

AUTOREFERAT

1. **Imiona i Nazwisko:** Marek Tomasz Malinowski

2. **Posiadane dyplomy:**

- Dyplom magistra matematyki uzyskany w czerwcu 2000 roku na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej.
- Dyplom doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka uzyskany w styczniu 2007 roku na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego. Tytuł rozprawy doktorskiej: "Geometryczne sumy losowe".

3. **Zatrudnienie w jednostkach naukowych:**

- od 01.09.2000 do 31.08.2001 – asystent, Instytut Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (przekształconej w wyniku połączenia z Wyższą Szkołą Pedagogiczną w Uniwersytet Zielonogórski),
- od 01.09.2001 do 30.09.2009 – asystent, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego,
- od 01.10.2009 – adiunkt, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego.

4. **Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):**

jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem

**"Stochastyczne równania różniczkowe o wartościach
w zbiorach rozmytych"**

składający się z następujących prac:

- [A1] M.T. Malinowski, On random fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2009) 3152–3165. IF 2,138.
- [A2] M.T. Malinowski, Random fuzzy differential equations under generalized Lipschitz condition, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 13 (2012) 860–881. IF 2,201.

- [A3] M.T. Malinowski, Strong solutions to stochastic fuzzy differential equations of Itô type, *Mathematical and Computer Modelling* 55 (2012) 918–928. IF 1,420.
- [A4] M.T. Malinowski, Some properties of strong solutions to stochastic fuzzy differential equations, *Information Sciences* 252 (2013) 62–80. IF 3,643.
- [A5] M.T. Malinowski, Approximation schemes for fuzzy stochastic integral equations, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2013) 11278–11290. IF 1,349.
- [A6] M.T. Malinowski, On a new set-valued stochastic integral with respect to semimartingales and its applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 408 (2013) 669–680. IF 1,050.

Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

4.1. Wstęp

Równania różniczkowe stanowią użyteczny aparat matematyczny w opisie wielu zjawisk dynamicznych. Modelowanie przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ jest odpowiednie w sytuacji, gdy wiedza o rozważanym systemie jest pełna i natura systemu jest rozpoznana precyzyjnie. W szczególności wszystkie parametry systemu, stan początkowy, związki funkcyjne rządzące dynamiką systemu muszą być ustalone dokładnie. Ich wartości powinny być określone precyzyjnie jako pojedyncze wartości z przestrzeni stanów i tym samym nie powinny być obciążone jakimikolwiek wątpliwościami. Jednakże typową cechą właściwą matematycznemu modelowaniu rzeczywistych zjawisk dynamicznych jest niepewność. Dla przykładu rozważmy modelowanie ilości promieniotwórczych cząstek w radioaktywnej substancji. W 1903 roku E. Rutherford i F. Soddy zaproponowali równanie rozpadu nuklearnego jako model opisujący dynamikę takiego systemu. W tym równaniu istotna jest wiedza o precyzyjnie określonej, początkowej liczbie cząstek promieniotwórczych. Używana w praktyce aparatura pomiarowa nie pozwala w sposób precyzyjny ustalić tej liczby. Wyniki uzyskane dzięki przyrządom pomiarowym są ustalone zawsze z jakimś przedziałem tolerancji. Zatem stan początkowy nie zostanie określony precyzyjnie poprzez pojedynczą wartość, lecz raczej poprzez zbiór - w tym przypadku przedział liczbowy. Brak precyzji może występować również na etapie ustalania funkcyjnych zależności właściwych dla rozważanego systemu. Kierunki wektorów stycznych do rozwiązania określone przez prawą stronę równania różniczkowego mogą nie być jednoznaczne i mogą tworzyć pewne zbiory składające się z dużej ilości możliwych kierunków, z którymi może ewoluować układ. Takie podejście skutkuje dopuszczeniem odwzorowań wielowartościowych, zwanych multifunkcjami, w opisie dynamiki układów z niepewnością. Dwa najbardziej rozpowszechnione matematyczne narzędzia obejmujące modelowanie dynamiki z niepewnością to inkluzje różniczkowe i równania różniczkowe o wartościach w podzbiorach ustalonej przestrzeni, zwane wielowartościowymi równaniami różniczkowymi.

W latach trzydziestych ubiegłego stulecia, S. K. Zaremba i A. Marchaud napisali pierwsze prace [1, 2, 3] związane z inkluzjami różniczkowymi. Te prace dotyczyły tzw. równań orientorowych. Teoria inkluzji różniczkowych postaci $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, gdzie F jest odwzorowaniem wielowartościowym i x jest odwzorowaniem jednowartościowym, zyskała ogromne znaczenie, gdy w 1961 roku T. Ważewski [4] wykazał, że zbiór rozwiązań równania różniczkowego ze sterowaniem pokrywa się ze zbiorem rozwiązań pewnej inkluzji stowarzyszonej z tym równaniem. To zapoczątkowało związek teorii inkluzji różniczkowych z teorią sterowania i przyczyniło się do rozwoju teorii multifunkcji. Tym teoriom poświęcone są m.in. monografie J. -P. Aubina i A. Celliny [5], J. -P. Aubina i H. Frankowskiej [6], C. Castaing i M. Valadier [7], K. Deimlinga [8], S. Djebaliego, L. Górniewicza i A. Ouahaba [9], A. F. Filippova [10], A. Fryszkowskiego [11], S. Hu i N. S. Papageorgiou [12, 13], M. Kisielewicz [14], A. A. Tolstonogova [15] oraz artykuły np. [16–36].

Wielowartościowe równania różniczkowe $X'(t) = F(t, X(t))$, gdzie X i F są multifunkcjami, uogólniają równania różniczkowe zwyczajne w nieco inny sposób niż inkluzje różniczkowe. Takie równania zostały wprowadzone w 1969 roku w pracy F. S. De Blasiego i F. Iervolino [37] z wykorzystaniem pojęcia pochodnej multifunkcji zdefiniowanym przez M. Hukuharę [38] i całki z multifunkcji zdefiniowanym przez R. J. Aumanna [39]. W odróżnieniu od inkluzji różniczkowych, gdzie zwykle otrzymuje się zbiory rozwiązań, tutaj jest możliwe uzyskanie wyników o jednoznaczności rozwiązania. W monografii V. Lakshmikanthama, T. Gnana Bhaskara i J. Vasundhary Devi [40] przedstawiono wiele zagadnień dotyczących takich wielowartościowych równań. Tematyka tych równań stanowi współcześnie niezależny nurt analizy wielowartościowej.

Inkluzje różniczkowe przyczyniły się do zainicjowania badań w dziedzinie rozmytych inkluzji różniczkowych. Pierwsze prace pojawiły się w latach 90-tych poprzedniego wieku i są to prace J. -P. Aubina [41], P. L. Antonelliego i V. Krivana [42], G. Colombo i V. Krivana [43]. Z drugiej strony, wielowartościowe równania różniczkowe mają udział w koncepcji równań różniczkowych o wartościach w zbiorach rozmytych (ang. fuzzy differential equations). Te równania różniczkowe zostały wprowadzone przez O. Kalewę [44] w 1987 roku. Stany układów dynamicznych opisanych przy pomocy takich równań różniczkowych są zbiorami rozmytymi.

Pojęcie zbioru rozmytego pochodzące od L. A. Zadeha [45] uogólnia pojęcie zbioru i pozwala modelować matematycznie nieprecyzyjność, ogólnikowość, niejednoznaczność, rozmytość. Typowymi przykładami zbiorów rozmytych są np. klasa liczb rzeczywistych dużo większych niż 100, nie ma tutaj jasnego kryterium rozstrzygającego jednoznacznie które liczby są a które nie są dużo większe niż 100, klasa niskiej temperatury, klasa młodych ludzi. Każdemu elementowi x z rozważanej przestrzeni można przyporządkować liczbę $u(x)$ z odcinka $[0, 1]$ oznaczającą stopień przynależności elementu x do zbioru rozmytego u . W ten sposób zbiory rozmyte przestrzeni $\mathcal{X}$ utożsamia się z funkcjami $u: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$. Zatem każdy zbiór rozumiany w klasycznym sensie jest zbiorem rozmytym, ponieważ

można identyfikować go z jego funkcją charakterystyczną. Przy pomocy zbiorów rozmytych można matematycznie modelować takie wyrażenia jak np. "gorąca woda", "wysoka temperatura", "niskie ciśnienie", "młody", "około 5%" itp. L. A. Zadeh [46] pokazuje, że dzięki zbiorom rozmytym możliwe jest przejście od wykonywania działań na liczbach do wykonywania operacji na słowach. Teoria zbiorów rozmytych znalazła zastosowanie w modelowaniu układów sterowania. Jednym z bardziej spektakularnych, wczesnych osiągnięć w dziedzinie sterowania rozmytego było uruchomienie kierowanej automatycznie linii metra w japońskim mieście Sendai w roku 1987.

Do matematycznego modelowania zjawisk dynamicznie rozwijających się w czasie i cechujących się ogólnikowością, lub inaczej rozmytością, w opisie stanów mogą dobrze służyć równania różniczkowe o wartościach w zbiorach rozmytych. W dalszym ciągu będą one nazywane rozmytymi równaniami różniczkowymi. L. C. Barros, R. C. Bassanezi i P. A. Tonelli [47] zastosowali je w modelach populacyjnych. W monografii P. Diamonda i P. Kloeden [48] znajduje się rozdział poświęcony rozmytym równaniom różniczkowym. Monografia V. Lakshmikanthama i R. N. Mohapatry [49] zawiera bogatszy opis wiedzy o tych równaniach. Można w niej znaleźć dwie metody formułowania pojęcia rozmytego równania różniczkowego. Pierwsza, pochodząca od O. Kalevy [44], wykorzystuje definicję pochodnej odwzorowania o wartościach w zbiorach rozmytych. Jest ona podobna do definicji pochodnej Hukuhary dla multifunkcji. Rozwiązaniem jest wtedy różniczkowalne, w sensie tej pochodnej, odwzorowanie o wartościach w zbiorach rozmytych przestrzeni $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^d$. W drugiej metodzie, zaproponowanej w roku 1997 przez E. Hüllermeiera [50], nie używa się tej pochodnej. Za to traktuje się równanie jako rodzinę inkluzji różniczkowych wygenerowanych przez prawą stronę równania. Rozwiązaniem jest wtedy pewien zbiór rozmyty w przestrzeni funkcji ciągłych lub absolutnie ciągłych. Rezultaty uzyskane przy zastosowaniu każdej z wymienionych metod mają pewne cechy, które mogą być uznane za niepożądane. Na przykład, rozmytość wartości rozwiązania równań z [44] rośnie wraz ze zmienną czasową. To powoduje duże trudności w rozważaniu równań z rozwiązaniami okresowymi. Natomiast rozwiązania uzyskane metodą inkluzji nie są odwzorowaniami o wartościach z przestrzeni stanów. Istnieje szereg prac zawierających wyniki z zakresu takich równań. Można tu wspomnieć np. [51–67], gdzie prezentowane są wyniki dla rozmytych równań różniczkowych formułowanych opisanymi wyżej dwoma metodami.

Wszystkie wspomniane wyżej uogólnienia równań różniczkowych zwyczajnych wpisują się w problematykę badań układów dynamicznych, w których jedynym źródłem niepewności w modelowaniu jest ogólnikowość lub mówiąc najogólniej - rozmytość. Drugim, zupełnie innym źródłem niepewności w dynamice zjawisk jest wpływ czynników losowych lub szumów stochastycznych. Losowe i stochastyczne równania różniczkowe, którym poświęcone są monografie np. A. T. Bharuhy-Reida [68], C. P. Tsokosa i W. J. Padgetta [69], I. I. Gihmana i A. V. Skorohoda [70], B. Øksendala [71], G. Da Prato i J. Zabczyka [72], stanowią szeroki aparat modelowania stochastycznego. W sy-

tuacji, gdy stany układu ze stochastycznymi szumami nie są wyrażone poprzez pojedyncze wartości, można ten układ traktować jak układ z dwoma rodzajami niepewności: losowością i ogólnikowością. Pierwszymi narzędziami modelowania zjawisk poddawanych niepewnościom wynikającym z losowości i rozważania odwzorowań wielowartościowych w opisie tych zjawisk są stochastyczne inkluzje różniczkowe. Badali je G. Da Prato, M. Ianelli i L. Tubaro (1978) [73], P. Krée (1982) [74], L. Tubaro (1983) [75], C. Tudor (1987) [76], E. Cépa (1994) [77], R. Pettersson (1995, 1997) [78, 79] przyjmując, że współczynnik dryfu jest wielowartościowy a współczynnik dyfuzji jest jednowartościowy. Inkluzje bez części dyfuzyjnej, w postaci inkluzji losowych były rozważane przez N. S. Papageorgiou (1986) [80], F. S. De Blasiego i J. Myjaka (1987) [81], L. E. Rybińskiego (1989) [82], D. A. Kandilakisa i N. S. Papageorgiou (1989) [83], A. Nowaka (1989) [84], M. Michtę (1995) [85], J. Andresą i L. Górniewicza (2012) [86]. Stochastyczne inkluzje różniczkowe z wielowartościowym współczynnikiem dryfu i wielowartościowym współczynnikiem dyfuzji badali jako pierwsi M. Kisielewicz (1993) [87], G. Da Prato i H. Frankowska (1994) [88], N. U. Ahmed (1994) [89], J. Motyl (1995) [90], J. -P. Aubin i G. Da Prato (1998) [91], M. Michta (2002) [92].

Teoria inkluzji stochastycznych uogólnia teorię deterministycznych inkluzji różniczkowych oraz teorię stochastycznych równań różniczkowych i czerpie z tych teorii wiele inspiracji. W tej teorii pojawiają się zagadnienia m.in. rozwiązań mocnych, słabych i łagodnych. Zagadnienia sterowania stochastycznego [93–100] też mogą być formułowane w terminach inkluzji stochastycznych. Ta teoria jest wciąż badana [101–116]. W 2013 roku została opublikowana monografia M. Kisielewicza [117] poświęcona w całości stochastycznym inkluzjom różniczkowym.

W nurt badań o matematycznych modelach układów dynamicznych poddawanych dwóm rodzajom niepewności (losowości, rozmytości) wpisują się zagadnienia stochastycznych równań różniczkowych o wartościach w zbiorach rozmytych. W dalszej części autoreferatu, te równania będą nazywane rozmytymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi. Tematyka tych równań jest nowa i znajduje się w początkowej fazie rozwoju, choć pierwsze wzmianki o możliwości rozważania takich równań pojawiają się w roku 1999 w pracy B. K. Kima i J. H. Kima [118]. Jednak ta praca nie zawiera żadnych badań i wyników o rozmytych równaniach stochastycznych.

4.2. Rozmyte stochastyczne równania różniczkowe

Najbardziej pożądanym i podstawowym etapem teorii rozmytych stochastycznych równań różniczkowych wydaje się być zdefiniowanie i zbadanie własności nowych całek stochastycznych właściwych dla rozmytych procesów stochastycznych. W szczególności potrzebne byłoby określenie rozmytej całki typu Itô, która dla procesów jednowartościowych pokrywałaby się z klasyczną stochastyczną całką

Itô kluczową w klasycznej analizie stochastycznej. Rozmyta całka Itô powinna uogólniać również pojęcie wielowartościowej całki Itô i być z nią mocno związana z uwagi na to, że każdy zbiór jest zawsze zbiorem rozmytym.

Wielowartościowe całki stochastyczne typu Lebesgue'a i Itô są nieodłączną częścią teorii stochastycznych inkluzji różniczkowych. Te całki wprowadzone zostały przez M. Kisielewicz [87] na początku lat 90-tych poprzedniego wieku i są one podzbiorami przestrzeni wektorów losowych całkownych z kwadratem. Definicje tych całek są podobne do definicji wielowartościowej całki Aumanna [39] dla deterministycznej multifunkcji. Te stochastyczne całki nie są mierzalnymi multifunkcjami określonymi na przestrzeni probabilistycznej. W pracy B. K. Kima i J. H. Kima [118] przedstawione zostało inne podejście do definiowania całki stochastycznej Itô dla procesów wielowartościowych i rozmytych w przestrzeni Hilberta. Autorzy pracy [118] piszą o możliwości formułowania rozmytych stochastycznych równań różniczkowych. Zdefiniowana przez nich wielowartościowa całka Itô miałaby być mierzalną multifunkcją, której zbiór selekcji pokrywa się z wielowartościową całką stochastyczną wprowadzoną przez M. Kisielewicz. Ta całka wykorzystana jest następnie do zdefiniowania rozmytej całki Itô. Jednak autorzy nie zauważyli, że całka M. Kisielewicz nie jest zbiorem dekomponowalnym. To powoduje, że ich podejście nie jest poprawne. Te uwagi są zawarte w pracy M. Kisielewicz (2012) [119]. Poprawna definicja wielowartościowej całki Itô, jako mierzalnej multifunkcji o wartościach będących podzbiorami prostej rzeczywistej, została podana przez E. J. Junga i J. H. Kima w 2003 roku w pracy [120]. Jednak przedstawione własności całki nie są prawdziwe, a dowody twierdzeń nie są poprawne na co zwracają uwagę M. Kisielewicz [119] oraz J. Zhang, S. Li, I. Mitoma i Y. Okazaki [121]. Ponadto J. Zhang (2008) [122] pokazuje, że wielowartościowa całka stochastyczna nie posiada "własności przekroju", która jest kluczowa dla określenia rozmytej całki typu Itô. To przekreśla wynik J. H. Kima (2005) [123] oraz S. Li i A. Ren (2007) [124] o istnieniu takiej całki. Zatem praca J. H. Kima (2005) [123] o rozmytych stochastycznych równaniach różniczkowych zawierająca zastosowanie takiej całki mogłaby być kwestionowana.

Czytając systematyzację badań omówionych powyżej można zapytać czy jest możliwe zaproponowanie matematycznego aparatu dostosowanego do modelowania zjawisk poddawanych losowym zaburzeniom i o rozmytych wartościach, to znaczy czy można zbudować teorię rozmytych stochastycznych równań różniczkowych. Odpowiedź jest pozytywna. Bez rozmytej całki Itô można badać rozmyte równania z rozmytą stochastyczną całką Lebesgue'a, której istnienie można udowodnić. Takie podejścia, choć niejednakowe w szczegółach, prezentowane są przez Y. Fenga (2000) [125], W. Fei'a (2007) [126] oraz M. T. Malinowskiego (2009, 2010, 2011, 2012) [A1, A2, B3, B18].

Wprowadzenie do wcześniejszych równań zaburzenia w postaci jednowartościowego szumu prowadzi do jednowartościowej części dyfuzyjnej w postaci klasycznej całki Itô. W ten sposób w pracy [B7] rozważane są rozmyte stochastyczne równania różniczkowe z rozwiązaniami ciągłymi w sensie średniokwadratowym i w

pracach [A3, A4, B8, B22] z rozwiązaniami o ciągłych trajektoriach. Odchodząc od ram, w których wymaga się aby całki używane w równaniu były zmiennymi losowymi, można zaproponować definiowanie tych całek w postaci zbiorów rozmytych w przestrzeni wektorów losowych całkownych z kwadratem. Takie podejście pozwala na to, aby współczynnik dyfuzji był rozmyty a nie jednowartościowy. Wówczas rozwiązaniami nie są procesy stochastyczne, ale deterministyczne odwzorowania o wartościach rozmytych. Takie badania prezentowane są w pracach [B4, B12] oraz [A5, A6].

Inny sposób podejścia do rozmytych stochastycznych równań różniczkowych zawarty jest w pracy M. Michty (2011) [127], gdzie takie równania rozumiane są jako rodziny stochastycznych inkluzji różniczkowych i rozwiązaniem jest zbiór rozmyty w przestrzeni miar probabilistycznych. Jeszcze inne podejście zaproponowali B. Sprungk i K. G. van den Boogaart (2013) [128], którzy rozważają zbiory rozmyte przestrzeni współczynników klasycznych stochastycznych równań różniczkowych z jednowartościowym dryfem i jednowartościową dyfuzją. Rozwiązaniem jest wtedy zbiór rozmyty przestrzeni jednowartościowych procesów stochastycznych.

Celem przedstawionej rozprawy jest zbadanie istnienia i własności rozwiązań rozmytych stochastycznych równań różniczkowych. Rozwiązaniami mają być odwzorowania o wartościach w zbiorach rozmytych. W szczególności, w pracach [A1] i [A2] rozważane są zagadnienia związane z problematyką rozmytych losowych równań różniczkowych. Rozwiązania takich równań są rozmytymi procesami stochastycznymi z trajektoriami, które są różniczkowalne w sensie rozmytej pochodnej używanej w sformułowaniu losowego równania różniczkowego. Stosując dwa różne rodzaje pochodnej otrzymuje się rozwiązania o innych własnościach geometrycznych.

W pracach [A3] i [A4] rozważane są rozmyte stochastyczne równania różniczkowe, gdzie współczynnik dryfu jest rozmyty, a współczynnik dyfuzji jest jednowartościowy i sterowany procesem Wienera. Tutaj rozwiązaniami są rozmyte procesy stochastyczne z ciągłymi, w sensie odpowiedniej metryki, ale nieróżniczkowalnymi trajektoriami.

W kolejnych pracach [A5] i [A6] przedstawione są zagadnienia rozmytych równań różniczkowych, rozumianych jako równania całkowe, z rozmytymi całkami z rozmytych procesów stochastycznych. Te całki, w odróżnieniu od całek z poprzednich prac, nie są rozmytymi zmiennymi losowymi, lecz tylko zbiorami rozmytymi w przestrzeni wektorów losowych całkownych z kwadratem. Takie podejście pozwala na rozważenie współczynnika dryfu i dyfuzji równania w postaci rozmytego procesu stochastycznego. Rozwiązaniami tych równań są deterministyczne odwzorowania o wartościach w zbiorach rozmytych przestrzeni wektorów losowych całkownych z kwadratem. W tym podejściu losowość jest przeniesiona do przestrzeni wartości rozwiązań.

