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variété Kähleriennes, *Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano* 39 (1969), pp. 1-12.

[31] —, Applications harmoniques et variété Kähleriennes, *Symp. Math.* III (1970), Bologna, pp. 341-402.

[32] J. Ławrynowicz and J. Rembeliński, On the composition of non-degenerate quadratic forms with an arbitrary index, *Annales Faculté des Science de Toulouse X* (1989), pp. 141-168.

- [33] — and —, Hurwitz pairs equipped with complex structure, Seminar on Deformations, Łódź-Warsaw 1982-84, Proceedings (Lecture Notes in Math. 1165) (J. Lawrynowicz, ed.), Springer-Verlag, Berlin (1985), pp. 184-187.
- [34] — and —, Pseudo-Euclidean Hurwitz pairs and Kałuża-Klein theories, J. Phys. A: Gen. 20 (1987), pp. 5831-5848.
- [35] — and —, Supercomplex vector spaces and spontaneous symmetry breaking, Seminari di Geometria 1984, CNR (Università di Bologna), Bologna (S. Coen, ed.), pp. 131-154.
- [36] — and —, Pseudo-Euclidean Hurwitz pairs and generalized Fueter equations, Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics, Proceedings, Canterbury 1985 (J.S.R. Chisholm and A.K. Common, eds.), D. Reidel, Dordrecht (1986), pp. 39-48.
- [37] E. M a r t i n e l l i, Variétés à structure quaternionnienne généralisées, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 10 (1965), pp. 915-922.
- [38] I.R. P o r t o u s, Topological geometry, 2nd ed. Cambridge, Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [39] S.M. S a l o m o n, Riemannian geometry and holonomy groups, Pitman Res. Notes Math. Ser. 201, Oxford, 1989.
- [40] V. S o u č e k, Holomorphicity in quaternionic analysis, Seminari di Geometria 1982-1983, Università di Bologna, Istituto de Geometria, Dipartimento de Matematica, 1984.
- [41] A. S u d b e r y, Quaternionic analysis, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85 (1979), pp. 199-225.
- [42] W.T. W u, Sur les classes caractéristiques des structures fibrés sphériques, Publications de l'Institut de Mathematiques de l'Université de Strassbourg, Ed. Hermann, Vol. XI, Paris 1952.

## 6. SPIS ZNACZĄCYCH PUBLIKACJI NAUKOWYCH SPOZA ROZPRAWY

1. A gauge theory for the Kadomtsev-Petviashvili system, Publication of the Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, Vol. 22, No. 6, 1986, pp. 1119-1128 (wspólna z S. Kanemaki i O. Suzuki).
2. On some Lagrangian model concerning the solitary waves, Reports on Mathematical Physics, Vol. 29, No. 2, 1991, pp. 123-139.
3. The CR-problem and Hurwitz pairs applied to field theory and solid state physics, Reports on Mathematical Physics, Vol. 29, No. 1, 1991, pp. 23-44 (wspólna z D. Lambert'em, J. Ławrynowiczem i J. Rembielińskim).
4. A Clifford-type structure, Demonstratio Mathematica, No. 3, Vol. 36, pp. 563-578, 2003.
5. On Clifford-type structures, Dissertationes Mathematicae, Vol. 440, 2006.

## 7. KRÓTKI OPIS PUBLIKACJI NAUKOWYCH SPOZA ROZPRAWY

W pracy 1. zajmujemy się lagranżanowskim opisem pól skalarnych. Definiujemy nowy typ „koneksji”, za pomocą której w nowy i prostszy sposób możemy przedstawić teorię Sato układu Kadomtsev’a-Petviashvili’ego. Wprowadzona przez nas grupa cechowania (gauge group)  $\tilde{G}$  jest grupą składającą się z pewnych pseudo-różniczkowych operatorów stopni niedodatnich. Najważniejszym rezultatem pracy jest stwierdzenie, że przestrzeń  $\mathbf{R}^*$  elementów grupy  $\tilde{G}$  dających rozwiązania układu Kadomtsev’a-Petviashvili’ego definiuje płaską  $\mathbf{R}^*$ -koneksję, którą nazywamy K.P.-koneksją. Ta koneksja może być traktowana jako szczególne pole cechowania (special gauge field).

