

dr Małgorzata Migda
Instytut Matematyki
Wydział Elektryczny
Politechnika Poznańska

Poznań, 28.04.2012 r.

Autoreferat

I. Imię i nazwisko

Małgorzata Migda (z domu Ochendowska)

II. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

Stopień magistra:

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, 1978 r.

Kierunek: Matematyka

Specjalność: Matematyka teoretyczna

dyplom z wyróżnieniem

Stopień doktora nauk matematycznych:

Politechnika Poznańska, Instytut Matematyki, 1990 r.

Tytuł rozprawy doktorskiej: *Asymptotyczne własności rozwiązań równań różnicowych wyższych rzędów*

III. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

Miejsce pracy: Politechnika Poznańska

asystent stażysta : 1.03.1978 - 28.02.1979

asystent : 1.03.1979 - 30.09.1991

adiunkt : 1.10.1991 - do chwili obecnej

W latach 1980, 1982 -1985 oraz 1989-1991 - urlopy macierzyńskie i wychowawcze

IV. Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art.16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki

Osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art.16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi cykl 9 prac

WŁASNOŚCI ASYMPTOTYCZNE I OSCYLACYJNOŚĆ ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

w skład którego wchodzi następujące publikacje ¹:

- [H1] M. Migda, J. Migda, *On the asymptotic behavior of solutions of higher order nonlinear difference equations*, Nonlinear Anal. 47 (2001), 4687–4695 (IF 1.279).
- [H2] M. Migda, *Oscillation and nonoscillation results for higher order nonlinear difference equations*, Differences and differential equations, 285–294, Fields Institute Communications 42 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [H3] M. Migda, E. Schmeidel, *Asymptotic properties of fourth-order nonlinear difference equations*, Math. Comput. Modelling 39 (2004), 1203-1213 (IF 1.066).
- [H4] M. Migda, J. Migda, *Asymptotic properties of solutions of a class of second order neutral difference equations*, Nonlinear Anal. 63 (2005), e789–e799 (IF 1.279).
- [H5] M. Migda, *On unstable neutral difference equations*, Indian J. Pure Appl. Math. 36(10) (2005), 557–567 (IF 0.254).
- [H6] M. Migda, J. Migda, *Oscillatory and Asymptotic Properties of Solutions of Even Order Neutral Difference Equations*, J. Difference Equ. Appl. 15 (11-12) (2009), 1077–1084 (IF 0.951).
- [H7] A. Andruch-Sobiło, M. Migda, *On the rational recursive sequence $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{b+cx_nx_{n-1}}$* , Tatra Mt. Math. Publ. 43 (2009), 1–9.
- [H8] M. Migda, *Oscillation criteria for higher order neutral difference equations with oscillating coefficient*, Fasc. Math. No. 44 (2010), 85–93.
- [H9] J. Morchało, M. Migda, *Boundedness of solutions of difference systems with delays*, Comput. Math. Appl. (2012), doi:10.1016/j.camwa.2012 (IF 1.472).

¹dla publikacji w czasopiśmie znajdujących się w bazie JCR z powodu niedostępności dla roku 2011 impact factor podany został za rok 2010

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Podstawowe definicje i oznaczenia	6
3	Omówienie głównych wyników jednotematycznego cyklu publikacji	8
3.1	Istnienie rozwiązań asymptotycznie wielomianowych	8
3.2	Istnienie rozwiązania asymptotycznie minimalnego i maksymalnego	9
3.3	Rozwiązania, których asymptotyczny przebieg jest określonego typu	11
3.4	Oscylacyjność rozwiązań	12
3.5	Ograniczoność rozwiązań	16
4	Pozostałe osiągnięcia naukowo - badawcze	18
4.1	Omówienie wyników pozostałych prac naukowych	18
4.2	Udział w konferencjach międzynarodowych i krajowych	23
4.3	Recenzje artykułów naukowych	25
4.4	Sumaryczny Impact Factor, liczba cytowań i indeks Hirscha	26
4.5	Udział w projektach badawczych	26
5	Literatura	27