Teraz zostaną podane wstępne oznaczenia, definicje i własności wprowadzanych pojęć. Niech $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ oznacza ośrodkową przestrzeń Banacha i niech $\mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych, domkniętych, ograniczonych i

wypukłych podzbiorów $\mathcal{X}$. W $\mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ rozważana jest metryka Hausdorffa $H_{\mathcal{X}}$. Wówczas $(\mathcal{K}_c^b(\mathcal{X}), H_{\mathcal{X}})$ jest polską przestrzenią metryczną. Niech $(S, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Multifunkcję $F: S \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ będziemy nazywali mierzalną (lub $\mathcal{S}$ -mierzalną), jeśli będzie spełniony warunek $\{s \in S : F(s) \cap O \neq \emptyset\} \in \mathcal{S}$ dla dowolnego zbioru otwartego $O \subset \mathcal{X}$.

Mierzalną multifunkcję $F: S \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ nazywamy $L_S^p(\mu)$ -całkowo ograniczoną ($p \geq 1$), jeśli istnieje $h \in L^p(S, \mathcal{S}, \mu; \mathbb{R})$ takie, że μ -p.w. zachodzi $|||F(s)|||_{\mathcal{X}} \leq h(s)$, gdzie $|||A|||_{\mathcal{X}} := H_{\mathcal{X}}(A, \{0\})$ dla $A \in \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$.

Oznaczmy $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Niech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ będzie zupełną przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ spełniającą następujące warunki: $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest niemalejącą i prawostronnie ciągłą rodziną pod- σ -algebry σ -algebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_0$ zawiera wszystkie zdarzenia, których miara P jest równa zero.

Multifunkcję $F: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ będziemy nazywali wielowartościowym procesem stochastycznym, jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ odwzorowanie $F(t, \cdot): \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ jest mierzalną multifunkcją. Podobnie jak dla jednowartościowych procesów stochastycznych można zdefiniować pojęcia wielowartościowych procesów mierzalnych, adaptowalnych, nieantycypujących, prognozowalnych.

Zbiorem rozmytym u w przestrzeni $\mathcal{X}$ będziemy nazywali funkcję $u: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$. Symbolem $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ będziemy oznaczali zbiór wszystkich zbiorów rozmytych w przestrzeni $\mathcal{X}$.

Dla zbioru rozmytego u i $\alpha \in (0, 1]$ definiuje się zbiory $[u]^\alpha := \{x \in \mathcal{X} : u(x) \geq \alpha\}$. Dodatkowo $[u]^0 := \text{cl}_{\mathcal{X}}\{x \in \mathcal{X} : u(x) > 0\}$, gdzie $\text{cl}_{\mathcal{X}}$ oznacza domknięcie w mocnej topologii przestrzeni $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$. Zbiory $[u]^\alpha$ będziemy nazywali α -cięciami u . W szczególności zbiór $[u]^1$ nazywa się rdzeniem u i $[u]^0$ nośnikiem u lub 0-cięciem u . Pojęcie α -cięcia zbioru rozmytego stanowi pewien pomost pomiędzy analizą wielowartościową i analizą zbiorów rozmytych. Jednak należy zachować ostrożność, ponieważ te przejścia bywają nienatychmiastowe, a czasami ich nie ma. Na przykład, wiadomo, że istnienie różnic Hukuhary (to pojęcie jest przypomniane poniżej) α -cięć (dla każdego $\alpha \in [0, 1]$) dwóch zbiorów rozmytych u i v nie implikuje istnienia różnicy Hukuhary tych zbiorów rozmytych.

Oznaczmy $\mathcal{F}_c^b(\mathcal{X}) := \{u \in \mathcal{F}(\mathcal{X}) : [u]^\alpha \in \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X}) \text{ dla } \alpha \in [0, 1]\}$. W tym zbiorze będziemy rozważali następujące metryki:

$$D_{\mathcal{X}}(u, v) := \sup_{\alpha \in [0, 1]} H_{\mathcal{X}}([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

$$D^{\mathcal{X}}(u, v) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0, 1]} H_{\mathcal{X}}([u]^{1-t}, [v]^{1-\lambda(t)}) \right\},$$

gdzie Λ oznacza zbiór ściśle rosnących funkcji ciągłych $\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o własnościach $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$. Przestrzeń metryczna $(\mathcal{F}_c^b(\mathcal{X}), D_{\mathcal{X}})$ jest zupełna, ale nie jest ośrodkowa. Natomiast $(\mathcal{F}_c^b(\mathcal{X}), D^{\mathcal{X}})$ jest polską przestrzenią metryczną. W zbiorze $\mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ definiuje się dodawanie $u+v$ i mnożenie przez skalar ru tak, że $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ (po prawej stronie występuje suma Minkowskiego zbiorów), $[ru]^\alpha = r[u]^\alpha$, dla $u, v \in \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$, $r \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in [0, 1]$. Jeśli dla $u, v \in \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ istnieje $w \in \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ o własności $u = v+w$, to będziemy mówili, że w jest różnicą Hukuhary

zbiorów rozmytych u i v oraz oznaczali ją $u \ominus v$. Oczywiście $u \ominus v \neq u + (-1)v$. Różnica $u \ominus v$ może nie istnieć, ale jeśli istnieje, to jest jedyna. W $\mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ nie można wprowadzić pełnej struktury liniowej, ponieważ w ogólności nie istnieje element przeciwny do $u \in \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$.

Odwzorowanie $u: S \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ nazywamy rozmytą zmienną losową, jeśli dla każdego $\alpha \in [0, 1]$ odwzorowanie $[u]^\alpha: S \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ jest mierzalną multifunkcją, gdzie $[u]^\alpha(s) := [u(s)]^\alpha$ dla $s \in S$. A. Colubi, J. S. Domínguez-Menchero, M. López-Díaz, D. A. Ralescu [129] pokazali, że $u: S \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ jest rozmytą zmienną losową wtedy i tylko wtedy, gdy u jest $\mathcal{A}|\mathcal{B}_{D^X}$ -mierzalne, gdzie $\mathcal{B}_{D^X}$ oznacza σ -algebrę generowaną przez topologię indukowaną przez metrykę D^X . W przypadku użycia metryki D_X prawdziwa jest tylko jedna implikacja. Mianowicie, jeśli u jest $\mathcal{A}|\mathcal{B}_{D_X}$ -mierzalne, to u jest rozmytą zmienną losową.

Rozmytą zmienną losową $u: S \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ nazywamy $L_S^p(\mu)$ -całkowo ograniczoną ($p \geq 1$), jeśli $s \mapsto ||| [u(s)]^0 |||_{\mathcal{X}}$ jest elementem z $L^p(S, \mathcal{S}, \mu; \mathbb{R})$.

Odwzorowanie $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ nazywamy rozmytym procesem stochastycznym, jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ odwzorowanie $f(t, \cdot): \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ jest rozmytą zmienną losową. Taki proces f nazywamy mierzalnym (względnie: adaptowalnym, nieantycypującym, prognozowalnym), jeśli dla każdego $\alpha \in [0, 1]$ wielowartościowy proces $[f]^\alpha: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathcal{X})$ jest mierzalny (względnie: adaptowalny, nieantycypujący, prognozowalny). Rozmyty proces stochastyczny $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathcal{X})$ nazywamy D_X -ciągłym, jeśli prawie każda względem miary P trajektoria $f(\cdot, \omega)$ jest odwzorowaniem ciągłym względem metryki D_X .

W kontekście rozmytych stochastycznych równań różniczkowych będziemy używali $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ i $\mathcal{X}$, która jest zbiorem wektorów losowych całkowalnych z kwadratem.

Dla wygody przyjmujemy następującą notację: fakt, że istnieje $\Omega_* \in \mathcal{A}$ takie, że $P(\Omega_*) = 1$ i dla każdego $\omega \in \Omega_*$ zachodzi $f(\omega) = g(\omega)$, gdzie f, g są rozmytymi zmiennymi losowymi, zapisywali będziemy jako $f(\omega) \stackrel{P.1}{=} g(\omega)$ lub $f \stackrel{P.1}{=} g$. Podobnie jeśli istnieje $\Omega^* \in \mathcal{A}$ takie, że $P(\Omega^*) = 1$ i dla każdego $\omega \in \Omega^*$ zachodzi $f(t, \omega) = g(t, \omega)$ dla dowolnego $t \in [a, b]$, gdzie f, g są rozmytymi procesami stochastycznymi, to będziemy pisali $f(t, \omega) \stackrel{[a,b]}{=}^{P.1} g(t, \omega)$ lub $f(t) \stackrel{[a,b]}{=}^{P.1} g(t)$. Dodatkowo będziemy używali symbolu $\langle \cdot \rangle$. Dla $x \in \mathcal{X}$ zapis $\langle x \rangle$ będzie oznaczał funkcję charakterystyczną zbioru jednoelementowego $\{x\}$.

4.2.1. Rozmyte losowe równania różniczkowe

W tej części zostanie przedstawione zagadnienie Cauchy'ego dla rozmytych losowych równań różniczkowych rozważane w pracach [A1, A2]. W sformułowaniu równania występuje rozmyta pochodna.

Definicja 1 ([130]). Powiemy, że $F: [0, T] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest $(L1)$ -różniczkowalna w $t_0 \in [0, T]$, jeśli istnieje zbiór rozmyty $F'(t_0) \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ taki, że dla dostatecznie

małego $h > 0$ istnieją różnice Hukuhary $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ oraz spełnione jest

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} D_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{h} (F(t_0 + h) \ominus F(t_0)), F'(t_0) \right) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} D_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{h} (F(t_0) \ominus F(t_0 - h)), F'(t_0) \right) = 0.$$

W punktach granicznych przedziału $[0, T]$ rozważa się, odpowiednio, jedną z powyższych granic. Ta definicja jest analogiczna z definicją pochodnej Hukuhary dla funkcji wielowartościowej.

Zagadnieniem Cauchy'ego, lub zagadnieniem początkowym, dla rozmytych losowych równań różniczkowych będziemy nazywali zagadnienie postaci:

$$x'(t, \omega) \stackrel{[0, T]}{=}^{P.1} f(t, \omega, x(t, \omega)), \quad x(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} x_0(\omega), \quad (1)$$

gdzie x_0 jest rozmytą zmienną losową, $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i symbol $'$ oznacza (L1)-pochodną funkcji rozmytej określonej powyżej.

Na zagadnienie (1) można spojrzeć jak na rodzinę deterministycznych rozmytych równań różniczkowych indeksowaną przez $\omega \in \Omega$. Stąd można myśleć o rozwiązaniu deterministycznym przy każdym ustalonym ω . Jednakże takie postępowanie w rozwiązywaniu równania losowego nie zawsze jest uprawnione, co zostało podkreślone w przykładach w pracy [A1]. Potrzeba bowiem, aby prawie wszystkie w sensie miary P rozwiązania deterministyczne były określone na wspólnym przedziale niezależnym od ω oraz aby rozwiązania deterministyczne pokrywały się z trajektoriami pewnego rozmytego procesu stochastycznego. Stąd badanie zagadnienia (1) jest zasadne i nie wynika łatwo z teorii deterministycznych, rozmytych równań różniczkowych.

Przez rozwiązanie równania (1) będziemy rozumieli rozmyty proces stochastyczny $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, którego trajektorie (prawie wszystkie) są różniczkowalne w sensie istnienia rozmytej pochodnej i który spełnia zagadnienie (1). Takie rozwiązanie jest jednoznaczne, jeśli $D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), y(t, \omega)) \stackrel{[0, T]}{=}^{P.1} 0$ dla dowolnego rozmytego procesu stochastycznego $y: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, który jest rozwiązaniem równania (1).

Poniższy wynik o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (1) otrzymuje się, gdy f jest globalnie lipschitzowska i spełnia pewien warunek ograniczości. Dokładniej, wymaga się, aby były spełnione warunki:

(a0) x_0 jest rozmytą zmienną losową,

- (a1) dla każdego $(t, u) \in [0, T] \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ odwzorowanie $f(t, \cdot, u): \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest rozmytą zmienną losową,
- (a2) z P.1 odwzorowanie $f(\cdot, \omega, \cdot): [0, T] \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest ciągle, w $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ rozważa się metrykę $D_{\mathbb{R}^d}$,
- (a3) istnieje ciągly proces stochastyczny $L: [0, T] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ taki, że z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ i dla dowolnych $u, v \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), f(t, \omega, v)) \leq L(t, \omega) D_{\mathbb{R}^d}(u, v).$$

- (a4) istnieje stała $M > 0$ taka, że $D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, x_0(\omega)), \langle 0 \rangle) \stackrel{[0, T] \text{ P.1}}{\leq} M$.

Twierdzenie 1 ([A1], Theorem 1). *Założmy, że $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełniają (a0)-(a4). Wówczas zagadnienie (1) ma jednoznaczne rozwiązanie.*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystano fakt ([A1], Lemma 1) o równoważności rozwiązania równania (1) i rozwiązania rozmytego losowego równania całkowego

$$x(t, \omega) \stackrel{[0, T] \text{ P.1}}{=} x_0(\omega) + \int_0^t f(s, \omega, x(s, \omega)) ds \quad (2)$$

z rozmytą stochastyczną całką Lebesgue'a. Istnienie tej całki dla mierzalnych i całkowo ograniczonych rozmytych procesów stochastycznych jest uzasadnione drobiazgowo w [B8]. Aby udowodnić istnienie rozwiązania równania całkowego (2), konstruuje się ciąg $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ciągłych rozmytych procesów stochastycznych. Pokazuje się, że dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ ciąg $\{x_n(\cdot, \omega)\}_{n=0}^\infty$ spełnia jednoznacznie warunek Cauchy'ego. Dzięki temu i faktowi, że $(\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d), D_{\mathbb{R}^d})$ jest zupełną przestrzenią metryczną uzyskuje się istnienie ciągłej granicy $\tilde{x}_\omega(\cdot)$ dla ciągu $\{x_n(\cdot, \omega)\}_{n=0}^\infty$. To pozwala na skonstruowanie ciągłego odwzorowania $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Dla prawie wszystkich ω i dla każdego $t \in [0, T]$ ciąg α -ciąg (dla dowolnego $\alpha \in [0, 1]$) $\{[x_n(t, \omega)]_\alpha\}$ jest zbieżny do $[x(t, \omega)]_\alpha$ w metryce Hausdorffa. Stąd można wnioskować o, kluczowej dla rozwiązań równań losowych, mierzalności odwzorowania wielowartościowego $[x(\cdot, \cdot)]_\alpha$. Zatem $x(\cdot, \cdot)$ jest rozmytym procesem stochastycznym. Zastosowanie twierdzenia Lebesgue'a o ograniczonej zbieżności pomaga w uzasadnieniu, że x jest rozwiązaniem równania (2). Jednoznaczność uzyskuje się po zastosowaniu stochastycznej wersji nierówności Gronwalla. Idea dowodu jest podobna do metody dowodzenia istnienia rozwiązania równania różniczkowego o wartościach w przestrzeni Banacha. Jednak rozmyte równania różniczkowe, podobnie jak wielowartościowe równania różniczkowe, muszą być traktowane jako równania o wartościach w przestrzeni metrycznej bez struktury liniowej, ponieważ dla ustalonego zbioru rozmytego nie istnieje element przeciwny

do niego. Dodatkowo dla równań losowych istotna jest odpowiednia mierzalność rozwiązania rozmytego.

Zagadnieniami podobnymi do (1) zajmował się Y. Feng [125]. Jego podejście można nazwać średniokwadratowym, gdyż używa średniokwadratowej pochodnej i średniokwadratowej całki z rozmytego procesu stochastycznego w sformułowaniu równania. Ponadto stosuje bardziej ograniczający niż nasz rodzaj mierzalności rozmytych zmiennych losowych. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania średniokwadratowego są uzyskane w [125] przy warunkach typu Lipschitza względem zmiennej przestrzennej i ciągłości względem zmiennej czasowej. Przy nielipschitzowskim warunku, w [126] W. Fei dowodzi jednoznaczności rozwiązania, bez dowodu istnienia rozwiązania, dla autonomicznej wersji (1) z wartościami w zbiorach rozmytych refleksywnej i ośrodkowej przestrzeni Banacha $\mathcal{X}$. Jednak istnieją wątpliwości czy w środowisku pracy [126] odwzorowanie $\omega \mapsto D_{\mathcal{X}}(u(\omega), v(\omega))$ jest zmienną losową dla rozmytych zmiennych losowych u, v . Ta własność jest niezbędna w [126], ale została pominięta. W przypadku $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ wspomnianą własność można udowodnić. Rozmyte losowe równania różniczkowe są uogólnieniem deterministycznych równań rozmytych i wielowartościowych losowych równań różniczkowych. Te ostatnie były badane przez M. Michtę w [131]. Prawe strony równań w [125, 126, 131] nie są losowe. W równaniu (1) dziedziną f jest $[0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$.

Przy założeniach Tw. 1 pokazuje się, że rozwiązanie x równania (1) spełnia pewien warunek ograniczoności ([A1], Theorem 2)

$$\sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), \langle 0 \rangle) \stackrel{P.1}{\leq} (D_{\mathbb{R}^d}(x_0(\omega), \langle 0 \rangle) + \gamma_1(\omega)) \gamma_2(\omega),$$

gdzie $\gamma_1(\omega) = T \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, \langle 0 \rangle), \langle 0 \rangle)$, $\gamma_2(\omega) = \exp\{T \sup_{t \in [0, T]} L(t, \omega)\}$.

Jeśli zagadnienie (1) zostanie nieco zaburzone, tzn. do prawej strony równania f zostanie dodane zakłócenie h i x_0 zostanie zastąpione jego zaburzeniem w postaci z_0 , to otrzymuje się zagadnienie

$$z'(t, \omega) \stackrel{[0, T]}{=}^{P.1} f(t, \omega, z(t, \omega)) + h(t, \omega, z(t, \omega)), \quad z(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} z_0(\omega) \quad (3)$$

i można zapytać jak bardzo odległe od siebie są rozwiązania równań (1) i (3). Niech x oznacza rozwiązanie równania (1) i z rozwiązanie równania (3).

Twierdzenie 2 ([A1], Theorem 3). *Niech $f, h: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $y_0, z_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełniają założenia Tw. 1. Załóżmy, że istnieje zmienna losowa $K: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ taka, że z P.1 dla dowolnych $(t, u) \in [0, T] \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ zachodzi*

$D_{\mathbb{R}^d}(h(t, \omega, u), \langle 0 \rangle) \leq K(\omega)$. Wówczas

$$\sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), z(t, \omega)) \stackrel{P.1}{\leq} \gamma_2(\omega) (D_{\mathbb{R}^d}(x_0(\omega), z_0(\omega)) + TK(\omega)).$$

To twierdzenie rozszerza wynik deterministyczny w [44] o ciągłej zależności rozwiązania od wartości początkowej x_0 .

Celem pracy [A2] jest zbadanie zagadnienia (1) przy założeniu ogólniejszym niż globalny warunek Lipschitza. Aby móc je zastosować, trzeba ograniczyć się do sytuacji kiedy wartość początkowa x_0 jest zbiorem rozmytym, a nie jak poprzednio rozmytą zmienną losową. Zatem rozważane jest zagadnienie

$$x'(t, \omega) \stackrel{[0, T] P.1}{=} f(t, \omega, x(t, \omega)), \quad x(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} x_0, \quad (4)$$

gdzie $x_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$.

Dla $\rho > 0$ oznaczmy $B_\rho(x_0) := \{u \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) : D_{\mathbb{R}^d}(u, x_0) \leq \rho\}$. Rozważmy odwzorowanie $f: [0, T] \times \Omega \times B_\rho(x_0) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, które spełnia:

- (f1) dla każdego $(t, u) \in [0, T] \times B_\rho(x_0)$ odwzorowanie $f(t, \cdot, u): \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest rozmytą zmienną losową;
- (f2) z P.1 odwzorowanie $f(\cdot, \omega, \cdot): [0, T] \times B_\rho(x_0) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest ciągle;
- (f3) istnieje stała $M > 0$ taka, że $D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), \langle 0 \rangle) \stackrel{[0, T] \times B_\rho(x_0) P.1}{\leq} M$.

Ponadto rozważmy odwzorowanie $g: [0, T] \times \Omega \times [0, 2\rho] \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniające:

- (g1) dla każdego $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, 2\rho]$ odwzorowanie $g(t, \cdot, \tau): \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest zmienną losową;
- (g2) z P.1 odwzorowanie $g(\cdot, \omega, \cdot): [0, T] \times [0, 2\rho] \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest ciągle;
- (g3) $g(t, \omega, 0) \stackrel{[0, T] P.1}{=} 0$;
- (g4) istnieje stała $\tilde{M} > 0$ taka, że $g(t, \omega, \tau) \stackrel{[0, T] \times [0, 2\rho] P.1}{\leq} \tilde{M}$;
- (g5) $\tau(t, \omega) \equiv 0$ jest jednoznacznym rozwiązaniem (na przedziale $[0, T]$) losowego zagadnienia początkowego $\tau'(t, \omega) \stackrel{[0, T] P.1}{=} g(t, \omega, \tau(t, \omega))$, $\tau(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} 0$;
- (g6) z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ odwzorowanie $g(t, \omega, \cdot): [0, 2\rho] \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest niemalejące.