Praca 2. jest poświęcona zastosowaniu geometrii Finslera do sformułowania teorii pola zawierającej solitony jako rozwiązania równań pola.

Z klasycznego punktu widzenia zjawisko solitonów nie daje się wytłumaczyć. Równania solitonowe opisują zjawiska fizyczne i powinny być traktowane jako równania ruchu dla określonych lagranżanów. Taki lagranżan nie istnieje np. dla najśłynniejszego z równań solitonowych, a mianowicie dla równania Korteweg’a-de Vries’a.

Okazuje się, że można sformułować mechanikę bazującą na geometrii Finslera taką, że solitony są w niej rozwiązaniami równań Lagrange’a-Euler’a.

W omawianej pracy podaję przykłady lagranżanów Finslerowskich, które prowadzą do równań ruchu mających te same rozwiązania co słynne klasyczne równania solitonowe (równania Korteweg’a-de Vries’a i sinus-Gordona). Co więcej pokazuję związki przedstawionej teorii z reprezentacją Lax’a równań solitonowych i układem Kadomtsev’a-Petviashvili’ego.

W pracy 3., stosując narzędzia teorii par Hurwitza, podajemy dokładne rozwiązania pewnych nieliniowych Sigma modeli. W szczególności badamy solitonowe równanie, tzw.

podwójne równanie sinusa-Gordona (double sine-Gordon eq.) w geometrii Finslera, co ma zastosowanie w opisie kryształów ferroelektrycznych. Nadto zajmujemy się równaniem  $u_t u_x = 2u_{tx} \operatorname{tg} \frac{1}{2}u$ , opisującym własności powierzchni kryształów, wykorzystując uogólnienie wyników Pouget'a i Maugin'a.

W pracach 4 - 5 definiuję pojęcie struktury typu Clifforda i rozmaitości typu Clifforda. Wprowadzam odpowiednik fundamentalnej 2-formy z analizy zespolonej i stosując go uogólniam twierdzenie Hodge'a o rozkładzie dla rozmaitości Kählerowskich (Hodge Decomposition Theorem) na rozmaitości typu Clifforda. Nadto, stosując twierdzenie Cherna, pokazuję, że ciąg liczb Bettiego dla rozmaitości typu Clifforda jest rosnący.

## 8. NAGRODY I WYRÓŻNIENIA

- Szkołę średnią, XXVI LO w Łodzi, ukończyłem z medalem "Zasłużony dla XXVI LO".

- Studia na kierunku Matematyka na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego ukończyłem z wyróżnieniem.

- Za pracę magisterską z fizyki p.t. "O odpowiedniości między nieliniowym równaniem Heisenberga a uogólnionym równaniem Diraca" otrzymałem nagrodę I stopnia Polskiego Towarzystwa Fizycznego Oddziału w Łodzi imienia prof. dr. Feliksa Wiśniewskiego.

- W protokole egzaminu doktorskiego, na wniosek prof. dr hab. Krzysztofa Maurina, wpisano mi ocenę bardzo dobrą.

## 9. WYJAZDY W RAMACH WSPÓŁPRACY NAUKOWEJ

Pracowałem dwukrotnie jako "visiting professor":

1. w 1990r., w Uniwersytecie "La Sapienza" w Rzymie i
2. w 1991r., w Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Politechnika w Meksyku), Meksyk.