1 Wstęp

Równania różnicowe (rekurencyjne), podobnie jak równania różniczkowe, pojawiają się w wielu działach matematyki, a także w innych dyscyplinach naukowych. Są bowiem bardzo dobrym narzędziem do badania wielu zjawisk fizycznych, technicznych, biologicznych czy ekonomicznych. Bardzo ważnym ich wykorzystaniem jest zastosowanie w metodach numerycznych do przybliżonego rozwiązywania różnych typów równań różniczkowych, a także równań i układów równań skalarnych. Teoria równań różnicowych doczekała się w ostatnich latach wielu opracowań monograficznych, np. V. Lakshmikanthama i D. Trigiante (1988), [30], R. P. Agarwala (1992, 2000), [1], V. L. Kocica i G. Ladasa, (1993) [26], R. P. Agarwala, S. R. Grace'a i D. O'Regana (2000), [5] czy R. P. Agarwala, M. Bohnera, S. R. Grace'a i D. O'Regana (2005), [2]. Warto zauważyć, że własności rozwiązań równania różniczkowego zwyczajnego i jego dyskretnego odpowiednika mogą być zupełnie różne. Np. dobrze znany jest fakt, że każde rozwiązanie równania logistycznego

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$$

jest monotoniczne. Natomiast jego dyskretny odpowiednik

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n),$$

wprowadzony przez R. M. Maya [34] w 1976 roku, ma także rozwiązania okresowe, a w przypadku $a = 4$ rozwiązanie chaotyczne.

Równania rekurencyjne, przy danych warunkach początkowych posiadają jednoznacznie określone rozwiązanie. Rozwiązania w postaci analitycznej znane są jednak tylko dla niektórych typów równań różnicowych. Dla wielu nie jesteśmy w stanie ich wskazać. Wówczas ważne jest zbadanie własności tych rozwiązań bez wykorzystywania ich analitycznej postaci czy numerycznych przybliżeń. Takimi zagadnieniami zajmuje się tzw. jakościowa teoria równań różnicowych. W jej skład wchodzi m.in. badanie takich zagadnień jak własności asymptotyczne rozwiązań, ich oscylacyjność, ograniczoność czy stabilność. Wyniki uzyskane w prezentowanym cyklu publikacji wchodzi w zakres tej teorii. Obejmują one następujące zagadnienia:

- (1) Istnienie rozwiązań asymptotycznie wielomianowych (prace [H1], [H2]).
- (2) Istnienie rozwiązania asymptotycznie "minimalnego" i "maksymalnego" (praca [H3]).
- (3) Rozwiązania, których asymptotyczny przebieg jest określonego typu (praca [H4]).
- (4) Oscylacyjność rozwiązań (prace [H2], [H5], [H6] i [H8]).
- (5) Ograniczoność rozwiązań (prace [H6], [H7], [H9]).

Zagadnienia te rozważane są dla wybranych klas równań różnicowych liniowych (prace [H5], [H6], [H9]) i nieliniowych (prace [H1] - [H4], [H7] - [H9]). W niektórych równaniach występują quasiróżnice (prace [H2], [H3]). Badane są także równania typu neutralnego (prace [H4], [H5], [H6], [H8]) oraz równanie wymierne (praca [H7]).

Początki jakościowej teorii równań różnicowych wiąże się z nazwiskami takich matematyków jak H. Poincaré i O. Perron. W 1885 roku H. Poincaré opublikował fundamentalną pracę [42], w której badał liniowe równanie różnicowe o zmiennych współczynnikach postaci

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = 0, \quad (1)$$

gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią, $p_i : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, k$. Równanie (1) nazywane jest równaniem typu Poincaré, jeżeli istnieją granice $q_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_i(n)$ dla $i = 1, \dots, k$. Przy tym założeniu, równanie (1) może być traktowane jako perturbacja równania o stałych współczynnikach