Twierdzenie 3 ([A2], Theorem 3.3). Niech $x_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Niech $f: [0, T] \times \Omega \times B_\rho(x_0) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i $g: [0, T] \times \Omega \times [0, 2\rho] \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniając (f1)-(f3) i (g1)-(g6), odpowiednio. Załóżmy, że z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ i dla dowolnych $u, v \in B_\rho(x_0)$ zachodzi

$$D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), f(t, \omega, v)) \leq g(t, \omega, D_{\mathbb{R}^d}(u, v)).$$

Wówczas istnieje jednoznaczne, być może tylko lokalne, rozwiązanie równania (4) określone na przedziale $[0, r]$, $r \leq T$. Ponadto $x(t, \omega) \stackrel{[0, r]}{P.1} \in B_\rho(x_0)$.

Oczywiście warunek Lipschitza jest szczególnym przypadkiem warunku sformułowanego w tym twierdzeniu. Istotne w dowodzeniu tego twierdzenia są zastosowania nierówności różniczkowych z pochodnymi Diniego i nierówności całkowych badanych przez G. S. Ladde'a i V. Lakshmikanthama [132] oraz V. Lakshmikanthama i S. Leelę [133]. Dowód tego twierdzenia polega na wykorzystaniu ciągu $\{x_n\}$ przybliżonych rozwiązań dla (4) i ciągu przybliżonych rozwiązań $\{\tau_n\}$ dla równania z warunku (g5), określonych jako $\tau_0(t, \omega) \stackrel{[0, r]}{P.1} := \max\{M, \tilde{M}\}t$ i $\tau_{n+1}(t, \omega) \stackrel{[0, r]}{P.1} := \int_0^t g(s, \omega, \tau_n(s, \omega))ds$ dla $n = 0, 1, \dots$, gdzie $r = \min\{T, \rho/M, \rho/\tilde{M}\}$. Pokazuje się, że $\sup_{t \in [0, r]} \tau_n(t, \omega) \xrightarrow{P.1} 0$ oraz szacuje się dystans pomiędzy rozmytymi pochodnymi $x'_n(t, \omega)$ i $x'_m(t, \omega)$. To pomaga w uzyskaniu, kluczowej w dowodzie, losowej nierówności różniczkowej z pochodną Diniego $\mathcal{D}^+$ funkcji $D_{\mathbb{R}^d}(x_n(\cdot, \omega), x_m(\cdot, \omega))$. Mianowicie

$$\mathcal{D}^+ D_{\mathbb{R}^d}(x_n(t, \omega), x_m(t, \omega)) \stackrel{[0, r]}{P.1} \leq g(t, \omega, D_{\mathbb{R}^d}(x_n(t, \omega), x_m(t, \omega))) + \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon > 0$. Dzięki Twierdzeniu 2.5.1 w [132] uzyskuje się, że

$$D_{\mathbb{R}^d}(x_n(t, \omega), x_m(t, \omega)) \stackrel{[0, r]}{P.1} \leq \tau_\varepsilon(t, \omega),$$

gdzie τ_ε jest rozwiązaniem maksymalnym losowego zagadnienia $\tau'_\varepsilon(t, \omega) \stackrel{[0, r]}{P.1} = g(t, \omega, \tau_\varepsilon(t, \omega)) + \varepsilon$. Ponieważ $\{\tau_\varepsilon(\cdot, \omega)\}$ zbiega jednostajnie (gdy $\varepsilon \rightarrow 0$) do rozwiązania maksymalnego równania w (g5), to $\sup_{t \in [0, r]} D_{\mathbb{R}^d}(x_n(t, \omega), x_m(t, \omega)) \xrightarrow{P.1} 0$, gdy $n, m \rightarrow \infty$. Teraz podobnie jak w dowodzie Tw. 1 można konstruować rozwiązanie x równania (4). Aby pokazać jednoznaczność x korzysta się ponownie z odpowiedniej, losowej nierówności różniczkowej z pochodną $\mathcal{D}^+$.

W pracy [A2] podane są warunki zapewniające stabilność rozwiązania równania (4) względem warunków początkowych i prawej strony równania. Rozważa się zagadnienie (4) i zagadnienie z inną wartością początkową $y_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$

$$x'(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} f(t, \omega, x(t, \omega)), \quad x(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} y_0 \quad (5)$$

oraz zagadnienie z inną prawą stroną

$$x'_\varepsilon(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} f^\varepsilon(t, \omega, x_\varepsilon(t, \omega)), \quad x_\varepsilon(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} x_0. \quad (6)$$

Zakłada się, że odwzorowania $g: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ i $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będą spełniać:

- (h1) z $P.1$ odwzorowanie $g(\cdot, \omega, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest ciągle;
- (h2) dla każdego $(t, \tau) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ odwzorowanie $g(t, \cdot, \tau): \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest zmienną losową;
- (h3) istnieje rozwiązanie maksymalne τ na $[0, T]$ losowego zagadnienia początkowego
$$\tau'(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} g(t, \omega, \tau(t, \omega)), \quad \tau(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} \tau_0 \geq 0;$$
- (h4) z $P.1$ dla każdego $t \in [0, T]$ odwzorowanie $g(t, \omega, \cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest niemalejące;
- (h5) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje rozwiązanie maksymalne τ_ε na $[0, T]$ losowego zagadnienia początkowego
$$\tau'_\varepsilon(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} g(t, \omega, \tau_\varepsilon(t, \omega)) + \varepsilon, \quad \tau_\varepsilon(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} \varepsilon;$$
- (h6) z $P.1$ odwzorowanie $f(\cdot, \omega, \cdot): [0, T] \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest ciągle;
- (h7) dla każdego $(t, u) \in [0, T] \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ odwzorowanie $f(t, \cdot, u): \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest rozmytą zmienną losową;
- (h8) z $P.1$ dla każdego $t \in [0, T]$ i dowolnych $u, v \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), f(t, \omega, v)) \leq g(t, \omega, D_{\mathbb{R}^d}(u, v)).$$

Twierdzenie 4 ([A2], Theorem 3.5). *Niech $g: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełnia (h1), (h2) i (h3). Załóżmy, że $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełnia (h6), (h7), (h8). Niech $x_0, y_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i $\tau_0 \geq D_{\mathbb{R}^d}(x_0, y_0)$. Przypuśćmy, że istnieją jednoznaczne rozwiązania $x, y: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ zagadnień (4) i (5), odpowiednio. Wówczas*

$$D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), y(t, \omega)) \stackrel{[0,T]}{\leq}^{P.1} \tau(t, \omega).$$

Twierdzenie 5 ([A2], Theorem 3.6). *Niech $g: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełnia (h1), (h2), (h4), (h5). Załóżmy, że $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełnia (h6), (h7),*

(h8). Załóżmy, że dla $\varepsilon > 0$ odwzorowanie $f^\varepsilon: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełnia warunki (h6), (h7). Załóżmy również, że z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ i każdego $u \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), f^\varepsilon(t, \omega, u)) \leq \varepsilon.$$

Niech $x_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i przypuśćmy, że istnieją jednoznaczne rozwiązania $x, x_\varepsilon: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ równań (4) i (6), odpowiednio. Wówczas

$$D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), x_\varepsilon(t, \omega)) \stackrel{[0, T] \text{ P.1}}{\leq} \tau_\varepsilon(t, \omega).$$

Ponadto, jeśli $\tau(t, \omega) \equiv 0$ jest jedynym rozwiązaniem na $[0, T]$ losowego zagadnienia początkowego $\tau'(t, \omega) \stackrel{[0, T] \text{ P.1}}{=} g(t, \omega, \tau(t, \omega))$, $\tau(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} 0$, to

$$\sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), x_\varepsilon(t, \omega)) \xrightarrow{P.1} 0, \quad \text{gdy } \varepsilon \rightarrow 0.$$

W dowodach tych twierdzeń uzyskuje się również pewną nierówność różniczkową z pochodną Diniego $\mathcal{D}^+$ (dowód Tw. 4) i całkową (dowód Tw. 5), które razem z twierdzeniami porównawczymi z [132, 133] pozwalają na uzyskanie też powyższych twierdzeń.

W dalszym ciągu, w pracy [A2], rozważane jest losowe rozmyte zagadnienie początkowe (4), ale z inną pochodną odwzorowań rozmytych. Potrzeba nowej koncepcji pochodnej pojawiła się już w badaniach deterministycznych, rozmytych równań różniczkowych. Wynikała ona z obserwacji, że użycie rozmytej (L1)-pochodnej z Definicji 1 w formułowaniu rozmytego równania różniczkowego powoduje pewne, nie zawsze pożądane, konsekwencje we własnościach geometrycznych rozwiązań takich równań. Mianowicie, średnice α -cięć wartości rozwiązania nie maleją ze wzrostem zmiennej czasowej. To z kolei wprowadza wiele trudności w rozważaniu, na przykład, rozwiązań okresowych. W 2005 roku B. Bede i S. G. Gal [55] zaproponowali nieco inną pochodną o takiej własności, że odwzorowania rozmyte różniczkowalne względem tej nowej pochodnej mają wartości, których średnica α -cięć nie jest rosnąca. Zmiana rodzaju pochodnej może pomagać w uzyskiwaniu rozwiązań okresowych. Definicja jest następująca.

Definicja 2. Odwzorowanie $F: [0, T] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ nazywamy (L2)-różniczkowalnym w $t_0 \in [0, T]$, jeśli istnieje zbiór rozmyty $F'(t_0) \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ taki, że dla dostatecznie małego $h > 0$ istnieją różnice Hukuhary $F(t_0 - h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 + h)$ oraz

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} D_{\mathbb{R}^d} \left(\left(-\frac{1}{h} \right) (F(t_0 - h) \ominus F(t_0)), F'(t_0) \right) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} D_{\mathbb{R}^d} \left(\left(-\frac{1}{h} \right) \left(F(t_0) \ominus F(t_0 + h) \right), F'(t_0) \right) = 0.$$

Wiadomo, że jeśli istnieje (L2)-pochodna $F'(t_0)$ i $F'(t_0) \neq \langle x \rangle$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, to nie istnieje (L1)-pochodna odwzorowania F w punkcie t_0 . Podobnie, jeśli istnieje (L1)-pochodna $F'(t_0)$ i $F'(t_0) \neq \langle x \rangle$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, to nie istnieje (L2)-pochodna odwzorowania F w punkcie t_0 .

Zastosowanie (L2)-pochodnej w losowym rozmytym zagadnieniu Cauchy'ego (4) powoduje, że nie ma już równoważności rozwiązań równania (4) z rozwiązaniami losowego całkowego równania rozmytego $x(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} x_0 + \int_0^t f(s, \omega, x(s, \omega)) ds$. Zamiast tego inna równoważność ma miejsce ([A2], Lemma 4.2). Mianowicie, rozwiązania zagadnienia (4) z (L2)-pochodną pokrywają się z rozwiązaniami rozmytego losowego równania całkowego

$$x(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} x_0 \ominus (-1) \int_0^t f(s, \omega, x(s, \omega)) ds. \quad (7)$$

Teraz zostaną przedstawione odpowiedniki Twierdzeń 3, 4 i 5 dotyczące rozwiązań zagadnienia (4) z (L2)-pochodną. Dowodzenie tych wyników jest podobne do dowodów Twierdzeń 3, 4, 5, ale trzeba zachować dużą ostrożność, ponieważ teraz istotne jest istnienie wielu różnic Hukuhary. Spełnienie takiego warunku nie jest natychmiastowe. Nie jest ono potrzebne w przypadku równania (4) z (L1)-pochodną. Najpierw zostanie przedstawiony wynik o istnieniu i jednoznaczności (L2)-różniczkowalnego rozwiązania zagadnienia (4).

Twierdzenie 6 ([A2], Theorem 4.5). *Niech będą spełnione założenia Twierdzenia 3. Załóżmy, że istnieje stała $\gamma > 0$ taka, że ciąg $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ skonstruowany następująco*

$$\begin{aligned} y_0(t, \omega) &\stackrel{[0,\gamma]}{=}^{P.1} x_0, \\ y_{n+1}(t, \omega) &\stackrel{[0,\gamma]}{=}^{P.1} x_0 \ominus (-1) \int_0^t f(s, \omega, y_n(s, \omega)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

jest dobrze określony, tzn. istnieją powyższe różnice Hukuhary. Wówczas istnieje jednoznaczne, być może lokalne na przedziale $[0, r]$, $r \leq \min\{T, \gamma\}$, rozwiązanie x równania (4) z (L2)-pochodną i $x(t, \omega) \stackrel{[0,r]}{\in}^{P.1} B_\rho(x_0)$.

Założenie o istnieniu ciągu $\{y_n\}$ w Twierdzeniu 6 jest niewygodne i może budzić wątpliwości o spełnialności takiego warunku. Jednak, ze względu na postać równania (7), to założenie wydaje się być naturalnym i niezbędnym. Poniższe stwierdzenie wskazuje na spełnialność takiego założenia, gdy rozważa się szczególne zbiory rozmyte, a mianowicie rozmyte liczby trójkątne prostej rzeczywistej. Rozmyta liczba trójkątna to zbiór rozmyty $u \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$ taki, że

$[u]^\alpha = [a + (b - a)\alpha, c - (c - b)\alpha]$ dla $\alpha \in [0, 1]$. Zbiór wszystkich takich liczb oznaczmy przez $\mathcal{T}$.

Stwierdzenie 1 ([A2], Proposition 4.8). *Niech $x_0 \in \mathcal{T}$. Załóżmy, że $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{T}B_\rho(x_0) \rightarrow \mathcal{T}$, gdzie $\mathcal{T}B_\rho(x_0) = \{u \in \mathcal{T} \mid D_{\mathbb{R}}(u, x_0) \leq \rho\}$, spełnia warunki typu (f1), (f2) i (f3). Wówczas ciąg $\{y_n\}$ z Twierdzenia 6 jest dobrze określony.*

Ten wynik uzyskuje się poprzez dobrze znane i wykonalne w sprawdzaniu kryterium istnienia różnicy Hukuhary dla dwóch rozmytych liczb trójkątnych. W ogólnym przypadku nie jest znane żadne kryterium zapewniające istnienie różnic Hukuhary zbiorów rozmytych.

W [A2] sformułowane zostały odpowiedniki Twierdzeń 4 i 5, które są właściwe dla (L2)-różniczkowalnych rozwiązań zagadnienia (4), dlatego zostały rozważone zagadnienia (5) i (6) z (L2)-pochodną.

Twierdzenie 7 ([A2], Theorem 4.9). *Niech $g: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $x_0, y_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i $\tau_0 \geq 0$ spełniają założenia z Twierdzenia 4. Załóżmy dodatkowo, że g spełnia (h4) oraz że istnieją rozwiązania $x, y: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ równań (4) i (5) z (L2)-pochodną. Wówczas*

$$D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), y(t, \omega)) \stackrel{[0, T] \text{ P.1}}{\leq} \tau(t, \omega).$$

Grupa założeń w tym twierdzeniu została poszerzona o warunek (h4), którego spełnialności nie wymaga się w Tw. 4. Dodanie tego warunku pozwala na ominięcie przeszkody w dowodzie Tw. 7 związanej z dużymi trudnościami w zapewnieniu istnienia różnic Hukuhary tak, aby można było otrzymać losową nierówność różniczkową podobną do tej z dowodu Tw. 4. Jednakże w pewnym przypadku można pominąć to założenie (h4) o monotoniczności odwzorowania $g(t, \omega, \cdot)$ z Tw. 7. Tym samym uzyskuje się odpowiednik Tw. 4 dla (L2)-różniczkowalnych rozwiązań. Aby zapewnić istnienie odpowiednich różnic Hukuhary w dowodzie tego twierdzenia, trzeba ograniczyć się ponownie do zbioru rozmytych liczb trójkątnych $\mathcal{T}$ zamiast $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Z technicznych powodów, wynikających z użycia (L2)-pochodnej, otrzymuje się wówczas w dowodzie Tw. 8 losową nierówność różniczkową z pochodną Diniego $\mathcal{D}^-$.

Twierdzenie 8 ([A2], Theorem 4.10). *Niech $g: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, $x_0, y_0 \in \mathcal{T}$ i $\tau_0 \geq 0$ spełniają założenia z Twierdzenia 4. Załóżmy, że istnieją rozwiązania $x, y: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{T}$ równań (4) i (5) z (L2)-pochodną. Wówczas*

$$D_{\mathbb{R}}(x(t, \omega), y(t, \omega)) \stackrel{[0, T] \text{ P.1}}{\leq} \tau(t, \omega).$$

Następujące twierdzenie jest odpowiednikiem Twierdzenia 5.

Twierdzenie 9 ([A2], Theorem 4.11). Niech $g: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $f^\varepsilon: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i $x_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełniają założenia Twierdzenia 5. Załóżmy, że istnieją $(L2)$ -różniczkowalne rozwiązania $x, x_\varepsilon: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ równań (4) i (6) z $(L2)$ -pochodną. Wówczas

$$D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), x_\varepsilon(t, \omega)) \stackrel{[0, T]}{\stackrel{P.1}{\leq}} \tau_\varepsilon(t, \omega).$$

Ponadto, jeśli $\tau(t, \omega) \equiv 0$ jest jedynym na $[0, T]$ rozwiązaniem losowego zagadnienia początkowego $\tau'(t, \omega) \stackrel{[0, T]}{\stackrel{P.1}{=}} g(t, \omega, \tau(t, \omega))$, $\tau(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} 0$, to

$$\sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}(x(t, \omega), x_\varepsilon(t, \omega)) \xrightarrow{P.1} 0, \quad \text{gdy } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wyniki przedstawione powyżej, uzyskane w pracach [A1, A2], stały się motywacjami do podjęcia badań w zakresie rozmytych losowych równań różniczkowych przez J. Y. Parka i J. U. Jeonga [134], H. Vu i L. S. Donga [135], H. Vu, L. S. Donga i N. V. Hoa [136], H. Vu, N. V. Hoa i N. D. Phu [137].

W celu zilustrowania teorii zastosowano w pracy [A2] pewne rozmyte losowe równania różniczkowe do modelowania zagadnień populacyjnych. Rozważa się $\Omega = [0, 1]$ z σ -algebrą $\mathcal{A}$ zbiorów borelowskich w Ω , P jest miarą Lebesgue'a na $(\Omega, \mathcal{A})$. Rozmyte losowe zagadnienie Cauchy'ego

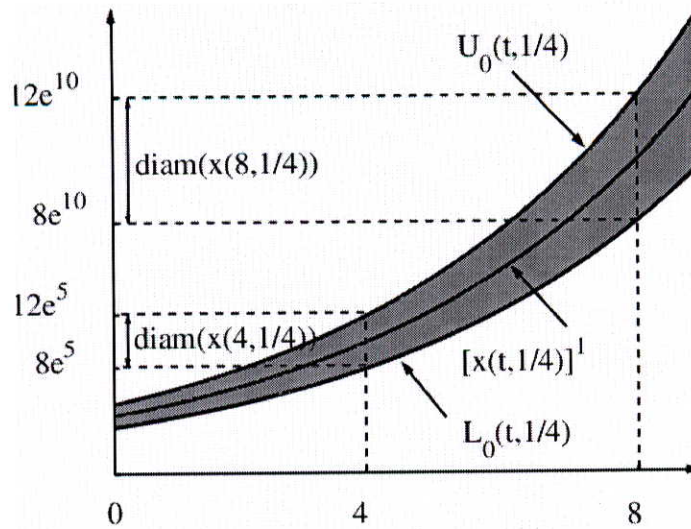
$$x'(t, \omega) \stackrel{[0, T]}{\stackrel{P.1}{=}} (\omega + 1) \cdot x(t, \omega), \quad x(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} x_0, \quad (8)$$

gdzie symbol $'$ oznacza $(L1)$ -pochodną, x_0 jest zbiorem rozmytym z $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$, jest rozszerzeniem dobrze znanego w modelowaniu biologicznym równania Malthusa.