Nadto, do wygłoszenia odczytów o wynikach własnych byłem zapraszany m.in. przez:

1. prof. Pierre Dolbeault, Université de Paris VI, 1985,
2. prof. Goivanni Porru, Università di Cagliari, 1985,
3. prof. Francesco Succi i Stefano Marchiafava, Università degli Studi di Roma "La Sapienza", 1987 - 1994,
4. prof. Diaz Gongora, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, México, 1989, 1990, 1992,
5. prof. Enrique Ramirez de Arellano, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., México, 1989,
6. prof. Jorge Filipe Almeida, Instituto Superior Novas Profissoes, Lisboa, 2011.

## 10. REFERATY WYGŁOSZONE NA KONFERENCJACH NAUKOWYCH

1. The 2<sup>nd</sup> International Conference on Complex Analysis and Applications, Varna 1981, Bulgaria.

Tytuł referatu: Relative homology groups of complex manifolds.

2. International Conference on Analytic Functions, Błazejewko 1982, Polska.

Tytuł referatu: Biholomorphic invariants on relative homology groups.

3. The 11<sup>th</sup> Rolf Nevalinna Colloquium, Jyväskylä 1983, Finlandia.

Tytuł referatu: Biholomorphic invariants on complex manifolds connected with the relative homologies.

4. Conference on Complex Analysis, Halle (S.) 1984, NRD.

Tytuł referatu: Semi-norms on the relative homology groups.

5. The 3<sup>rd</sup> International Conference on Complex Analysis and Applications, Varna 1985, Bulgaria.

Tytuł referatu: Semi-norms and topologies on relative homology groups.

6. Conferenza: "Metodi di Analisi Reale Nelle Equazioni alle Derivate Parziali", Cagliari 1985, Włochy.

Tytuł referatu: Some biholomorphic invariants of Riemann surfaces connected with the relative homologies.

7. Conference: "The 6<sup>th</sup> Winter School on Geometry and Physics", Srni 1986, Czechosłowacja.

Tytuł referatu: Solitons and Finsler electrodynamics.

8. Ninth Conference on Analytic Functions, Lublin 1986, Polska.

Tytuł referatu: Anisotropic complex structure on the pseudo-Euclidean Hurwitz pairs.

9. The 4<sup>th</sup> International Conference on Complex Analysis and Applications, Varna 1987, Bulgaria.

Tytuł referatu: The Fueter-Hurwitz regular mappings and an integral representation.

10. XIII Rolf Nevalinna Colloquium, Joensuu 1987, Finlandia.

Tytuł referatu: Polynomial solutions of the Fueter-Hurwitz equation.

11. The Third Polish Conference on Surface Physics, Zakopane 1988, Polska.

Tytuł referatu: The CR-problem and Hurwitz pairs applied to the field theory and solid state physics.

12. The 9<sup>th</sup> Winter School on Geometry and Physics, Srni 1989, Czechosłowacja.

Tytuł referatu: On some Lagrangian model concerning the solitary waves.

13. The 10<sup>th</sup> International Conference on Analytic Functions, Szczyrk 1990, Polska.

Tytuł referatu: Biholomorphic invariants generated by the Kronecker index of currents.

14. Seminario Internacional de Algebra y sus Aplicaciones, México C. 1991, Meksyk.

Tytuł referatu: Hyperbolic-type manifolds, homology groups and holomorphic mappings.

15. Fourth Finnish-Polish Summer School in Complex Analysis, Jyväskylä 1992, Finlandia.

Tytuł referatu: Quaternionic regular and biregular functions in the sense of Fueter.

16. Banach Center Symposium on Generalizations of Complex Analysis and Their Applications in Physics, Warszawa 1994, Polska.

Tytuł referatu: Pairs of Clifford algebras of the Hurwitz-type.

17. XVI Rolf Nevanlinna Colloquium, Joensuu, August 1-5, 1995, Finlandia.

Tytuł referatu: Fueter regular mappings and harmonicity.

18. International Conference dedicated to 120th anniversary of Stefan Banach, 17-21 September 2012, Lwów, Ukraina.

Tytuł referatu: Quaternionic condition for the existence of 4-dimensional locally conformally flat almost-Kähler manifolds.