$$x(n+k) + q_1x(n+k-1) + \dots + q_kx(n) = 0. \quad (2)$$

Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ będą pierwiastkami wielomianu charakterystycznego równania (2). H. Poincaré udowodnił, że jeśli $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ dla $i \neq j$, to rozwiązanie x równania (1) albo równe jest zeru dla dostatecznie dużych n , albo istnieje indeks $i \in \{1, \dots, k\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \lambda_i$. W 1909 roku O. Perron [40] poprawił znacząco ten rezultat. Wykazał on, że przy dodatkowym założeniu $p_k(n) \neq 0$ równanie (1) ma układ fundamentalny rozwiązań $x_1, \dots, x_k$ takich, że dla każdego $i = 1, \dots, k$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_i(n+1)}{x_i(n)} = \lambda_i$. Później, w 1921 O. Perron [41] udowodnił inną własność asymptotyczną rozwiązań równania (1), bez ograniczeń na pierwiastki równania charakterystycznego równania (2). Mianowicie wykazał, że jeżeli równanie (1) jest typu Poincaré i spełniony jest warunek $p_k(n) \neq 0$, to takie równanie ma układ fundamentalny rozwiązań $x_1, \dots, x_k$ spełniających dla każdego $i = 1, \dots, k$ warunek $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_i(n)|} = |\lambda_i|$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ są (niekoniecznie różnymi) pierwiastkami wielomianu charakterystycznego równania (2).

W literaturze dotyczącej równań różnicowych spotykamy dwa pojęcia asymptotycznej równoważności ciągów, addytywną i multiplikatywną. Mówimy, że ciągi (x_n) i (y_n) są addytywnie asymptotycznie równoważne, jeżeli $x_n - y_n = o(1)$ oraz, że są multiplikatywnie asymptotycznie równoważne, gdy $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow c$ (tzn. $x_n = cy_n + o(y_n)$), gdzie c jest stałą dodatnią. Jeżeli ciągi (x_n) i (y_n) są multiplikatywnie asymptotycznie równoważne i ciąg (y_n) jest „szybko” zbieżny do zera, to o ciągu (x_n) mamy więcej informacji niż w przypadku równoważności addytywnej. Jeśli natomiast ciąg (y_n) jest „duży”, to addytywna równoważność dostarcza więcej informacji o ciągu (x_n) . Rozwiązanie równania różnicowego addytywnie asymptotycznie równoważne z ciągiem wielomianowym nazywamy rozwiązaniem asymptotycznie wielomianowym.

Jedną z pierwszych prac, w której badana była asymptotyczna wielomianowość rozwiązań równań różnicowych jest praca J. Popeny i J. Werbowskiego [43] z 1980 roku. Korzystając z dyskretnej nierówności Bihariego, autorzy znaleźli warunki dostateczne, przy których każde rozwiązanie nieliniowego równania różnicowego rzędu drugiego jest asymptotycznie liniowe. Badanie istnienia rozwiązań multiplikatywnie asymptotycznie równoważnych danej funkcji zapoczątkowane zostało przez S. S. Chenga w 1984 roku ([13]). Podał on warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązania liniowego równania różnicowego czwartego rzędu asymptotycznie równoważnego z funkcją (n^3) . Zagadnieniami tymi, zajmowali się później, m.in., J. Popena [44], [45], J. Yan, B. Liu [61], J. R. Greaf i E. Thandapani [23], E. Schmeidel i B. Szmanda [47], E. Thandapani i M. Arockiasamy [59], A. Gleska i J. Werbowski [21], J. Migda [37], [38].

Jednym z ważnych zagadnień jakościowej teorii równań różnicowych jest badanie istnienia rozwiązań asymptotycznie stałych (tzn. zbieżnych). W 1987 roku, A. Drozdowicz i J. Popenda ([18]) podali warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązania asymptotycznie stałego równania różnicowego nieliniowego rzędu drugiego. W pracy [19] wynik ten uogólnili na równanie różnicowe dowolnego rzędu. Badania te kontynuowane były w pracach B. G. Zhang, S. S. Cheng [67], J. R. Greaf, E. Thandapani [23], J. Migda [36], J. Popenda, E. Schmeidel [46], E. Thandapani, M. Arockiasamy [59], również dla równań z quasiróżnicami i odchylonymi argumentami.