Ponieważ $\omega + 1$ jest dodatnie, to ten model odpowiada populacji, w której rozrodczość przewyższa śmiertelność. Takie równanie ma jednoznaczne rozwiązanie x , które jest rozmytym procesem stochastycznym z $(L1)$ -różniczkowalnymi trajektoriami. Stosując metodę wyznaczania brzegów α -ciąg rozwiązania x , tzn. wyznaczania procesów $(t, \omega) \mapsto L_\alpha(t, \omega)$ i $(t, \omega) \mapsto U_\alpha(t, \omega)$ takich, że $[x(t, \omega)]^\alpha = [L_\alpha(t, \omega), U_\alpha(t, \omega)]$, wyznaczono jawną postać rozwiązania $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$ zagadnienia (8). Jest ono następujące

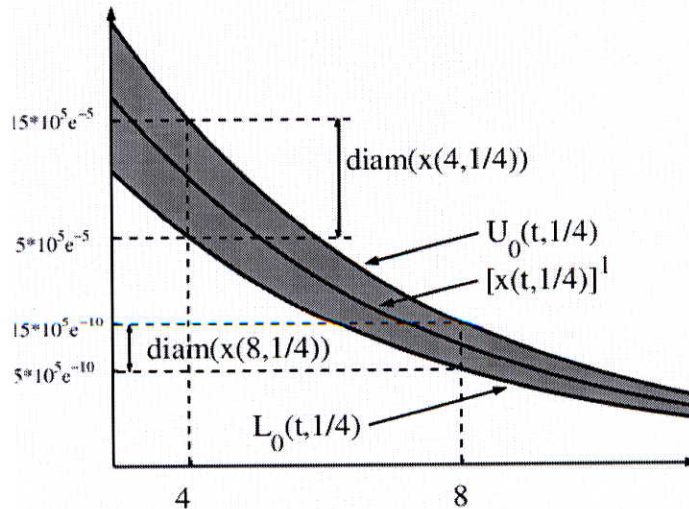
$$x(t, \omega) \stackrel{[0, T]}{\stackrel{P.1}{=}} e^{(\omega+1)t} \cdot x_0.$$

Przyjmując definicję średnicy zbioru rozmytego $u \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jako $\text{diam}(u) := \text{diam}([u]^0)$, uzyskuje się $\text{diam}(x(t, \omega)) \stackrel{[0, T]}{\stackrel{P.1}{=}} e^{(\omega+1)t} \text{diam}(x_0)$. Zatem z $P.1$ funkcja $t \mapsto \text{diam}(x(t, \omega))$ jest rosnąca. Aby zilustrować graficznie zachowanie rozwiązania przyjęto, że wartość początkowa x_0 określona jest lingwistycznie jako "mała" i subiektywnym modelem tego wyrażenia jest zbiór rozmyty $x_0(y) = (1 - \frac{1}{4}(y - 10)^2) \mathbf{1}_{[8, 12]}(y)$. Wtedy dla rozwiązania x otrzymuje się $x(t, \omega)(y) = (1 - (5 - \frac{1}{2}e^{-(\omega+1)t}y)^2) \mathbf{1}_{[8e^{(\omega+1)t}, 12e^{(\omega+1)t}]}(y)$. Dla trajektorii



Rys. 1. (L1)-różniczkowalne rozwiązanie zagadnienia (8).

rozwiązania odpowiadającej $\omega = 1/4$, na Rys. 1 zilustrowane jest zachowanie rdzenia i nośnika rozwiązania x , t.j. zilustrowane są odwzorowania $t \mapsto [x(t, 1/4)]^1$ oraz $t \mapsto [x(t, 1/4)]^0$.



Rys. 2. (L2)-różniczkowalne rozwiązanie zagadnienia (9).

Model populacyjny uwzględniający rozmytość i w którym śmiertelność przewyższa rozrodczość może być zadany przez losowe rozmyte zagadnienie początkowe

$$x'(t, \omega) \stackrel{[0, T]}{=}^{P.1} -(\omega + 1) \cdot x(t, \omega), \quad x(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} x_0, \quad (9)$$

gdzie symbol $'$ oznacza (L2)-pochodną, $x_0 \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Uwzględniając fakt, że dla (L2)-pochodnej zachodzi $[x'(t, \omega)]^\alpha = [U'_\alpha(t, \omega), L'_\alpha(t, \omega)]$ uzyskuje się, że rozwiązaniem zagadnienia (9) jest rozmyty proces stochastyczny $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow$

$\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$ spełniający

$$x(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} e^{-(\omega+1)t} \cdot x_0.$$

Wówczas $\text{diam}(x(t, \omega)) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} e^{-(\omega+1)t} \text{diam}(x_0)$ i z P.1 funkcja $t \mapsto \text{diam}(x(t, \omega))$ jest malejąca. Dla ilustracji graficznej przyjmiemy, że wartość początkowa x_0 jest określona przez wyrażenie lingwistyczne “ogromna” i subiektywnym modelem tego wyrażenia jest zbiór rozmyty $x_0(y) = (1 - 4 \cdot 10^{-12}(y - 10^6)^2) \mathbf{1}_{[5 \cdot 10^5, 15 \cdot 10^5]}(y)$. Wówczas $x(t, \omega)(y) = (1 - (2 - 2 \cdot 10^{-6}e^{(\omega+1)t}y)^2) \mathbf{1}_{[5 \cdot 10^5 e^{-(\omega+1)t}, 15 \cdot 10^5 e^{-(\omega+1)t}]}(y)$. Na Rys. 2 zamieszczona jest ilustracja właściwa dla trajektorii rozwiązania odpowiadającej $\omega = 1/4$. Przedstawione są wykresy $t \mapsto [x(t, 1/4)]^1$ oraz $t \mapsto [x(t, 1/4)]^0$.

Zagadnienie (8) z (L1)-pochodną może służyć jako model populacji rosnącej liczebnie, której stany są opisane przez zbiory rozmyte i na rozwój której mają wpływ czynniki losowe. Rosnąca funkcja $t \mapsto \text{diam}(x(t, \omega))$ może być interpretowana jako rosnąca rozmytość w opisie stanów liczebności populacji o dodatnim przyroście naturalnym. Im większa liczba osobników, tym trudniej o precyzję w percepcji ilości. Jednakże, równanie (9) z (L2)-pochodną może być odpowiedniejsze dla modelowania populacji, która wymiera. Malejąca funkcja $t \mapsto \text{diam}(x(t, \omega))$ może odzwierciedlać malejącą niepewność, t.j. rozmytość, w opisie stanów liczebności coraz mniejszej liczebnie populacji. Im mniejsza liczba osobników, tym mniejsza nieprecyzyjność w percepcji ilości osobników.

4.2.2. Rozmyte stochastyczne równania różniczkowe typu Itô z rozmytym dryfem i jednowartościową dyfuzją

W tej części autoreferatu zostaną przedstawione wyniki uzyskane w pracach [A3, A4], dotyczące rozmytych stochastycznych równań różniczkowych typu Itô z rozmytym dryfem i jednowartościową dyfuzją. Takie równania stanowią nowy kierunek badań w modelowaniu stochastycznych układów dynamicznych z rozmytością. Zatem najpierw zachodzi potrzeba określenia prawidłowych ram, w których te równania mogą być rozważane. Pierwsze badania są prowadzone z zastosowaniem zbiorów rozmytych skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$. Rozmyte równania typu Itô mogą być traktowane jak równania stochastyczne o wartościach w abstrakcyjnej przestrzeni funkcyjnej, ponieważ zbiory rozmyte u są identyfikowane z funkcjami $u: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$. Istnieją racje, które nie pozwalają myśleć o nich jak o równaniach stochastycznych w przestrzeniach Hilberta, czy Banacha. Przeszkodę stanowi fakt, że zbiór zbiorów rozmytych $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ wyposażony w operację dodawania $+$ nie jest grupą. W ogólności, nie istnieje element przeciwny do $u \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Z uwagi na ten fakt rozmyte stochastyczne równania różniczkowe typu Itô muszą być traktowane raczej jako równania stochastyczne w przestrzeniach metrycznych. W tym przypadku w przestrzeni metrycznej $(\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d), D_{\mathbb{R}^d})$. Pewna niekompatybilność wspomnianej struktury metrycznej pojawia się w powiązaniu z mierzalnością odwzorowań

losowych $u: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d), D_{\mathbb{R}^d})$ i pojęciem rozmytej zmiennej losowej. Jak zostało wspomniane wcześniej w części 4.2 autoreferatu, $\mathcal{A}|\mathcal{B}_{D_{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalność u nie jest równoważna z tym, że u jest rozmytą zmienną losową. Równoważność uzyskuje się dla $\mathcal{A}|\mathcal{B}_{D_{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalnych u . Metryka $D_{\mathbb{R}^d}$ jest mocniejsza niż metryka $D^{\mathbb{R}^d}$. Z drugiej strony w terminach metryki $D^{\mathbb{R}^d}$ nie udało się uzyskać pożądaných w równaniach stochastycznych własności rozmytych całek stochastycznych. Za to te własności dość elegancko udowadnia się używając metryki $D_{\mathbb{R}^d}$.

W tej części autoreferatu wymaga się, aby rozwiązaniami rozmytych równań stochastycznych były adaptowalne, rozmyte procesy stochastyczne o wartościach w $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Takie równania, rozumiane zawsze jako równania całkowe, mogą być pomocne w matematycznym opisie układów dynamicznych ewoluujących w rozmytej i losowej strukturze oraz poddawanych działaniu tzw. “białego szumu”. Z powodów wymienionych w części 4.2 autoreferatu istnieją duże przeszkody w formułowaniu tych równań z rozmytą częścią dyfuzyjną. Przyczyną są, niepokonane dotychczas, problemy w poprawnym zdefiniowaniu pojęcia rozmytej stochastycznej całki Itô jako rozmytej zmiennej losowej.

Wydaje się, że na obecnym etapie można jednakże przełamać impas i rozważać rozmyte stochastyczne równania typu Itô z dryfem w postaci rozmytej stochastycznej całki Lebesgue’a oraz z częścią dyfuzyjną w postaci jednowartościowej stochastycznej całki Itô zanurzonej w zbiór zbiorów rozmytych. Takie podejście do rozmytych stochastycznych równań różniczkowych zostało zaproponowane przez autora autoreferatu i po raz pierwszy zastosowane w pracy [B7], gdzie rozważane były rozwiązania takich równań w postaci rozmytych procesów stochastycznych ciągłych w sensie średniokwadratowym i rozróżnianych z dokładnością do modyfikacji. W pracach [A3, A4, B8] rozwiązaniami są rozmyte procesy stochastyczne o ciągłych trajektoriach. Dla jednoznaczności rozwiązania wymaga się więcej. Rozwiązania x, y pokrywają się, jeśli prawie wszystkie trajektorie procesu x pokrywają się z trajektoriami procesu y . Jest to “path-wise uniqueness”.

Przez $\mathcal{N}$ oznaczmy σ -algebrę podzbiorów nienatycypujących w $[0, T] \times \Omega$ i przez λ miarę Lebesgue’a na $([0, T], \beta([0, T]))$. Dla nieantycypującego, $L_{\mathcal{N}}^2(\lambda \times P)$ -całkowo ograniczonego, rozmytego procesu stochastycznego $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ otrzymuje się, że proces rozmyty $(t, \omega) \mapsto \int_0^t x(s, \omega) ds$ jest również $L_{\mathcal{N}}^2(\lambda \times P)$ -całkowo ograniczony ([A3], Proposition 3.3) i ma ciągłe trajektorie ([A3], Proposition 3.4). Ponadto dla $L_{\mathcal{N}}^2(\lambda \times P)$ -całkowo ograniczonych, rozmytych procesów stochastycznych x i y otrzymuje się ([A3], Proposition 3.5)

$$\sup_{u \in [0, t]} D_{\mathbb{R}^d}^2 \left(\int_0^u x(s, \omega) ds, \int_0^u y(s, \omega) ds \right) \stackrel{[0, T] \text{ P.1}}{\leq} t \int_0^t D_{\mathbb{R}^d}^2(x(s, \omega), y(s, \omega)) ds$$

oraz dla każdego $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E} \sup_{u \in [0, t]} D_{\mathbb{R}^d}^2 \left(\int_0^u x(s, \omega) ds, \int_0^u y(s, \omega) ds \right) \leq t \mathbb{E} \int_0^t D_{\mathbb{R}^d}^2(x(s, \omega), y(s, \omega)) ds.$$

Powyższe własności rozmytej stochastycznej całki Lebesgue'a są bardzo istotne w formułowaniu rozmytego stochastycznego równania typu Itô i dowodzeniu istnienia rozwiązania o ciągłych trajektoriach dla tego równania.

Przez $\{\mathfrak{B}(t)\}_{t \in [0, T]}$ oznaczmy m -wymiarowy $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in [0, T]}$ -ruch Browna określony na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tzn. $\mathfrak{B} = (B^1, B^2, \dots, B^m)'$, gdzie $\{B^1(t)\}_{t \in [0, T]}$, $\{B^2(t)\}_{t \in [0, T]}$, $\dots$, $\{B^m(t)\}_{t \in [0, T]}$ są niezależnymi, jednowymiarowymi $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in [0, T]}$ -ruchami Browna i symbol $'$ oznacza transpozycję. W pracach [A3, A4] rozważa się rozmyte stochastyczne równanie różniczkowe typu Itô z losowymi współczynnikami dryfu i dyfuzji. W literaturze dotyczącej klasycznych, jednowartościowych równań stochastycznych te współczynniki najczęściej nie są losowe. Postać symboliczna rozmytego stochastycznego równania różniczkowego typu Itô jest następująca

$$dx(t, \omega) \stackrel{[0, T]}{=}^{P.1} f(t, \omega, x(t, \omega)) dt + \langle g(t, \omega, x(t, \omega)) d\mathfrak{B}(t) \rangle, \quad x(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} x_0(\omega), \quad (10)$$

gdzie $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ i $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$.

W dalszej części, argument ω nie będzie wypisany wyraźnie w powyższym równaniu. Ponieważ $g = (g^1, g^2, \dots, g^m)$, gdzie $g^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($k = 1, 2, \dots, m$), to równanie (10) można zapisać jako

$$dx(t) \stackrel{[0, T]}{=}^{P.1} f(t, x(t)) dt + \left\langle \sum_{k=1}^m g^k(t, x(t)) dB^k(t) \right\rangle, \quad x(0) \stackrel{P.1}{=} x_0. \quad (11)$$

Te równania rozszerzają pojęcia, odpowiednio, deterministycznych wielowartościowych oraz rozmytych równań różniczkowych i z drugiej strony jednowartościowych oraz wielowartościowych stochastycznych równań różniczkowych. Te nowe równania będą odpowiednie dla modelowania układów dynamicznych z dwoma rodzajami niepewności, tzn. z rozmytością w opisie stanów układu i losowymi zaburzeniami wpływającymi na dynamikę modelowanego zjawiska.

Definicja 3. *Rozmyty proces stochastyczny $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ nazywa się mocnym rozwiązaniem równania (11), jeśli x*

- (i) *jest adaptowalny i $L_N^2(\lambda \times P)$ -całkowo ograniczony,*
- (ii) *jest $D_{\mathbb{R}^d}$ -ciągły,*

(iii) spełnia

$$x(t) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \left\langle \sum_{k=1}^m \int_0^t g^k(s, x(s))dB^k(s) \right\rangle. \quad (12)$$

Mocne rozwiązanie $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ równania (11) jest jednoznaczne, jeśli $D_{\mathbb{R}^d}(x(t), y(t)) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} 0$, gdzie $y: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest dowolnym mocnym rozwiązaniem (11).

Pierwsza z całek w (12) to rozmyta stochastyczna całka Lebesgue'a. Pozostałe całki to $\mathbb{R}^d$ -wartościowe, czyli jednowartościowe, stochastyczne całki Itô, które poprzez operację $\langle \cdot \rangle$ zanurzane są w $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Definicja rozwiązania różni się od definicji rozwiązania typu średniokwadratowego rozważanego w [B7], gdzie rozwiązania są rozmytymi procesami stochastycznymi ciągłymi w sensie pewnej metryki średniokwadratowej i są identyczne, gdy są swoimi modyfikacjami.

Na współczynniki $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots, m$, równania (11) nakłada się poniższe warunki:

- (c1) odwzorowanie $f: ([0, T] \times \Omega) \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest $\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}} | \mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalne i $g^k: ([0, T] \times \Omega) \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ są $\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mierzalne,
- (c2) istnieje stała $L > 0$ taka, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ i dowolnych $u, v \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$

$$\max\{D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), f(t, \omega, v)), \|g^k(t, \omega, u) - g^k(t, \omega, v)\|_{\mathbb{R}^d}\} \leq LD_{\mathbb{R}^d}(u, v),$$

- (c3) istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ z P.1 dla każdego $(t, u) \in [0, T] \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$\max\{D_{\mathbb{R}^d}((f(t, \omega, u), \langle 0 \rangle), \|g^k(t, \omega, u)\|_{\mathbb{R}^d})\} \leq C(1 + D_{\mathbb{R}^d}(u, \langle 0 \rangle)).$$

Twierdzenie 10 ([A3], Theorem 4.3). Niech $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie $\mathcal{A}_0 | \mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalne i $L_A^2(P)$ -całkowo ograniczone. Niech $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots, m$, spełniają warunki (c1)-(c3). Wówczas równanie (11) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie.

Dzięki własnościom rozmytej stochastycznej całki Lebesgue'a i własnościom klasycznej całki Itô, dowód tego twierdzenia można przeprowadzić podobnie jak w przypadku klasycznych stochastycznych równań różniczkowych stosując metodę sukcesywnych aproksymacji x_n dla $n = 0, 1, \dots$. Szacowane są wartości $j_n(t) = \mathbb{E} \sup_{u \in [0, t]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(u), x_{n-1}(u))$ przez wyrażenia postaci $M_1(M_2 t)^n/n!$, gdzie M_1, M_2 są pewnymi stałymi. Korzystając z Lematu Borela–Cantelliego i zupełności przestrzeni $(\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d), D_{\mathbb{R}^d})$ można wnioskować o istnieniu odwzorowania $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ takiego, że $\sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(t), x(t)) \xrightarrow{P.1} 0$. Uzasadnia się, że x jest rozmytym procesem stochastycznym o ciągłych trajektoriach i

nieantycypującym. Pewna trudność w dowodzeniu w stosunku do klasycznych równań pojawia się przy uzasadnieniu, że $\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(t), x(t)) \rightarrow 0$. W przypadku klasycznych równań jednowartościowych zbieżność tego rodzaju otrzymuje się z uwagi na zupełność rozważanej przestrzeni typu L^2 lub dokładniej typu S^2 . Dla równań o wartościach w $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ takiej analogii nie można zastosować. Dotychczas nie zostało pokazane, że zbiór rozmytych procesów stochastycznym o ciągłych trajektoriach i takich że $\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x(t), \langle 0 \rangle) < \infty$ z metryką $d_2(x, y) := (\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x(t), y(t)))^{1/2}$ tworzy przestrzeń metryczną zupełną. Nie zostało również udowodnione, że zbiór $L_{\mathcal{A}}^2(P)$ -całkowo ograniczonych rozmytych zmiennych losowych wyposażony w metrykę $\Delta_2(x, y) := (\mathbb{E} D_{\mathbb{R}^d}^2(x, y))^{1/2}$ tworzy przestrzeń zupełną. Aby pokonać niedogodność w równaniach rozmytych zauważamy, że po pierwsze ma miejsce zbieżność $\sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(t), \langle 0 \rangle) \xrightarrow{P,1} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x(t), \langle 0 \rangle)$ i po drugie istnieje stała M_3 (niezależna od n) taka, że $\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(t), \langle 0 \rangle) \leq M_3$. Stosując lemat Fatou otrzymuje się całkowalność zmiennej losowej $\sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x(t), \langle 0 \rangle)$. Wówczas z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej uzyskuje się zbieżność $\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(t), x(t)) \rightarrow 0$.

Niedogodności tego typu nie spotyka się w [B7], gdzie badania prowadzone są w strukturze przestrzeni $L_{\mathcal{A}}^2(P)$ -całkowo ograniczonych rozmytych zmiennych losowych z metryką $\delta_2(x, y) := \sup_{\alpha \in [0, 1]} (\mathbb{E} H_{\mathbb{R}^d}^2([x]^\alpha, [y]^\alpha))^{1/2}$. Taka przestrzeń metryczna jest zupełna.

Szczególnym przypadkiem rozmytych równań postaci (11) są wielowartościowe stochastyczne równania różniczkowe. One były badane przy warunku Lipschitza i liniowego wzrostu przez J. Li, S. Li i Y. Ogurę w [138]. Jednak współczynniki dryfu i dyfuzji w [138] nie są losowe. W [138] nie zakłada się $\mathcal{A}_0$ -mierzalności zmiennej x_0 , która symbolizuje wartość początkową. To wydaje się niedostatkiem ze względu na brak zapewnienia poprawności definicji wielowartościowych całek stochastycznych w ciągu kolejnych przybliżeń i definicji rozwiązania jako procesu adaptowalnego. Podobny niedostatek pojawia się w pracach J. Zhanga, S. Li, I. Mitomy i Y. Okazakiego [139] oraz I. Mitomy, Y. Okazakiego, J. Zhanga [140], gdzie przy warunkach Lipschitza i liniowego wzrostu rozważa się wielowartościowe równania stochastyczne w przestrzeniach Banacha typu martyngałowego. W [139, 140] zakłada się dodatkowo, że σ -algebra $\mathcal{A}$ jest ośrodkowa względem miary probabilistycznej P . Używa się innej definicji wielowartościowej stochastycznej całki Lebesgue'a. Ona odzwierciedla definicję zaproponowaną w [120] dla wielowartościowej całki Itô.

Globalny warunek Lipschitza (c2) w Tw. 10 zapewnia jednoznaczność rozwiązania równania (11). Jednoznaczność jest również zachowana, jeśli ten warunek zachodzi na zbiorach ograniczonych. Ten fakt został sformułowany w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 11 ([A3], Theorem 4.4). *Niech $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$,*

$g^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($k = 1, 2, \dots, m$) spełniając:

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje stała $L_n > 0$ taka, że z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ i dowolnych $u, v \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$

$$\max\{D_{\mathbb{R}^d}(u, \langle 0 \rangle), D_{\mathbb{R}^d}(v, \langle 0 \rangle)\} \leq n \quad \text{implikuje}$$

$$\max\left\{D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), f(t, \omega, v)), \|g(t, \omega, u) - g(t, \omega, v)\|_{\mathbb{R}^d}\right\} \leq L_n D_{\mathbb{R}^d}(u, v).$$

Założmy, że (11) posiada mocne rozwiązanie x . Wówczas x jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem (11).

Dowód tego twierdzenia opiera się na zastosowaniu odpowiednich czasów zatrzymania i nierówności Gronwalla.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (11) zostało uzyskane w Tw. 10 przy warunkach Lipschitza i liniowego wzrostu. W pracy [A4] zamiast warunku liniowego wzrostu używa się ogólniejszego warunku ograniczoności (c4):

(c4) istnieje stała $C > 0$ taka, że z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ zachodzi

$$\max\{D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, \langle 0 \rangle), \langle 0 \rangle), \|g^k(t, \omega, \langle 0 \rangle)\|_{\mathbb{R}^d}\} \leq C, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Twierdzenie 12 ([A4], Theorem 3.3). Niech $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie $\mathcal{A}_0|\mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalne i $L_A^2(P)$ -całkowo ograniczone. Niech $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots, m$, spełniając warunki (c1), (c2) i (c4). Wówczas równanie (11) posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$.

W dowodzie istnienia rozwiązania korzystamy tak, jak w dowodzie Tw. 10 z metody kolejnych przybliżeń $x_n: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ dla $n = 0, 1, \dots$. W pracy [A4], przy warunkach (c1), (c2), (c4), prezentuje się wyrażnie (Proposition 3.4) postać stałej M_3 będącej jednostajnym, ze względu na n , górnym ograniczeniem dla $\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(t), \langle 0 \rangle)$. Ponieważ procesy x_n przybliżają rozwiązanie x , to istotnym wydaje się ocena dokładności n -tego przybliżenia. Ona jest przedstawiona przez oszacowanie ([A4], Proposition 3.5)

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_n(t), x(t)) \leq M_4 \frac{M_5^{n+1}}{(n+1)!},$$

gdzie M_4, M_5 są stałymi wyznaczonymi wyrażnie. Ta ocena daje również pogląd o dużej szybkości zbieżności ciągu $\{x_n\}$ do rozwiązania x w metryce d_2 .

Stabilność rozwiązania względem warunku początkowego jest pożądaną własnością.

Twierdzenie 13 ([A4], Theorem 3.6). Niech $x_0, y_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będą $\mathcal{A}_0|\mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalne i $L_A^2(P)$ -całkowo ograniczone. Niech $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$,

$g^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots, m$, spełniają warunki (c1), (c2) i (c4).
Niech x oznacza rozwiązanie równania (11) oraz y rozwiązanie równania

$$y(t) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} f(t, y(t))dt + \left\langle \sum_{k=1}^m g^k(t, y(t))dB^k(t) \right\rangle, \quad y(0) \stackrel{P.1}{=} y_0.$$

Wówczas rozwiązania $x, y: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełniają

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x(t), y(t)) \leq M \mathbb{E} D_{\mathbb{R}^d}^2(x_0, y_0),$$

gdzie $M > 0$ jest pewną stałą dodatnią.

Drugi rodzaj stabilności rozwiązania to stabilność względem współczynników równania f i g^k dla $k = 1, 2, \dots, m$.

Twierdzenie 14 ([A4], Theorem 3.7). Niech $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie $\mathcal{A}_0|\mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalne i $L_A^2(P)$ -całkowo ograniczone. Niech $f, f_n: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g^k, g_n^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, m$) spełniają (c1), (c2) i (c4). Niech x oznacza rozwiązanie równania (11) oraz y_n rozwiązanie następującego równania

$$dy_n(t) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} f_n(t, y_n(t))dt + \left\langle \sum_{k=1}^m g_n^k(t, y_n(t))dB^k(t) \right\rangle, \quad y_n(0) \stackrel{P.1}{=} x_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Założmy, że dla każdego $u \in \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$\mathbb{E} \int_0^T d_\infty^2(f_n(t, u), f(t, u))dt + \sum_{k=1}^m \mathbb{E} \int_0^T d_\infty^2(\langle g_n^k(t, u) \rangle, \langle g^k(t, u) \rangle)dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wówczas dla rozwiązań $x, y_n: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} D_{\mathbb{R}^d}^2(y_n(t), x(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Aby udowodnić Twierdzenia 13 i 14 pokazuje się (odpowiednio), że funkcje $t \mapsto \mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} D_{\mathbb{R}^d}^2(x(s), y(s))$, $t \mapsto \mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} D_{\mathbb{R}^d}^2(y_n(s), x(s))$ spełniają pewne nierówności, które pozwalają na zastosowanie lematu Gronwalla.

Rozwiązania rozmytego stochastycznego równania różniczkowego (11) mają następującą własność geometryczną: posiadają trajektorie z niemalejącą średnicą ich wartości.

Twierdzenie 15 ([A4], Theorem 3.8). Niech $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie rozwiązaniem równania (11). Wówczas z P.1 funkcje $[0, T] \ni t \mapsto \text{diam}(x(t, \omega)) \in \mathbb{R}_+$ są niemalejące.

Dowód tej własności polega na zauważeniu, że z P.1 dla dowolnych $0 \leq s \leq t \leq T$ i dowolnego $a \in \left[\int_s^t f(\tau, \omega, x(\tau, \omega)) d\tau \right]^0 + \sum_{k=1}^m \left(\int_s^t g^k(\tau, x(\tau)) dB^k(\tau) \right) (\omega)$ jest prawdziwa inkluzja $[x(s, \omega)]^0 + a \subset [x(t, \omega)]^0$.

Własność z Tw. 15 jest podobna do analogicznej własności (L1)-różniczkowalnych rozwiązań rozmytych losowych równań różniczkowych (1). Stąd ciekawym wydaje się rozważenie rozmytych stochastycznych równań różniczkowych typu Itô z rozwiązaniami posiadającymi trajektorie z nierosnącą średnicą ich wartości. Praca autora o takich równaniach jest przygotowana do druku.

Dzięki Tw. 12 o rozwiązaniu określonym na $[0, T] \times \Omega$ można uzasadnić istnienie i jednoznaczność rozwiązania zdefiniowanego na $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Wtedy rozważa się równanie

$$dx(t) \stackrel{\mathbb{R}_+}{=}^{P.1} f(t, x(t))dt + \sum_{k=1}^m \langle g^k(t, x(t)) dB^k(t) \rangle, \quad x(0) \stackrel{P.1}{=} x_0. \quad (13)$$

gdzie $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g^k: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ dla $k = 1, 2, \dots, m$, $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest rozmytą zmienną losową, $\{B^1(t)\}_{t \geq 0}$, $\{B^2(t)\}_{t \geq 0}, \dots, \{B^m(t)\}_{t \geq 0}$ są niezależnymi, jednowymiarowymi $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ -ruchami Browna.

Dla $T > 0$ definiuje się odwzorowania $f_T: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g_T^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($k = 1, 2, \dots, m$) jako

$$f_T(t, \omega, u) = f(t, \omega, u) \quad \text{dla } (t, \omega, u) \in [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d),$$

$$g_T^k(t, \omega, u) = g^k(t, \omega, u) \quad \text{dla } (t, \omega, u) \in [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d).$$

Stwierdzenie 2 ([A4], Theorem 4.3). *Niech $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie $\mathcal{A}_0 | \mathcal{B}_{D^{\mathbb{R}^d}}$ -mierzalne i $L_A^2(P)$ -całkowo ograniczone. Załóżmy, że $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g^k: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($k = 1, 2, \dots, m$) są takie, że dla każdego $T > 0$ odwzorowania $f_T: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, $g_T^k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($k = 1, 2, \dots, m$) spełniają (c1), (c2) i (c4). Wówczas równanie (13) ma jednoznaczne mocne rozwiązanie $x: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$.*

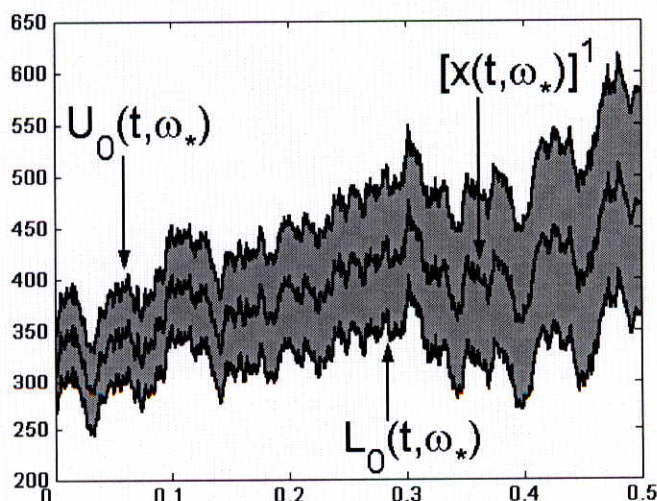
Powyższe twierdzenie otwiera przyszłe możliwości badania zachowania w nieskończoności rozwiązań rozmytych stochastycznych równań różniczkowych.

Rozmyte stochastyczne równania różniczkowe typu Itô mają potencjał aplikacyjny. Zastosowanie takich równań w postaci (11) zostało zilustrowane w [A4] pewnym modelem populacyjnym. Rozważana jest populacja pewnego gatunku żyjąca na ograniczonym terytorium. Przyjęto, że na liczebność populacji mają wpływ czynniki losowe i stany liczebności nie są opisane precyzyjnie,

ale przez wyrażenia lingwistyczne np. “bardzo mała”, “mała”, “niewielka”, “średnia”, “duża”, “ogromna” itd. Przyjęto również, że granica terytorium może być przekraczana tylko w m punktach granicznych. Proces migracyjny stanowi chaotyczne zaburzenie w rozważanym zjawisku i jest modelowany procesem ruchu Browna. Aby zaproponować realistyczny model takiego zjawiska, użyto rozszerzenia klasycznego, deterministycznego równania Malthusa do postaci rozmytego stochastycznego równania różniczkowego typu Itô

$$dx(t, \omega) \stackrel{[0,T]^{P.1}}{=} ax(t, \omega)dt + \left\langle \sum_{k=1}^m b_k dB^k(t, \omega) \right\rangle, \quad x(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} x_0(\omega). \quad (14)$$

gdzie ω symbolizuje czynnik losowy, $a \neq 0$, b_k jest dodatnią stałą i B^k jest ruchem Browna ($B^1, B^2, \dots, B^m$ są niezależne), $x_0: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest rozmytą zmienną losową. Takie równanie posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$, którego jawną postać wyznaczono stosując metodę wyznaczania brzegów α -ciąg rozwiązania x .



Rys. 3. Wykres $[x(\cdot, \omega_*)]^0$ i $[x(\cdot, \omega_*)]^1$ dla rozwiązania x równania (14) z $a > 0$.

Rozwiązanie $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$ równania (14) z $a > 0$ jest postaci

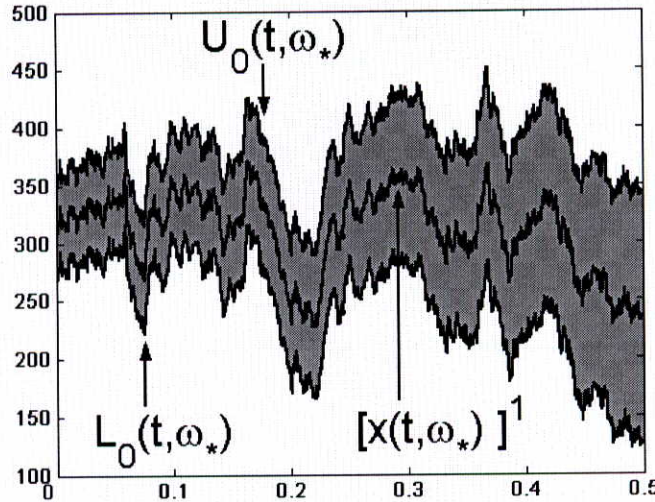
$$x(t) \stackrel{[0,T]^{P.1}}{=} e^{at} \cdot x_0 + \left\langle e^{at} \sum_{k=1}^m b_k \int_0^t e^{-as} dB^k(s) \right\rangle. \quad (15)$$

Na Rys. 3 przedstawiona jest trajektoria nośnika oraz rdzenia rozwiązania równania (14) z $a > 0$. Dla symulacji numerycznej przyjęto m.in., że $[x_0(\omega_*)]^0 = [275, 350]$ oraz $[x_0(\omega_*)]^1 = \{312\frac{1}{2}\}$.

Rozwiązanie $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$ równania (14) z $a < 0$ jest postaci

$$x(t) \stackrel{[0,T]^{P.1}}{=} \cosh(at) \cdot x_0 + \sinh(at) \cdot x_0 + \left\langle e^{at} \sum_{k=1}^m b_k \int_0^t e^{-as} dB^k(s) \right\rangle. \quad (16)$$

Dla $a < 0$ i $t \in (0, T]$ liczby $\cosh(at)$ i $\sinh(at)$ mają przeciwne znaki. Stąd nie można przepisać (16) w postaci (15). Symulację trajektorii nośnika i rdzenia tego rozwiązania przedstawiono na Rys. 4.



Rys. 4. Wykres $[x(\cdot, \omega_*)]^0$ i $[x(\cdot, \omega_*)]^1$ dla rozwiązania x równania (14) z $a < 0$.

Dla rozwiązania (15) mamy $\text{diam}(x(t)) \stackrel{[0,T]^{P.1}}{=} e^{at} \text{diam}(x_0)$, a dla rozwiązania (16) otrzymujemy $\text{diam}(x(t)) \stackrel{[0,T]^{P.1}}{=} e^{-at} \text{diam}(x_0)$. Zatem wartości trajektorii rozwiązań (15) i (16) stają się coraz bardziej rozmyte, to znaczy $t \mapsto \text{diam}(x(t))$ jest funkcją rosnącą. To jest zgodne z Tw. 15.

Rozważając przypadek $a < 0$ i biorąc pod uwagę charakter modelowanego zjawiska można zapytać czy istnieje model, który byłby lepiej dopasowany i lepiej odzwierciedlał ewolucję populacji. Ujemna wartość a informuje, że rozważana populacja ma tendencję wymierania, czyli w ogólności liczebność maleje. Stąd niepewność, rozmytość w percepcyjnym opisie stanów powinna maleć, a nie wzrastać. Obserwacje uzyskane dla (L2)-różniczkowalnych rozwiązań rozmytych losowych równań różniczkowych kierują do następującego modelu z $a < 0$ zapisanego w postaci całkowej

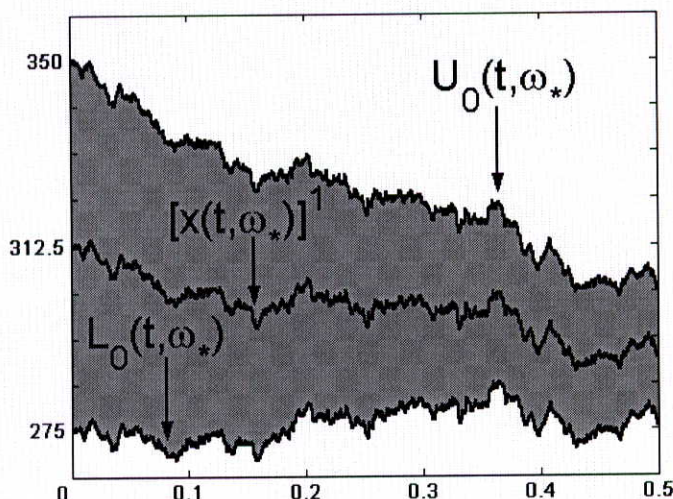
$$x(t) + (-1) \int_0^t ax(s)ds + \left\langle \sum_{k=1}^m (-1) \int_0^t b_k dB^k(s) \right\rangle \stackrel{[0,T]^{P.1}}{=} x_0. \quad (17)$$

To równanie pokrywa się z całkową postacią równania (14) w przypadku, gdy x i x_0 są jednowartościowe, a nie rozmyte. Jednakże w przypadku rozmytym te równania są inne. Rozwiązaniem $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$ równania (17) jest

$$x(t) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} e^{at} \cdot x_0 + \left\langle e^{at} \sum_{k=1}^m b_k \int_0^t e^{-as} dB^k(s) \right\rangle.$$

Ilustrację symulacji nośnika i rdzenia tego rozwiązania przedstawiono na Rys. 5.

Teraz $\text{diam}(x(t)) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} e^{at} \text{diam}(x_0)$ i z P.1 funkcja $t \mapsto \text{diam}(x(t, \omega))$ jest malejąca. Stąd model (17) może być lepszy niż model (14) z $a < 0$.



Rys. 5. Wykres $[x(\cdot, \omega_*)]^0$ i $[x(\cdot, \omega_*)]^1$ dla rozwiązania x równania (17) z $a < 0$.

Oprócz powyższych modeli populacyjnych rozważono w [A4] przykład zastosowania rozmytych stochastycznych równań różniczkowych w modelowaniu zagadnień finansowych. Rozwiązywane jest rozmyte równanie stochastyczne typu Itô, które jest rozszerzeniem klasycznego modelu Brennana–Schwartza używanego do modelowania krótkoterminowej stopy zwrotu i rozszerzeniem klasycznego modelu Blacka–Scholesa dynamiki cen akcji.

Prace [A3, A4] są częścią podstaw teorii rozmytych stochastycznych równań różniczkowych typu Itô. W przyszłych badaniach można wprowadzić do tych równań procesy sterujące ogólniejsze niż proces ruchu Browna. Mogą to być np. ułamkowy ruch Browna, ogólny proces gaussowski, proces Lévy’ego, martynał, czy semimartynał. Dryf w równaniu może być sterowany przez procesy rosnące lub o skończonym wahaniu. Badania w tym kierunku zostały podjęte przez W. Fei’a [141], który na podstawie wyników zawartych w [A3, A4] modyfikuje postać rozmytego równania (10) i rozważa jednowymiarowy, ciągły lokalny martynał w miejscu m -wymiarowego ruchu Browna. Odwzorowania rozmyte mają w [141] wartości w $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$. W pracy W. Fei’a, H. Liu i W. Zhanga [142] wartości są w zbiorze $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. W pracy W. Fei’a, D. He i H. Liu [143] wskazana jest własność braku eksplozji dla rozwiązań autonomicznej wersji równania (11) z $m = 1$. T. T. Tung [144] rozważa rozmyte równanie stochastyczne ze sterowaniem i

pokazuje ciągłą zależność rozwiązania względem warunku początkowego i sterowania. Szczególnym wariantem rozmytych stochastycznych równań różniczkowych są wielowartościowe stochastyczne równania różniczkowe. Prace W. Fei'a, D. Xia [145], W. Fei'a i Y. Lianga [146] są poświęcone tym równaniom.

4.2.3. Rozmyte równania stochastyczne z rozmytym dryfem i rozmytą dyfuzją

Na rozwiązanie klasycznego, jednowartościowego stochastycznego równania różniczkowego można spojrzeć w dwojaki sposób. Po pierwsze jak na proces stochastyczny $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ i po drugie jak na odwzorowanie $x: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; \mathbb{R}^d)$. Ta obserwacja prowadzi do innej, niż w części 4.2.2 autoreferatu, metody formułowania rozmytego stochastycznego równania różniczkowego i innego rozumienia rozwiązania. Teraz wymaga się, aby rozwiązaniem było rozmyte odwzorowanie $X: [0, T] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; \mathbb{R}^d))$ o wartościach w zbiorach rozmytych przestrzeni wektorów losowych całkowalnych z kwadratem. Rezygnacja z wymagania, aby rozwiązaniem rozmytego stochastycznego równania różniczkowego był rozmyty proces stochastyczny $x: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$, tak jak w części 4.2.2 autoreferatu, pozwala na formułowanie równania typu Itô z rozmytym dryfem i rozmytą dyfuzją. Takie równania badane są w [A5, A6, B4, B12, B15, B20, B21] i nie były rozważane wcześniej. Kluczowe są teraz pojęcia rozmytych całek jako zbiorów rozmytych przestrzeni $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; \mathbb{R}^d)$.

Niech $F: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie nieantycypującym i $L_{\mathcal{N}}^2(\lambda \times P)$ -całkowo ograniczonym wielowartościowym procesem stochastycznym. Twierdzenie Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego o Mierzalnej Selekcji zapewnia niepustość zbioru selekcji $S_{\mathcal{N}}^2(F, \lambda \times P) := \{f \in L_{\mathcal{N}}^2(\lambda \times P) : f \in F, \lambda \times P\text{-p.w.}\}$. Stąd dla każdego $f \in S_{\mathcal{N}}^2(F, \lambda \times P)$ i dowolnych $\tau, t \in [0, T]$, $\tau < t$, można określić stochastyczną całkę Itô $\int_{\tau}^t f(s)dB(s)$ i stochastyczną całkę Lebesgue'a $\int_{\tau}^t f(s)ds$, które są elementami z przestrzeni $L^2(\Omega, \mathcal{A}_t, P; \mathbb{R}^d)$. Wielowartościową stochastyczną całką Itô–Aumanna będziemy nazywali następujący zbiór w $L^2(\Omega, \mathcal{A}_t, P; \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\tau}^t F(s)dB(s) := \left\{ \int_{\tau}^t f(s)dB(s) : f \in S_{\mathcal{N}}^2(F, \lambda \times P) \right\},$$

a zbiór w $L^2(\Omega, \mathcal{A}_t, P; \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\tau}^t F(s)ds := \left\{ \int_{\tau}^t f(s)ds : f \in S_{\mathcal{N}}^2(F, \lambda \times P) \right\}$$

będziemy nazywali wielowartościową stochastyczną całką Lebesgue'a–Aumanna. Te całki stochastyczne, wprowadzone przez M. Kisielewicza [87, 117], są

stosowane od ponad dwudziestu lat w zagadnieniach stochastycznych inkluzji różniczkowych.

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że σ -algebra $\mathcal{A}$ jest ośrodkowa względem miary probabilistycznej P oraz pisali L^2 zamiast $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; \mathbb{R}^d)$ i L_t^2 zamiast $L^2(\Omega, \mathcal{A}_t, P; \mathbb{R}^d)$, gdzie $t \in [0, T]$. W pracy [B4] zostało pokazane, że dla nieantycypującego i $L_{\mathcal{N}}^2(\lambda \times P)$ -całkowo ograniczonego, rozmytego procesu stochastycznego $f: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i dla dowolnych $\tau, t \in I$, $\tau < t$, istnieją zbiory rozmyte w $\mathcal{F}_c^b(L_t^2)$ oznaczane przez $\int_{\tau}^t f(s)dB(s)$ i $\int_{\tau}^t f(s)ds$ takie, że dla każdego $\alpha \in [0, 1]$

$$\left[\int_{\tau}^t f(s)dB(s) \right]^{\alpha} = \int_{\tau}^t [f(s)]^{\alpha}dB(s), \quad \left[\int_{\tau}^t f(s)ds \right]^{\alpha} = \int_{\tau}^t [f(s)]^{\alpha}ds,$$

gdzie całki występujące po prawych stronach równości są wielowartościowymi całkami stochastycznymi typu Itô–Aumanna i Lebesgue’a–Aumanna. Zbiory rozmyte $\int_{\tau}^t f(s)dB(s) \in \mathcal{F}_c^b(L_t^2)$, $\int_{\tau}^t f(s)ds \in \mathcal{F}_c^b(L_t^2)$ będziemy nazywali rozmytą stochastyczną całką Itô–Aumanna oraz rozmytą stochastyczną całką Lebesgue’a–Aumanna.

W tej części autoreferatu zostaną przedstawione wyniki uzyskane w pracach [A5, A6]. W [A5] rozważa się równania z rozmytymi stochastycznymi całkami Lebesgue’a–Aumanna i Itô–Aumanna. Dokładniej, dla $f, g: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(L^2) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ oraz $X_0 \in \mathcal{F}_c^b(L_0^2)$ przez rozmyte równanie z rozmytymi stochastycznymi całkami Lebesgue’a–Aumanna i Itô–Aumanna będziemy rozumieli równanie w przestrzeni metrycznej $(\mathcal{F}_c^b(L^2), D_{L^2})$:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dB(s) \text{ dla } t \in [0, T]. \quad (18)$$

Przez rozwiązanie równania (18) rozumiemy D_{L^2} -ciągłe, rozmyte odwzorowanie $X: [0, T] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(L^2)$, które spełnia (18). Rozwiązanie $X: [0, T] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(L^2)$ jest jednoznaczne, jeśli $X(t) = Y(t)$ dla każdego $t \in [0, T]$, gdzie $Y: [0, T] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(L^2)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania (18).

Na współczynniki $f, g: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(L^2) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ w równaniu (18) nakłada się następujące warunki:

(b1) dla każdego $u \in \mathcal{F}_c^b(L^2)$ odwzorowania

$$f(\cdot, \cdot, u), g(\cdot, \cdot, u): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$$

są nieantycypującymi, rozmytymi procesami stochastycznymi,

(b2) istnieje stała $K > 0$ taka, że z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ i dowolnych $u, v \in \mathcal{F}_c^b(L^2)$

$$\max \{D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), f(t, \omega, v)), D_{\mathbb{R}^d}(g(t, \omega, u), g(t, \omega, v))\} \leq K D_{L^2}(u, v),$$

(b3) istnieje stała $C > 0$ taka, że z P.1 dla każdego $t \in [0, T]$ i każdego $u \in \mathcal{F}_c^b(L^2)$

$$\max \{D_{\mathbb{R}^d}(f(t, \omega, u), \langle 0 \rangle), D_{\mathbb{R}^d}(g(t, \omega, u), \langle 0 \rangle)\} \leq C(1 + D_{L^2}(u, \langle \Theta \rangle)),$$

gdzie Θ oznacza element zerowy przestrzeni L^2 .

W pracy [B4] zostało pokazane, że powyższe warunki mierzalności, Lipschitza i liniowego wzrostu zapewniają istnienie jednoznacznego rozwiązania równania (18). Istnienie rozwiązania zostało osiągnięte dzięki zbieżności ciągu Picarda przybliżeń $\{X_n\}_{n=0}^\infty \subset C([0, T], \mathcal{F}_c^b(L^2))$ określonych jako:

$$X_0(t) = X_0, \quad t \in [0, T]$$

oraz dla $n \in \mathbb{N}$

$$X_n(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X_{n-1}(s))ds + \int_0^t g(s, X_{n-1}(s))dB(s), \quad t \in [0, T].$$

W pracy [A5] wskazano dwa następne rodzaje ciągów kolejnych przybliżeń rozwiązania równania (18). Oprócz przybliżeń Picarda bada się przybliżenia Carathéodory'ego i Maruyamy. Ciągi o tych nazwach były wykorzystywane w analizie klasycznych, jednowartościowych, stochastycznych równań różniczkowych. Ciąg Picarda stosował K. Itô [147], ciąg Carathéodory'ego stosowali D. R. Bell i S. E. A. Mohammed [148], trzeci ciąg przybliżeń zaproponował G. Maruyama [149]. W przypadku równań z rozmytymi całkami stochastycznymi Lebesgue'a–Aumanna i Itô–Aumanna rozmyte rozszerzenia wymienionych ciągów są również bardzo przydatne w dowodzeniu istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (18).

Ciąg Carathéodory'ego przybliżeń $\{Y_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0, T], \mathcal{F}_c^b(L^2))$ definiuje się przez procedurę: dla $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n(t) = X_0, \quad t \in [-1, 0],$$

$$Y_n(t) = X_0 + \int_0^t f(s, Y_n(s - 1/n))ds + \int_0^t g(s, Y_n(s - 1/n))dB(s), \quad t \in [0, T].$$

Ta procedura pozwala na określenie Y_n krok po kroku na przedziałach $[0, 1/n]$, $(1/n, 2/n]$, ... W istocie otrzymuje się wówczas

$$Y_n(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X_0)ds + \int_0^t g(s, X_0)dB(s), \quad \text{dla } t \in [0, 1/n],$$

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= Y_n(1/n) + \int_{1/n}^t f(s, Y_n(s - 1/n))ds \\ &\quad + \int_{1/n}^t g(s, Y_n(s - 1/n))dB(s) \quad \text{dla } t \in (1/n, 2/n] \end{aligned}$$

i kontynuacja procedury prowadzi do określenia $Y_n(t)$ na całym przedziale $[0, T]$.

Ciąg Maruyamy przybliżeń $\{Z_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0, T], \mathcal{F}_c^b(L^2))$ definiuje się następująco: dla $n \in \mathbb{N}$

$$W_n(0) = X_0,$$

i dla $t \in ((k-1)/n, \min\{k/n, T\}]$ oraz $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} W_n(t) &= W_n((k-1)/n) + \int_{(k-1)/n}^t f(s, W_n((k-1)/n))ds \\ &\quad + \int_{(k-1)/n}^t g(s, W_n((k-1)/n))dB(s). \end{aligned}$$

W pracy [B4] (Theorem 3.7) zostało pokazane, że przy założeniach (b1)-(b3) granica X ciągu Picarda $\{X_n\}$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (18). Podobne wyniki uzyskuje się dla ciągów $\{Y_n\}$ i $\{W_n\}$, co potwierdza użyteczność tych ciągów.

Twierdzenie 16 ([A5], Theorem 4.4). *Niech $X_0 \in \mathcal{F}_c^b(L_0^2)$ i niech $f, g: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(L^2) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełniając (b1)-(b3). Wówczas ciąg $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $C([0, T], \mathcal{F}_c^b(L^2))$ i zbiega do $X \in C([0, T], \mathcal{F}_c^b(L^2))$, które jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (18).*

Twierdzenie 17 ([A5], Theorem 5.5). *Przy założeniach Twierdzenia 16 ciąg $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $C([0, T], \mathcal{F}_c^b(L^2))$ i zbiega do $X \in C([0, T], \mathcal{F}_c^b(L^2))$, które jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (18).*

W dowodach tych twierdzeń wykorzystuje się własności, ustalone w [B4], rozmytych stochastycznych całek Lebesgue'a–Aumanna i Itô–Aumanna. Stosuje się również fakty, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą $\sup_{t \in [0, T]} D_{L^2}^2(Y_n(t), \langle \Theta \rangle) \leq C_1$ ([A5], Proposition 4.1), $\sup_{t \in [0, T]} D_{L^2}^2(W_n(t), \langle \Theta \rangle) \leq C_1$ ([A5], Proposition 5.1) oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $s, t \in [0, T]$ takich, że $0 < t - s \leq 1$ zachodzą

$D_{L^2}^2(Y_n(t), Y_n(s)) \leq C_2(t-s)$ ([A5], Proposition 4.2) i $D_{L^2}^2(W_n(t), W_n(s)) \leq C_2(t-s)$ ([A5], Proposition 5.2), gdzie C_1, C_2 są dodatnimi stałymi.

Niewątpliwą przewagą ciągów $\{Y_n\}$, $\{W_n\}$ nad $\{X_n\}$ jest ich niska złożoność algorytmiczna wyznaczania n -tego przybliżenia. Aby wyznaczyć n -te przybliżenie X_n w ciągu Picarda, trzeba najpierw wyznaczyć wszystkie wcześniejsze przybliżenia $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$. W przypadku ciągów $\{Y_n\}$ i $\{W_n\}$ ta niedogodność nie pojawia się. Wyznaczenie przybliżenia Y_n i Z_n nie wymaga znajomości żadnego z poprzednich wyrazów ciągu. Ciąg Picarda $\{X_n\}$ zyskuje w porównaniu z ciągami $\{Y_n\}$ i $\{W_n\}$ w kwestiach oszacowania błędu n -tego przybliżenia i szybkości zbieżności.

Twierdzenie 18 ([A5], Theorem 3.2). *Niech $X_0 \in \mathcal{F}_c^b(L_0^2)$ i niech $f, g: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(L^2) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełniając (b1)–(b3). Niech X oznacza jednoznaczne rozwiązanie równania (18). Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{t \in [0, T]} D_{L^2}^2(X_n(t), X(t)) \leq C_3 \frac{C_4^n}{n!},$$

gdzie C_3, C_4 są pewnymi stałymi dodatnimi.

Twierdzenie 19 ([A5], Theorem 4.3, Theorem 5.4). *Niech X oznacza jednoznaczne rozwiązanie równania (18). Przy założeniach Twierdzenia 16 istnieje stała $C_5 > 0$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{t \in [0, T]} D_{L^2}^2(Y_n(t), X(t)) \leq \frac{C_5}{n} \quad \text{oraz} \quad \sup_{t \in [0, T]} D_{L^2}^2(W_n(t), X(t)) \leq \frac{C_5}{n}.$$

Oszacowanie odległości między dokładnym rozwiązaniem i n -tym przybliżeniem w ciągach Picarda, Carathéodory'ego i Maruyamy wskazuje na powolność dwóch ostatnich metod przybliżania rozwiązania.

W pracy [A6] rozszerza się postać równania (18) do następującego

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f_1(s, X(s)) dZ_1(s) + \dots + \int_0^t f_m(s, X(s)) dZ_m(s), \quad t \in [0, T],$$

gdzie $Z_1, \dots, Z_m$ są semimartynałami i $f_1, \dots, f_m: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(L^2) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Tutaj potrzebna jest definicja rozmytej całki względem $\mathcal{H}^2$ -semimartynału Z . Podobnie do definicji całek rozmytych $\int f(s) ds$ i $\int f(s) dB(s)$, rozważanych w [B4, A5], można ją sformułować [127, B21, B15] z pomocą wielowartościowej całki stochastycznej typu Aumanna względem $\mathcal{H}^2$ -semimartynału. Ta całka to następujący podzbiór w przestrzeni L_t^2

$$\int_{(\tau,t]} F(s)dZ(s) := \left\{ \int_{(\tau,t]} g(s)dZ(s) : g \in S_{\mathcal{P}}^2(F, \mu_Z) \right\},$$

gdzie μ_Z jest miarą generowaną przez Z , określoną na $([0, T] \times \Omega, \mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ jest σ -algebrą zbiorów prognozowalnych, $F: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest prognozowalnym i $L_{\mathcal{P}}^2(\mu_Z)$ -całkowo ograniczonym procesem wielowartościowym. Następnie uzyskuje się istnienie zbioru rozmytego $\int_{(\tau,t]} f(s)dZ(s) \in \mathcal{F}_c^b(L_t^2)$ takiego, że jego α -cięcia spełniają

$$\left[\int_{(\tau,t]} f(s)dZ(s) \right]^\alpha = \int_{(\tau,t]} [f(s)]^\alpha dZ(s).$$

Zbiór rozmyty $\int_{(\tau,t]} f(s)dZ(s) \in \mathcal{F}_c^b(L_t^2)$ będziemy nazywali rozmytą całką stochastyczną Aumanna względem semimartynału.

Ponieważ Z oznacza $\mathcal{H}^2$ -semimartynał i $Z(0) = 0$, to Z ma rozkład $Z = A + M$, gdzie A jest adaptowalnym, càdlàg procesem o skończonym wahanu i M jest lokalnym martynałem. Procesy A i M są semimartynałami. Jeśli użyje się powyższej definicji całki, to można zaobserwować ([A6], Theorem 4.5), że $\int f dZ \neq \int f dA + \int f dM$, gdzie wszystkie całki są całkami rozmytymi. Również $\int F dZ \neq \int F dA + \int F dM$, gdzie wszystkie całki są całkami wielowartościowymi ([A6], Theorem 3.3). Jest to dość zaskakujący wynik, zważywszy na fakt, że dla całek z jednowartościowych procesów ma miejsce równość. W konsekwencji rozmyte (i wielowartościowe) równania

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + \int_0^t f(s, X(s))dZ(s), \\ X(t) &= X_0 + \int_0^t f(s, X(s))dA(s) + \int_0^t f(s, X(s))dM(s) \end{aligned}$$

nie są równoważne.

W pracy [A6] definiuje się całki wielowartościowe i rozmyte względem semimartynału Z nieco inaczej, aczkolwiek korzystając z definicji używanych w [B12, 127, B21, B15]. Mianowicie dla wielowartościowego, prognozowalnego i $L_{\mathcal{P}}^2(\mu_Z)$ -całkowo ograniczonego procesu $F: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ i dla rozmytego, prognozowalnego i $L_{\mathcal{P}}^2(\mu_Z)$ -całkowo ograniczonego procesu $f: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ definiuje się całkę wielowartościową $\oint F dZ$ i rozmytą $\oint f dZ$ jako

$$\oint_{(\tau,t]} F(s)dZ(s) := \int_{(\tau,t]} F(s)dA(s) + \int_{(\tau,t]} F(s)dM(s)$$

oraz

$$\oint_{\tau}^t f(s)dZ(s) := \int_{(\tau,t]} f(s)dA(s) + \int_{(\tau,t]} f(s)dM(s).$$

Wówczas otrzymuje się zgodność całek $\oint FdZ$ i $\oint fdZ$ z rozkładem $Z = A + M$ semimartynału Z , tzn. $\oint_{(\tau,t]} F(s)dZ(s) = \oint_{(\tau,t]} F(s)dA(s) + \oint_{(\tau,t]} F(s)dM(s)$ ([A6], Corollary 3.6) i $\oint_{(\tau,t]} f(s)dZ(s) = \oint_{(\tau,t]} f(s)dA(s) + \oint_{(\tau,t]} f(s)dM(s)$ ([A6], Corollary 4.7). Zależność między całkami $\oint_{(\tau,t]} F(s)dZ(s)$ i $\int_{(\tau,t]} F(s)dZ(s)$ opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 20 ([A6], Theorem 3.3). *Niech $F: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie prognozowalnym i $L_{\mathcal{P}}^2(\mu_Z)$ -całkowo ograniczonym procesem wielowartościowym. Wówczas dla $\tau, t \in [0, T]$, $\tau < t$,*

$$\oint_{(\tau,t]} F(s)dZ(s) \supset \int_{(\tau,t]} F(s)dZ(s).$$

W ogólności, powyższa inkluzja jest właściwa.

Zawieranie się zbioru $\int_{(\tau,t]} F(s)dZ(s)$ w zbiorze $\oint_{(\tau,t]} F(s)dZ(s) = \int_{(\tau,t]} F(s)dA(s) + \int_{(\tau,t]} F(s)dM(s)$ wynika z faktu, że każdy element $a \in \int_{(\tau,t]} F(s)dZ(s)$ ma reprezentację $a = \int_{(\tau,t]} f(s)dZ(s)$, gdzie f jest odpowiednią selekcją F , oraz z faktu, że $\int_{(\tau,t]} f(s)dZ(s) = \int_{(\tau,t]} f(s)dA(s) + \int_{(\tau,t]} f(s)dM(s)$. Aby pokazać, że inkluzja jest właściwa rozważa się szczególny, ciągły semimartynał w postaci $Z(t) = t + B(t)$, gdzie B jest $\{\mathcal{A}_t\}$ -ruchem Browna. Następnie wybiera się dwie różne selekcje f, g wielowartościowego procesu stochastycznego F . Wtedy $\int_{(\tau,t]} f(s)ds + \int_{(\tau,t]} g(s)dW(s) \in \oint_{(\tau,t]} F(s)dZ(s)$ i można pokazać, że $\int_{(\tau,t]} f(s)ds + \int_{(\tau,t]} g(s)dW(s) \notin \int_{(\tau,t]} F(s)dZ(s)$.

Z Tw. 20 łatwo wywnioskować następujący związek między całkami rozmytymi $\oint_{(\tau,t]} f(s)dZ(s)$ i $\int_{(\tau,t]} f(s)dZ(s)$.

Wniosek 1 ([A6], Theorem 4.5). *Niech $f: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ będzie prognozowalnym i $L_{\mathcal{P}}^2(\mu_Z)$ -całkowo ograniczonym, rozmytym procesem stochastycznym. Wówczas dla $\tau, t \in I$, $\tau < t$,*

$$\left[\oint_{(\tau,t]} f(s)dZ(s) \right]^{\alpha} \supset \left[\int_{(\tau,t]} f(s)dZ(s) \right]^{\alpha}, \text{ gdzie } \alpha \in [0, 1].$$

Niech $\mathcal{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)'$ będzie m -wymiarowym semimartynałem takim, że Z_k ($k = 1, \dots, m$) są jednowymiarowymi, ciągłymi $\mathcal{H}^2$ -semimartynałami. W dalszym ciągu rozważane jest rozmyte równanie z rozmytą całką stochastyczną

Aumanna względem $\mathcal{Z}$. Dla $f: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(L^2) \rightarrow [\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)]^{\times m}$ i $X_0 \in \mathcal{F}_c^b(L_0^2)$ takie równanie zapisuje się w postaci

$$X(t) = X_0 + \oint_0^t f(s, X(s)) d\mathcal{Z}(s) \text{ dla } t \in [0, T].$$

Ono jest rozumiane jako równanie w przestrzeni metrycznej $(\mathcal{F}_c^b(L^2), D_{L^2})$:

$$X(t) = X_0 + \oint_0^t f_1(s, X(s)) dZ_1(s) + \dots + \oint_0^t f_m(s, X(s)) dZ_m(s), \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

gdzie $f = (f_1, \dots, f_m)$ i $f_k: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{F}_c^b(L^2) \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ dla $k = 1, \dots, m$.

Jeśli przyjmiemy $m = 2$, $f_1 = f$, $f_2 = g$, $Z_1(s) = s$, $Z_2(s) = B(s)$ to (19) redukuje się do równania (18). Również równanie rozważane w [B12] jest szczególnym przypadkiem równania (19) sterowanego przez dwuwymiarowy semimartynał $\mathcal{Z} = (A, M)'$, gdzie A jest adaptowalnym, ciągłym procesem o skończonym wahaniu i M jest ciągłym martyngałem całkowalnym z kwadratem.

Aby otrzymać istnienie rozwiązania równania (19), na współczynniki $f_1, \dots, f_m$ w równaniu (19) nakłada się warunki:

- (d1) dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ i każdego $u \in \mathcal{F}_c^b(L^2)$ rozmyty proces stochastyczny $f_k(\cdot, \cdot, u): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c^b(\mathbb{R}^d)$ jest prognozowalny,
- (d2) istnieje stała $K > 0$ taka, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, prawie wszystkich (t, ω) względem μ_{Z_k} i dowolnych $u, v \in \mathcal{F}_c^b(L^2)$

$$D_{\mathbb{R}^d}(f_k(t, \omega, u), f_k(t, \omega, v)) \leq K D_{L^2}(u, v),$$

- (d3) istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, dla prawie wszystkich (t, ω) względem μ_{Z_k}

$$D_{\mathbb{R}^d}(f_k(t, \omega, \langle \Theta \rangle), \langle 0 \rangle) \leq C.$$

Nierówności w warunkach (d2) i (d3) mają zachodzić μ_{Z_k} -p.w. Stąd warunek (d2) jest słabszy warunek niż warunek lipschitzowski w [B12], gdzie nierówności mają zachodzić dla dowolnych (t, ω) . Również warunek ograniczoności (d3) jest słabszy niż warunek liniowego wzrostu postulowany w [B12] i [B15].

Twierdzenie 21 ([A6], Theorem 4.12). *Niech $X_0 \in \mathcal{F}_c^b(L_0^2)$. Załóżmy, że warunki (d1)-(d3) są spełnione. Wówczas równanie (19) posiada jednoznaczne rozwiązanie.*

Dowód tego twierdzenia nie został zamieszczony w publikacji [A6], ponieważ jest podobny do dowodu Twierdzenia 4.2 (z tej samej pracy) dotyczącego istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania wielowartościowego, będącego szczególnym przypadkiem rozmytego, sterowanego przez m -wymiarowy semimartynał. W dowodzie Tw. 21 wykorzystuje się następujące własności ([A6], Propositions 4.8, 4.9 i 4.10) rozmytej stochastycznej całki Aumanna $\oint f dZ$:

$$\oint_{(\tau,t]} f(s) dZ(s) = \oint_{(\tau,a]} f(s) dZ(s) + \oint_{(a,t]} f(s) dZ(s), \quad 0 \leq \tau < a < t \leq T,$$

$$D_{L^2}^2 \left(\oint_{(\tau,t]} f_1(s) dZ(s), \oint_{(\tau,t]} f_2(s) dZ(s) \right) \leq 2 \int_{(\tau,t] \times \Omega} D_{\mathbb{R}^d}^2(f_1, f_2) d\mu_Z, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

odwzorowanie $t \mapsto \oint_0^t f(s) dZ(s)$ jest D_{L^2} -ciągłe, jeśli Z jest ciągły.

Dowód Tw. 21 jest oparty na zastosowaniu twierdzenia Banacha o kontrakcji. Nie można jednak uzyskać rozwiązania od razu na całym przedziale $[0, T]$. Schemat dowodu jest następujący. Wybiera się podział $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ odcinka $[0, T]$ tak, aby $2mK^2 \sum_{k=1}^m \mu_{Z_k}([t_{i-1}, t_i] \times \Omega) < 1$ dla każdego $i = 1, \dots, N$ i rozważa się zbiory $\mathcal{C}_i$ (dla $i = 1, \dots, N$) D_{L^2} -ciągłych odwzorowań $X: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(L^2)$ wyposażone w metryki supremum ρ_i . Pokazuje się, że operatory $V_i: \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_i$ określone jako $(V_i X)(t) := X^{(i-1)}(t_{i-1}) + \oint_{t_{i-1}}^t f_1(s, X(s)) dZ_1(s) + \dots + \oint_{t_{i-1}}^t f_m(s, X(s)) dZ_m(s)$ dla $t \in [t_{i-1}, t_i]$ są dobrze zdefiniowane i zwięzające. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym gwarantuje istnienie jedyne $X^{(i)} \in \mathcal{C}_i$, który spełnia $X^{(i)}(t) = X^{(i-1)}(t_{i-1}) + \oint_{t_{i-1}}^t f_1(s, X^{(i)}(s)) dZ_1(s) + \dots + \oint_{t_{i-1}}^t f_m(s, X^{(i)}(s)) dZ_m(s)$ dla $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Odwzorowanie $X: [0, T] \rightarrow \mathcal{F}_c^b(L^2)$ określone jako $X(t) = X^{(1)}(t) \mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(t) + \dots + X^{(N)}(t) \mathbf{1}_{(t_{N-1}, t_N]}(t)$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (19).

W kolejnych pracach autora autoreferatu, przygotowanych do druku, rozważane są równania (19) z nielipschitzowskimi założeniami o współczynnikach równania oraz równania z malejącą rozmytością wartości trajektorii rozwiązań.

Równanie (19) rozszerza formułę równania jednowartościowego

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f_1(s, x(s)) dZ_1(s) + \dots + \int_0^t f_m(s, x(s)) dZ_m(s), \quad t \in [0, T],$$

gdzie $x_0 \in L_0^2$, $f_k: [0, T] \times \Omega \times L^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ dla $k = 1, \dots, m$. Wyniki dotyczące jednowartościowych równań stochastycznych sterowanych przez semimartynały np. [150–153] mogą stanowić inspirację do kolejnych problemów badawczych w zakresie rozmytych i wielowartościowych równań stochastycznych sterowanych przez semimartynały.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Mój dorobek naukowy składa się z 28 publikacji, 17 z nich to prace samodzielne, 11 prac jest współautorskich. Dwie prace współautorskie zostały opublikowane przed doktoratem, pozostałych 26 prac zostało opublikowanych po uzyskaniu stopnia doktora. Wszystkie publikacje ukazały się w recenzowanych wydawnictwach o zasięgu międzynarodowym. W bazie *Web of Science* znajduje się 21 prac z mojego dorobku naukowego, w tym 19 artykułów opublikowanych w czasopismach naukowych i 2 prace w formie publikacji konferencyjnych w wydawnictwach książkowych.

W tej części autoreferatu zostaną omówione skrótowo prace niewchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji [A1]-[A6]. Poniżej została zamieszczona lista prac z wyłączeniem publikacji [A1]-[A6]. Załącznik nr 4 zawiera pełną listę.

Prace [B1, B2] opublikowane przed doktoratem dotyczą zagadnień związanych z arytmetyką miar. W [B1] rozważane jest zagadnienie polegające na scharakteryzowaniu par rozkładów probabilistycznych μ i ν , dla których istnieje liczba $p \in (0, 1)$ taka, że $p\mu + (1 - p)\nu = \mu * \nu$ (symbol $*$ oznacza spłot). Dla $p = 1/2$ to zagadnienie było sformułowane w roku 1939 przez D. Dugué i badane przez wiele osób. Pełna charakteryzacja nie została podana. W [B1] to zagadnienie jest badane w powiązaniu z klasą $\Phi(\varphi)$ ułamków prostych funkcji charakterystycznych φ i klasą $T(\varphi)$ liczb rzeczywistych generowaną przez $\Phi(\varphi)$. Pokazuje się, że dla ustalonej φ będącej funkcją charakterystyczną rozkładu μ zagadnienie Dugué jest rozwiązywalne wtedy i tylko wtedy, gdy $T(\varphi)$ zawiera liczbę ujemną. Podane zostały przykłady funkcji charakterystycznych w postaci iloczynów funkcji z $\Phi(\varphi)$, które spełniają warunek Dugué. Podano również przykład funkcji charakterystycznych, które spełniają warunek Dugué sformułowany dla trzech miar probabilistycznych. Rozważana jest modyfikacja zagadnienia Dugué: przy ustalonych μ i p bada się czy istnieje σ -skończona miara znakovana taka, że zachodzi równość Dugué. Praca [B2] ma charakter przeglądowy. Zebrano w niej podstawowe fakty właściwe dla następujących operacji w zbiorze miar probabilistycznych: spłotu, mieszania skali i mieszania spłotu. W terminach niezależnych zmiennych losowych te operacje odpowiadają sumie, iloczynowi i losowej sumie zmiennych losowych.

Prace [B16, B17] dotyczą rozkładów asymptotycznych dla ciągów losowych sum zmiennych losowych, w których losowy indeks sumowania ma rozkład geometryczny. Te rozkłady należą do szerokiej klasy rozkładów nieskończenie podzielnych, stanowiących bazę w badaniach stochastycznych procesów Lévy'ego. Część wyników z [B16, B17], opublikowanych po uzyskaniu stopnia doktora, stanowi część wyników przedstawionych w rozprawie doktorskiej. W [B16] podana jest nowa charakteryzacja rozkładów geometrycznie nieskończenie podzielnych oraz rozkładów geometrycznie ściśle semistabilnych jako rozkładów granicznych dla ciągów losowych geometrycznych sum niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Ponieważ rozkłady geometrycznie ściśle semistabilne należą do klasy rozkładów dekomponowalnych, uzyskuje się również charakteryzację tych rozkładów jako rozkładów granicznych dla ciągów zwykłych

sum niezależnych zmiennych losowych o niekoniecznie jednakowym rozkładzie. W pracy [B17] badana jest nowa, wprowadzona przez autora, podklasa rozkładów geometrycznie nieskończenie podzielnych nazwana rozkładami geometrycznie semistabilnymi. Ona rozszerza klasę rozkładów ściśle semistabilnych. Dowodzi się związku pomiędzy nową klasą rozkładów i dobrze znaną klasą rozkładów semistabilnych. Pokazuje się różne charakteryzacje zmiennej losowej o takim rozkładzie w postaci granic według rozkładów ciągów ważonych, geometrycznych sum losowych z przesunięciem. Uzyskuje się postać reprezentacji Lévy'ego–Chinczyna dla funkcji charakterystycznej rozkładu geometrycznie semistabilnego i charakteryzację typu de Finettiego w postaci granic ciągów funkcji charakterystycznych.

Po doktoracie moje zainteresowania badawcze skoncentrowały się wokół zagadnień równań różniczkowych z rozmytymi i wielowartościowymi rozwiązaniami. W pracach [B6, B9, B10, B11] badane są wielowartościowe, deterministyczne równania różniczkowe z tzw. pochodną Hukuhary drugiego typu. Definicja tej nowej pochodnej różni się od definicji pochodnej Hukuhary używanej w sformułowaniu takich równań w monografii [19]. W [B6, B9] wartościami w rozważanych równaniach są podzbiory $\mathbb{R}$, w [B10] podzbiory $\mathbb{R}^d$ i w [B11] podzbiory (nieskończenie wymiarowej) przestrzeni Banacha E . Praca [B6] uogólnia wynik z [113] o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania z pochodną Hukuhary drugiego typu. Wyniki w [B6], tzn. istnienie jednoznacznego rozwiązania lokalnego i oszacowanie odległości rozwiązań dwóch równań i innymi wartościami początkowymi, otrzymuje się poprzez zasady porównawcze związane ze stowarzyszonymi, skalarnymi równaniami różniczkowymi. W pracy [B9] są kontynuowane badania z [B6]. Ta praca zawiera wyniki o ciągłej zależności rozwiązania względem wartości początkowej i o istnieniu co najmniej jednego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla wielowartościowych równań różniczkowych z pochodną Hukuhary drugiego typu przy założeniu ciągłości prawej strony równania. Uzyskuje się zwartość zbioru rozwiązań. Zostały podane jawne formuły na postaci rozwiązań dla równań liniowych. Uzasadnia się, że równania z pochodną Hukuhary drugiego typu mogą być przydatne w matematycznym modelowaniu ilości radioaktywnych cząstek w radioaktywnej substancji. W pracy [B10] rozważane jest zagadnienie początkowe $X'(t) = F(t, X_t)$, $X_0 = \Phi_0$ dla wielowartościowych, funkcyjnych równań różniczkowych. Tutaj prawa strona równania zależy od historii X_t , a nie tylko od wartości X w punkcie t . Takie zagadnienie z pochodną Hukuhary drugiego typu nie było rozpatrywane wcześniej. Przy warunku, że prawa strona jest lipschitzowska w zmiennej funkcyjnej i istnieniu aproksymacji typu Picarda otrzymuje się istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania funkcyjnego. Ciągłość i całkowita ograniczoność prawej strony równania oraz istnienie aproksymacji typu Tonelliego zapewniają istnienie co najmniej jednego rozwiązania. Praca [B11] poświęcona jest równaniom z pochodną Hukuhary drugiego typu i o wartościach w podzbiorach przestrzeni Banacha. Takie równania nie były badane przed [B11] i stanowią uzupełnienie badań wielowartościowych równań różniczkowych z klasyczną pochodną Hukuhary

[19]. Studia w [B11] są kompleksowe. Została pokazana równoważność równania różniczkowego z równaniem całkowym $X(t) = X_0 \ominus (-1) \int_0^t F(s, X(s)) ds$. To potwierdza konieczność zapewniania istnienia wielu różnic Hukuhary we wszystkich badaniach związanych z takimi równaniami. Tego problemu nie ma w [19]. Główne wyniki obejmują m.in. istnienie i jednoznaczność rozwiązania lokalnego w oparciu o twierdzenia porównawcze dla równań skalarnych przy warunku ogólniejszym niż warunek Lipschitza, ciągłość rozwiązania względem danych równania (chwili początkowej, wartości początkowej, prawej strony równania), istnienie co najmniej jednego rozwiązania globalnego zdefiniowanego na półprostej, istnienie i jednoznaczność rozwiązania globalnego.

W pracach [B3, B18], podobnie jak w [A1, A2], rozważane jest zagadnienie początkowe dla rozmytych losowych równań różniczkowych. W [B18] przy założeniu jednostajnej ciągłości i ograniczoności prawej strony f równania $x'(t, \omega) \stackrel{[0,T]}{=}^{P.1} f(t, \omega, x(t, \omega))$ z (L1)-pochodną otrzymuje się istnienie tzw. lokalnych ε -rozwiązań. Ten wynik pozwala na pokazanie, że istnieje wtedy co najmniej jedno lokalne rozwiązanie równania z (L1)-pochodną. Jako przykład w zastosowaniach zostaje rozwiązane rozmyte losowe zagadnienie początkowe w modelu populacyjnym z rzeczywistymi współczynnikami reprodukcji i śmiertelności oraz losowym i rozmytym współczynnikiem migracji. W pracy [B3] rozważa się równoległe równania losowe z (L1)-pochodną i (L2)-pochodną. Przy założeniu, że m.in. warunek Lipschitza zachodzi na zbiorach ograniczonych otrzymuje się istnienie i jednoznaczność lokalnych rozwiązań. Przy założeniu, że losowa prawa strona równania posiada majorantę całkowalną względem zmiennej czasowej uzyskujemy istnienie co najmniej jednego lokalnego rozwiązania. Ten rezultat wykorzystywany jest następnie do pokazania, że istnieje co najmniej jedno rozwiązanie globalne określone na półprostej. Dla rozwiązań (L2)-różniczkowalnych niezbędne są dodatkowe założenia o istnieniu różnic Hukuhary w konstrukcji przybliżonych rozwiązań równania. W [B3], w kilku przykładach pokazano metodę rozwiązywania pewnych rozmytych losowych zagadnień początkowych o wartościach w $\mathcal{F}_c^b(\mathbb{R})$.

Prace [B7, B8, B22], podobnie jak [A3, A4], poświęcone są rozmytym stochastycznym równaniom różniczkowym typu Itô z rozmytym dryfem i jednowartościową dyfuzją. Praca [B22], opublikowana w formie rozdziału w książce, ma charakter popularyzatorski. Głównym celem tej publikacji jest zwrócenie uwagi na potencjał aplikacyjny rozmytych stochastycznych równań różniczkowych. Proponowane są pewne równania i ich zastosowania w biologii i matematyce finansowej. Sposób rozwiązywania pewnych konkretnych równań został przedstawiony drobiazgowo. Załączone zostały symulacje numeryczne trajektorii rozwiązań. W pracy [B7] przedstawione są wyniki dotyczące tzw. średniokwadratowych rozwiązań takich równań. Te rozwiązania są innego typu niż rozwiązania w [A3, A4], również jednoznaczność rozwiązania jest rozumiana inaczej niż w [A3, A4]. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania średniokwadratowego zostały pokazane przy nałożeniu na współczynniki równania wymagań lipschitzowskich i liniowego wzrostu w

terminach odpowiedniej metryki δ_2 w zbiorze rozmytych zmiennych losowych. Uzyskuje się ograniczoność rozwiązania w metryce δ_2 oraz jego ciągłą zależność od danych w równaniu. W [B8] została podjęta pierwsza próba rozszerzenia równań rozważanych w [A3, A4, B22] do postaci równań ze współczynnikami zależnymi od historii procesu x , a nie tylko od jego wartości w chwili t . Udowodnione jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozmytego stochastycznego równania funkcyjnego. Oszacowany został dystans między rozwiązaniem przybliżonym i rozwiązaniem dokładnym. Uzasadniona jest ograniczoność rozwiązania. Szacowana jest odległość między dwoma rozwiązaniami odpowiadającymi dwóm różnym historiom początkowym. Rozważania teoretyczne uzupełniono o przykład równania z opóźnieniem w modelowaniu populacyjnym. W tym modelu przyrost ilości osobników uwzględnia czas wylęgu młodych. W rozwiązywaniu rozmytego równania z opóźnieniem używa się metody kroków w przód o długości równej opóźnieniu.

W pracach [B4, B5, B12, B13, B15, B19], podobnie jak w [A5, A6] rozważane są wielowartościowe i rozmyte stochastyczne równania różniczkowe z wielowartościowym dryfem i wielowartościową dyfuzją oraz z rozmytym dryfem i rozmytą dyfuzją, odpowiednio. Praca [B4] rozpoczyna studia takich równań przy pomocy wielowartościowych stochastycznych całek typu Aumanna używanych wcześniej w teorii stochastycznych inkluzji różniczkowych [85]. W [B4, B19] rozpatrywane są równania z całkami sterowanymi przez proces Wienera. Natomiast w [B12] z całkami sterowanymi przez proces o skończonym wahaniu i martyngał całkowalny z kwadratem, w [B15] przez semimartyngał, a w [B13] przez proces Wienera na płaszczyźnie. Rozważa się problem dobrej określoności takich równań, tzn. niewielkiej wrażliwości rozwiązania na niewielkie zaburzenia danych w równaniu. W pracach [B4, B13] istnienie rozwiązania uzyskuje się metodą sukcesywnych aproksymacji. Natomiast w [B19] zastosowana została po raz pierwszy do tych równań metoda punktu stałego i stosuje się tę metodę w [B12, B15]. Dla poprawnego zdefiniowania rozmytych równań stochastycznych uzasadnia się istnienie odpowiednich, rozmytych całek stochastycznych oraz bada się ich własności, m.in. własność będącą substytutem klasycznej izometrii Itô dla całek jednowartościowych. Ta ostatnia własność jest kluczowa w dowodzeniu twierdzeń o rozwiązaniach równań rozmytych.

Prace [B20, B21] są publikacjami konferencyjnymi z konferencji “The International Conference on Nonlinear Mathematics for Uncertainty and Its Applications” (Pekin, Chiny, 2011) i “6th International Conference on Soft Methods in Probability and Statistics” (Konstanz, Niemcy, 2012). Zasygnalizowana została w nich część wyników opublikowanych później w [B12] i [B15], odpowiednio.

Praca [B14] łączy teorię stochastycznych inkluzji różniczkowych z nową teorią wielowartościowych równań stochastycznych. Pokazuje się, że rozwiązanie X wielowartościowego równania stochastycznego generowanego przez inkluzję stochastyczną posiada ciągłą w normie przestrzeni L^2 selekcję x , która jest rozwiązaniem inkluzji stochastycznej.

Prace opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora.

- [B1] M. T. Malinowski, J. K. Misiewicz, On the Dugué problem with a solution in the set of signed measures, *Probability and Mathematical Statistics* 22 (2002) 319–331.
- [B2] G. Mazurkiewicz, M. Borowiecka-Olszewska, M. T. Malinowski, The arithmetic of convolutions, scale mixtures and convolution mixtures, *Journal of Mathematical Sciences* 121 (2004) 2674–2680.

Prace opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora.

- Prace opublikowane w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (JCR).

- [B3] M. T. Malinowski, Existence theorems for solutions to random fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 73 (2010) 1515–1532. IF 1,279.
- [B4] M. T. Malinowski, M. Michta, Fuzzy stochastic integral equations, *Dynamic Systems and Applications* 19 (2010) 473–494. IF 0,398.
- [B5] M. T. Malinowski, M. Michta, Stochastic set differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 72 (2010) 1247–1256. IF 1,279.
- [B6] M. T. Malinowski, Interval differential equations with a second type Hukuhara derivative, *Applied Mathematics Letters* 24 (2011) 2118–2123. IF 1,371.
- [B7] M. T. Malinowski, M. Michta, Stochastic fuzzy differential equations with an application, *Kybernetika* 47 (2011) 123–143. IF 0,454.
- [B8] M. T. Malinowski, Itô type stochastic fuzzy differential equations with delay, *Systems and Control Letters* 61 (2012) 692–701. IF 1,667.
- [B9] M. T. Malinowski (2012), Interval Cauchy problem with a second type Hukuhara derivative, *Information Sciences* 213 (2012) 94–105. IF 3,643.
- [B10] M. T. Malinowski, Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 9427–9437. IF 1,349.
- [B11] M. T. Malinowski, On set differential equations in Banach spaces a second type Hukuhara differentiability approach, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2012) 289–305. IF 1,349.
- [B12] M. T. Malinowski, M. Michta (2012), Set-valued stochastic integral equations driven by martingales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 394 (2012) 30–47. IF 1,050.
- [B13] M. T. Malinowski, M. Kozaryn, M. Michta, K. Ł. Świątek, On multivalued stochastic integral equations driven by a Wiener process in the plane, *Dynamic Systems and Applications* 21 (2012) 293–318. IF 0,395.

- [B14] M. T. Malinowski, M. Michta, The interrelation between stochastic differential inclusions and set-valued stochastic differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 408 (2013) 733–743. IF 1,050.
- [B15] M. T. Malinowski, M. Michta, J. Sobolewska, Set-valued and fuzzy stochastic integral equations driven by semimartingales, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 79 (2013) 204–220. IF 1,640.

- Prace opublikowane w czasopismach nieznajdujących się w bazie JCR.

- [B16] M. T. Malinowski, Geometrically strictly semistable laws as the limit laws, *Discussiones Mathematicae: Probability and Statistics* 27 (2007) 79–97.
- [B17] M. T. Malinowski, On some limit distributions for geometric random sums, *Discussiones Mathematicae: Probability and Statistics* 28 (2008) 247–266.
- [B18] M. T. Malinowski, Peano type theorem for random fuzzy initial value problem, *Discussiones Mathematicae: Differential Inclusions, Control and Optimization* 31 (2011) 5–22.
- [B19] M. T. Malinowski, M. Michta, Set-valued stochastic integral equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems: Series B, Applications and Algorithms* 18 (2011) 473–492.

- Prace konferencyjne w wydawnictwach książkowych.

- [B20] M. T. Malinowski, M. Michta, Fuzzy stochastic integral equations driven by martingales, W: *Nonlinear Mathematics for Uncertainty and Its Applications*, Seria: *Advances in Intelligent and Soft Computing* 100 Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2011, 143–150.
- [B21] M. T. Malinowski, On equations with a fuzzy stochastic integral with respect to semimartingales, W: *Synergies of Soft Computing and Statistics for Intelligent Data Analysis*, Seria: *Advances in Intelligent Systems and Computing* 190, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2013, 93–101.

- Prace opublikowane jako rozdziały w wydawnictwach książkowych.

- [B22] M. T. Malinowski, Modeling with stochastic fuzzy differential equations, W: *Mathematics of Uncertainty Modeling in the Analysis of Engineering and Science Problems* (S. Chakraverty, Ed.), pp. 150–172, IGI Global, Hershey Pennsylvania, 2014.

BIBLIOGRAFIA

(w porządku pojawiania się)

- [1] S. K. Zaremba, Sur une extension de la notion d'équation différentielle, C.R.A.S. de Paris 199 (1934).
- [2] S. K. Zaremba, Sur les équations au paratingent, Bull. Sci. Math. 60 (1936) 139–160.

- [3] A. Marchaud, Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs intégrales, *Compositio Math.* 3 (1936) 89–127.
- [4] T. Ważewski, Systemes de commande et équations au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961) 151–155.
- [5] J. -P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions: Set Valued Maps and Viability Theory*, Springer, Berlin, 1984.
- [6] J. -P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [7] C. Castaing, M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer, Berlin, 1977.
- [8] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [9] S. Djebali, L. Górniewicz, A. Ouahab, *Solution Sets for Differential Equations and Inclusions*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2013.
- [10] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [11] A. Fryszkowski, *Fixed Point Theory for Decomposable Sets*, Kluwer, Dordrecht, 2004.
- [12] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Vol. I: Theory*, Kluwer, Boston, 1997.
- [13] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Vol. II: Applications*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [14] M. Kisielewicz, *Differential Inclusions and Optimal Control*, Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [15] A. A. Tolstonogov, *Differential Inclusions in a Banach Space*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [16] G. Bartuzel, A. Fryszkowski, Filippov lemma for certain second order differential inclusions, *Cent. Eur. J. Math.* 10 (2012) 1944–1952.
- [17] M. Cichoń, Differential inclusions and abstract control problems, *Bull. Austral. Math. Soc.* 53 (1996) 109–122.
- [18] Z. Denkowski, S. Migórski, S. Mortola, Differential inclusions and minimizing movements, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* 20 (1996) 35–64.
- [19] A. Fryszkowski, Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps, *Studia Math.* 76 (1983) 163–174.
- [20] A. Fryszkowski, Existence of solutions of functional-differential inclusion in nonconvex case, *Ann. Polon. Math.* 45 (1985) 121–124.
- [21] A. Fryszkowski, L. Górniewicz, Mixed semicontinuous mappings and their applications to differential inclusions, *Set-Valued Anal.* 8 (2000) 203–217.
- [22] A. Fryszkowski, T. Rzeżuchowski, Continuous version of Filippov-Ważewski relaxation theorem, *J. Differential Equations*, 94 (1991) 254–265.
- [23] A. Fryszkowski, T. Rzeżuchowski, Pointwise estimates for retractions on the solution set to Lipschitz differential inclusions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 139 (2011) 597–608.

- [24] G. Gabor, Continuous selection of the solution map for one-sided Lipschitz differential inclusions, *Nonlinear Anal.* 66 (2007) 1185–1197.
- [25] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, Strongly nonlinear multivalued boundary value problems, *Nonlinear Anal.* 52 (2003) 1219–1238.
- [26] L. Górniewicz, On the solution sets of differential inclusions, *J. Math. Anal. Appl.* 113 (1986) 235–244.
- [27] L. Górniewicz, S. Plaskacz, Periodic solutions of differential inclusions in $\mathbf{R}^n$, *Boll. Un. Mat. Ital. A* 7 (1993) 409–420.
- [28] L. Górniewicz, M. Ślosarski, Topological essentiality and differential inclusions, *Bull. Austral. Math. Soc.* 45 (1992) 177–193.
- [29] W. Kryszewski, Topological structure of solution sets of differential inclusions: the constrained case, *Abstr. Appl. Anal.* 6 (2003) 325–351.
- [30] A. Lasota, C. Olech, On the closedness of the set of trajectories of a control system, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 14 (1966) 615–621.
- [31] A. Lasota, Z. Opial, Fixed-point theorems for multi-valued mappings and optimal control problems, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 16 (1968) 645–649.
- [32] S. Migórski, On an existence result for nonlinear evolution inclusions, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 39 (1996) 133–141.
- [33] T. Rzeżuchowski, Continuous parametrization of attainable sets by solutions of differential inclusions, *Set-Valued Anal.* 7 (1999) 347–355.
- [34] T. Rzeżuchowski, Boundary solutions of differential inclusions and recovering the initial data, *Set-Valued Anal.* 5 (1997) 181–193.
- [35] T. Rzeżuchowski, Scorza-Dragoni type theorem for upper semicontinuous multivalued functions, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.* 28 (1980) 61–66.
- [36] J. Zabczyk, Bellman's inclusions and excessive measures, *Probab. Math. Statist.* 21 (2001) 101–122.
- [37] F. S. De Blasi, F. Iervolino, Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso, *Boll. Unione Mat. Ital.* 4 (1969) 491–501.
- [38] M. Hukuhara, Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, *Funkcial. Ekvac.* 10 (1967) 205–223.
- [39] R. J. Aumann, Integrals of set-valued functions, *J. Math. Anal. Appl.* 12 (1965) 1–12.
- [40] V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of Set Differential Equations in a Metric Space*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006.
- [41] J. -P. Aubin, Fuzzy differential inclusions, *Problems Control Inform. Theory* 19 (1990) 55–67.
- [42] P. A. Antonelli, V. Krivan, Fuzzy differential inclusions as substitutes for stochastic differential equations in population biology, *Open Syst. Inform. Dynam.* 1 (1992) 217–232.
- [43] G. Colombo, V. Krivan, Fuzzy differential inclusions and nonprobabilistic likelihood, *Dynam. Systems Appl.* 1 (1992) 419–440.

- [44] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 24 (1987) 301–317.
- [45] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets, Information and Control* 8 (1965) 338–353.
- [46] L. A. Zadeh, From computing with numbers to computing with words – From manipulation of measurements to manipulation of perceptions, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 12 (2002) 307–324.
- [47] L. C. Barros, R. C. Bassanezi, P. A. Tonelli, Fuzzy modelling in population dynamics, *Ecological Modelling* 128 (2000) 27–33.
- [48] P. Diamond, P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific, New Jersey, 1994.
- [49] V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra, *Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions*, Taylor & Francis, London, 2003.
- [50] E. Hüllermeier, An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems* 5 (1997) 117–137.
- [51] R. P. Agarwal, V. Lakshmikantham, J. J. Nieto, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, *Nonlinear Anal.* 72 (2010) 2859–2862.
- [52] R. P. Agarwal, D. O'Regan, V. Lakshmikantham, A stacking theorem approach for fuzzy differential equations, *Nonlinear Anal.* 55 (2003) 299–312.
- [53] R. P. Agarwal, D. O'Regan, V. Lakshmikantham, Viability theory and fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 151 (2005) 563–580.
- [54] L. C. Barros, L. T. Gomes, P. A. Tonelli, Fuzzy differential equations: An approach via fuzzification of the derivative operator, *Fuzzy Sets Syst.* 230 (2013) 39–52.
- [55] B. Bede, S. G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 151 (2005) 581–599.
- [56] A. M. Bertone, R. M. Jafelice, L. C. Barros, R. C. Bassanezi, On fuzzy solutions for partial differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 219 (2013) 68–80.
- [57] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, Some remarks on fuzzy differential equations via differential inclusions, *Fuzzy Sets Syst.* 230 (2013) 3–20.
- [58] P. Diamond, Brief note on the variation of constants formula for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 129 (2002) 65–71.
- [59] A. Khastan, J. J. Nieto, R. Rodríguez-López, Periodic boundary value problems for first-order linear differential equations with uncertainty under generalized differentiability, *Inform. Sci.* 222 (2013) 544–558.
- [60] P. E. Kloeden, Remarks on Peano-like theorems for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 44 (1991) 161–163.
- [61] W. Kosiński, K. Frischmuth, D. Wilczyńska-Sztyma, A new fuzzy approach to ordinary differential equations, w: *Proc. Int. Confer. Artificial Intellig. Soft Comput., LNCS*, vol. 6113–6114, 2010, Springer, Berlin, pp. 120–127.
- [62] V. Lakshmikantham, Uncertain systems and fuzzy differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 251 (2000) 805–817.

- [63] V. Lakshmikantham, A. A. Tolstonogov, Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations, *Nonlinear Anal.* 55 (2003) 255–268.
- [64] J. J. Nieto, The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 102 (1999) 259–262.
- [65] J. J. Nieto, R. Rodríguez-López, Some results on boundary value problems for fuzzy differential equations with functional dependence, *Fuzzy Sets Syst.* 230 (2013) 92–118.
- [66] S. Pederson, M. Sambandham, Numerical solution of hybrid fuzzy differential equation IVPs by a characterization theorem, *Inform. Sci.* 179 (2009) 319–328.
- [67] T. Rzeżuchowski, J. Wąsowski, Differential equations with fuzzy parameters via differential inclusions, *J. Math. Anal. Appl.* 255 (2001) 177–194.
- [68] A. T. Bharucha-Reid, *Random Integral Equations*, Acad. Press, New York, 1972.
- [69] C. P. Tsokos, W. J. Padgett, *Random Integral Equations with Applications to Life Science and Engineering*, Acad. Press, New York, 1974.
- [70] I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1972.
- [71] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer, Berlin, 2003.
- [72] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [73] G. Da Prato, M. Iannelli, L. Tubaro, Dissipative functions and finite dimensional stochastic differential equations, *J. Math. Pures Appl.* 57 (1978) 173–180.
- [74] P. Krée, Diffusion equation for multivalued stochastic differential equations, *J. Funct. Anal.* 49 (1982) 73–90.
- [75] L. Tubaro, On abstract stochastic differential equation in Hilbert space with dissipative drift, *Stoch. Anal. Appl.* 1 (1983) 205–214.
- [76] C. Tudor, On a stochastic evolution equation, *J. Math. Anal. Appl.* 122 (1987) 360–379.
- [77] E. Cépa, Équations différentielles stochastiques multivoques, *Lecture Notes in Math.* 1613 (1995) 86–107.
- [78] R. Pettersson, Yosida approximations for multivalued stochastic differential equations, *Stochastics Stoch. Reports* 52 (1995) 107–120.
- [79] R. Pettersson, Existence theorem and Wong Zakai approximations for multivalued stochastic differential equations, *Probab. Math. Statist.* 17 (1997) 29–45.
- [80] N. S. Papageorgiou, Random differential inclusions in Banach spaces, *J. Diff. Equ.* 65 (1986) 287–303.
- [81] F. S. De Blasi, J. Myjak, Random differential inclusions with nonconvex right hand side, *Funkcial. Ekvac.* 30 (1987) 1–8.
- [82] L. E. Rybiński, Random fixed points and viable random solutions of functional-differential inclusions, *J. Math. Anal. Appl.* 142 (1989) 53–61.
- [83] D. A. Kandilakis, N. S. Papageorgiou, On the existence of solutions for random differential inclusions in a Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* 126 (1989) 11–23.

- [84] A. Nowak, Random differential inclusions: measurable selection approach, *Ann. Polon. Math.* 49 (1989) 291–296.
- [85] M. Michta, On weak solutions of random differential inclusions, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 8 (1995) 393–396.
- [86] J. Andres, L. Górniewicz, Random topological degree and random differential inclusions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 40 (2012) 337–358.
- [87] M. Kisielewicz, Properties of solution set of stochastic inclusions, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 6 (1993) 217–236.
- [88] G. Da Prato, H. Frankowska, A stochastic Filippov theorem, *Stoch. Anal. Appl.* 12 (1994) 409–426.
- [89] N. U. Ahmed, Nonlinear stochastic differential inclusions on Banach space, *Stoch. Anal. Appl.* 12 (1994) 1–10.
- [90] J. Motyl, Note on strong solutions of a stochastic inclusion, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 8 (1995) 291–297.
- [91] J. -P. Aubin, G. Da Prato, The viability theorem for stochastic differential inclusions, *Stoch. Anal. Appl.* 16 (1998) 1–15.
- [92] M. Michta, Optimal solutions to stochastic differential inclusions, *Applicat. Math.* 29 (2002) 387–398.
- [93] N. U. Ahmed, J. Zabczyk, Partially observed optimal controls for nonlinear infinite-dimensional stochastic systems, *Dynam. Systems Appl.* 5 (1996) 521–538.
- [94] G. Mazziotto, L. Stettner, J. Szpirglas, J. Zabczyk, On impulse control with partial observation, *SIAM J. Control Optim.* 26 (1988) 964–984.
- [95] L. Stettner, On the existence of an optimal per unit time control for a degenerate diffusion model, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 34 (1986) 749–769.
- [96] L. Stettner, Problems of mathematical finance by stochastic control methods, *System modeling and optimization*, 129143, IFIP Adv. Inf. Commun. Technol., 312, Springer, Berlin, 2009.
- [97] J. Zabczyk, Exit problem and control theory, *Systems Control Lett.* 6 (1985) 165–172.
- [98] J. Zabczyk, Some interplays between control theory and stochastic systems, *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 13 (Tampa, FL, 1989), 229–231, IEEE, New York, 1989.
- [99] J. Zabczyk, *Mathematical Control theory: an introduction. Systems & Control: Foundations & Applications*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [100] J. Zabczyk, *Chance and Decision. Stochastic Control in Discrete Time*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1996.
- [101] P. Balasubramaniam, S. K. Ntouyas, Controllability for neutral stochastic functional differential inclusions with infinite delay in abstract space, *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006) 161–176.
- [102] A. Jakubowski, M. Kamenskii, P. Raynaud de Fitte, Existence of weak solutions to stochastic evolution inclusions, *Stoch. Anal. Appl.* 23 (2005) 723–749.

- [103] A. Jakubowski, M. Kamenskiĭ, P. Raynaud de Fitte, Existence of weak solutions to stochastic evolution inclusions, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 340 (2005) 229–234.
- [104] M. Kisielewicz, Stochastic differential inclusions and diffusion process, *J. Math. Anal. Appl.* 334 (2007) 1039–1054.
- [105] M. Kisielewicz, Stochastic representation of partial differential inclusions, *J. Math. Anal. Appl.* 353 (2009) 592–606.
- [106] A. Lin, L. Hu, Existence results for impulsive neutral stochastic functional integro-differential inclusions with nonlocal initial conditions, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010) 64–73.
- [107] M. Michta, The upper and lower solutions method for stochastic inclusions with discontinuous multivalued mappings, *Stoch. Anal. Appl.* 26 (2008) 1181–1200.
- [108] M. Michta, J. Motyl, Set Valued Stratonovich Integral and Stratonovich Type Stochastic Inclusion, *Dynam. Systems Appl.* 16 (2007) 141–154.
- [109] M. Michta, J. Motyl, Martingale problem to Stratonovich stochastic inclusion, *Nonlinear Anal.* 71 (2009) 1307–1311.
- [110] J. Motyl, Existence of solutions of functional stochastic inclusion, *Dynam. Systems Appl.* 21 (2012) 331–338.
- [111] J. Motyl, Stochastic Itô inclusion with upper separated multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.* 400 (2013) 505–509.
- [112] J. Ren, S. Xu, A transfer principle for multivalued stochastic differential equations, *J. Funct. Anal.* 256 (2009) 2780–2814.
- [113] Y. Ren, L. Hu, R. Sakthivel, Controllability of impulsive neutral stochastic functional differential inclusions with infinite delay, *J. Comput. Appl. Math.* 235 (2011) 2603–2614.
- [114] J. Wu, Uniform large deviations for multivalued stochastic differential equations with Poisson jumps, *Kyoto J. Math.* 51 (2011) 535–559.
- [115] J. Wu, On Wiener–Poisson type multivalued stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.* 29 (2013) 675–690.
- [116] X. Zhang, Skorohod problem and multivalued stochastic evolution equations in Banach spaces, *Bull. Sci. Math.* 131 (2007) 175–217.
- [117] M. Kisielewicz, *Stochastic Differential Inclusions and Applications*, Springer, New York, 2013.
- [118] B. K. Kim, J. H. Kim, Stochastic integrals of set-valued processes and fuzzy processes, *J. Math. Anal. Appl.* 236 (1999) 480–502.
- [119] M. Kisielewicz, Some properties of set-valued stochastic integrals, *J. Math. Anal. Appl.* 388 (2012) 984–995.
- [120] E. J. Jung, J. H. Kim, On set-valued stochastic integrals, *Stoch. Anal. Appl.* 21 (2003) 401–418.
- [121] J. Zhang, S. Li, I. Mitoma, Y. Okazaki, On the solutions of set-valued stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces, *Tohoku Math. J.* 61 (2009) 417–440.

- [122] J. Zhang, Set-valued stochastic integrals with respect to a real valued martingale, In: *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision* (D. Dubois et al., Eds.), ASC 48, Springer, Berlin, 2008, pp. 253–259.
- [123] J. H. Kim, On fuzzy stochastic differential equations, *J. Korean Math. Soc.* 42 (2005) 153–169.
- [124] S. Li, A. Ren, Representation theorems, set-valued and fuzzy set-valued Itô integral, *Fuzzy Sets Syst.* 158 (2007) 949–962.
- [125] Y. Feng, Fuzzy stochastic differential systems, *Fuzzy Sets Syst.* 115 (2000) 351–363.
- [126] W. Fei, Existence and uniqueness of solution for fuzzy random differential equations with non-Lipschitz coefficients, *Information Sci.* 177 (2007) 4329–4337.
- [127] M. Michta, On set-valued stochastic integrals and fuzzy stochastic equations, *Fuzzy Sets Syst.* 17 (2011) 1–19.
- [128] B. Sprungk, K. G. van den Boogaart, Stochastic differential equations with fuzzy drift and diffusion, *Fuzzy Sets Syst.* 230 (2013) 53–64.
- [129] A. Colubi, J. S. Domínguez-Menchero, M. López-Díaz, D. A. Ralescu, A $D_E[0, 1]$ representation of random upper semicontinuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002) 3237–3242.
- [130] M. L. Puri, D. A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.* 91 (1983) 552–558.
- [131] M. Michta, Set-valued random differential equations in Banach space, *Discuss. Math. Differ. Incl.* 15 (1995) 191–200.
- [132] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham, *Random Differential Inequalities*, Acad. Press, New York, 1980.
- [133] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Vol. I, Acad. Press, New York, 1969.
- [134] J. Y. Park, J. U. Jeong, On random fuzzy functional differential equations, *Fuzzy Sets Syst.* 223 (2013) 89–99.
- [135] H. Vu, L. S. Dong, Random set-valued functional differential equations with the second type Hukuhara derivative, *Differ. Equ. Appl.* 5 (2013) 501–518.
- [136] H. Vu, L. S. Dong, N. V. Hoa, Random fuzzy functional integro-differential equations under generalized Hukuhara differentiability, *J. Intellig. Fuzzy Syst.* (2014) DOI: 10.3233/IFS-131116.
- [137] H. Vu, N. V. Hoa, N. D. Phu, The local existence of solutions for random fuzzy integro-differential equations under generalized H-differentiability, *J. Intellig. Fuzzy Syst.* (2013) DOI: 103233/IFS-130940.
- [138] J. Li, S. Li, Y. Ogura, Strong solutions of Itô type set-valued stochastic differential equation, *Acta Math. Sinica Engl. Ser.* 26 (2010) 1739–1748.
- [139] J. Zhang, S. Li, I. Mitoma, Y. Okazaki, On the solutions of set-valued stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces, *Tohoku Math. J.* 4 (2010) 215–237.

- [140] I. Mitoma, Y. Okazaki, J. Zhang, Set-valued stochastic differential equation in M-type 2 Banach space, *Comm. Stoch. Anal.* 4 (2010) 215–237.
- [141] W. Fei, Existence and uniqueness for solutions to fuzzy stochastic differential equations driven by local martingales under the non-Lipschitzian condition, *Nonlinear Anal.* 76 (2013) 202–214.
- [142] W. Fei, H. Liu, W. Zhang, On solutions to fuzzy stochastic equations with local martingales, *Systems Control Lett.* 65 (2014) 96–105.
- [143] W. Fei, D. He, H. Liu, Non-explosion of solutions to fuzzy stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, *Proc. Int. Conf. Inform. Sci. Technol. Appl.* (2013), 55–59.
- [144] T. T. Tung, On the fuzzy control stochastic differential systems, *Control Cybernet.* 42 (2013) 505–525.
- [145] W. Fei, D. Xia, On solutions to stochastic set differential equations of Itô type under the non-Lipschitzian condition, *Dynamic Systems Appl.* 22 (2013) 137–156.
- [146] W. Fei, Y. Liang, Stochastic set differential equations driven by local martingales under the non-Lipschitzian condition, *Acta Math. Sinica Chinese Ser.* 56 (2013) 561–574.
- [147] K. Itô, On stochastic differential equations, *Mem. Amer. Math. Soc.* 4 (1951), 51 pp.
- [148] D. R. Bell, S. E. A. Mohammed, On the solution of stochastic ordinary differential equations via small delays, *Stoch. Stoch. Rep.* 29 (1989) 293–299.
- [149] G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 4 (1955) 48–90.
- [150] P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.
- [151] L. Słomiński, Stability of strong solutions of stochastic differential equations, *Stochastic Process. Appl.* 31 (1989) 173–202.
- [152] L. Słomiński, On existence, uniqueness and stability of solutions of multidimensional SDEs with reflecting boundary conditions, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 29 (1993) 163–198.
- [153] L. Słomiński, Stability of stochastic differential equations driven by general semimartingales, *Dissertationes Math.* 349 (1996) 1–109.

Marek T. Malinowski