Ważną klasę równań różnicowych szeroko badanych w literaturze stanowią równania różnicowe typu neutralnego. Badanie asymptotycznych własności rozwiązań równań różnicowych typu neutralnego jest istotne z uwagi na ich wiele ważnych zastosowań. Np. liniowe równania różnicowe typu neutralnego z opóźnieniem pojawiają się w modelach populacyjnych w biologii, w modelach pajęczynowych w ekonomii czy w badaniu rozdzielczych sieci elektroenergetycznych zawierających bezstratne linie transmisyjne. Wyniki dotyczące własności rozwiązań tych równań znaleźć można np. w pracach R. P. Agarwala i S. R. Grace [4], Y. Bolata, O. Akin i H. Yildirim [9], X. H. Tanga, J. S. Yu, P. H. Penga [55], Y. Zhou [68] czy Y. Zhou i B. G. Zhanga [70]. Równanie różnicowe pierwszego rzędu typu neutralnego

$$\Delta(x(n) + px(n - k)) + q(n)x(n - l) = 0$$

było rozważane po raz pierwszy w 1967 roku przez R. K. Braytona i R. A. Willoughby'ego [10] z punktu widzenia numerycznego. Systematyczny rozwój teorii oscylacyjności równań typu neutralnego został zapoczątkowany przez G. Ladasa i Y. G. Sficas ([28], [29]). Teoria oscylacyjności równań różnicowych wyższych rzędów rozwinęła się gwałtownie w ostatnich latach. Problemem znalezienia warunków dostatecznych oscylacyjności wszystkich, bądź wszystkich ograniczonych, rozwiązań równań różnicowych typu neutralnego zajmowało się wielu autorów, m.in. R. P. Agarwal, S. R. Grace, B. S. Lalli, B. Szmanda, A. Zafer, B. G. Zhang, Y. Zhou ([6], [31], [52], [53], [64], [65], [71]).

Ważną klasą równań różnicowych są także równania różnicowe wymierne. Znajdują one liczne zastosowania m. in. w modelowaniu w biologii. Zestawienie badań dotyczących ograniczoności, stabilności i okresowości rozwiązań równań różnicowych wymiernych rzędu drugiego i trzeciego znaleźć można odpowiednio w monografiach M. R. S. Kulenovica i G. Ladasa [27] oraz E. Camouzis i G. E. Ladasa [11].

W przedstawionym powyżej zarysie historycznym własności asymptotycznych rozwiązań równań różnicowych nie uwzględniono prac autorki autoreferatu, ponieważ będą one omówione w dalszej części opracowania.

2 Podstawowe definicje i oznaczenia

Podamy teraz podstawowe pojęcia i oznaczenia, które wielokrotnie występują w niżej omawianych pracach. Inne pojęcia będą definiowane na bieżąco. Tradycyjnie litery $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ odpowiednio oznaczają zbiory liczb naturalnych, rzeczywistych i zespolonych. Niech $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Operator różnicy Δ określamy wzorem

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n).$$

Ponadto

$$\Delta^m x(n) = \Delta(\Delta^{m-1} x(n)), \quad m = 2, 3, \dots$$

Niech r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) będą danymi ciągami liczb rzeczywistych dodatnich. Dla dowolnego ciągu x wprowadźmy oznaczenia:

$$L_0 x(n) = x(n), \quad L_i x(n) = r_i(n) \Delta L_{i-1} x(n), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ciągi $L_i x$ ($i = 0, 1, \dots, m$) nazywamy quasiróżnicami ciągu x .

Równaniem różnicowym rzędu m nazywane jest równanie postaci

$$G(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^m x(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $G : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją, $m \in \mathbb{N}$. Równanie to jest równoważne równaniu postaci $F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+m)) = 0$. Przez analogię do równań różniczkowych, równanie postaci

$$\Delta^m (x(n) + p(n)x(n-\tau)) = f(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $m \geq 1$, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją, τ liczbą całkowitą dodatnią, $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, nazywane jest równaniem różnicowym typu neutralnego.

W prezentowanym cyklu publikacji rozpatrywane są także równania z odchylnym argumentem

$$\Delta^m x(n) = f(n, x(\sigma(n))), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $m \geq 1$, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \infty$. Równanie powyższej postaci nazywamy równaniem z opóźnionym (wyprzedzonym) argumentem, jeżeli ciąg σ spełnia nierówność $\sigma(n) \leq n$ ($\sigma(n) \geq n$) dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Nazwy te używane są tradycyjnie, przez analogię do odpowiednich równań różniczkowych, mimo iż formalnie nie są zgodne z podaną definicją równania różnicowego rzędu m . Warto tu zaznaczyć, że w teorii równań różnicowych wprowadzenie odchylnych argumentów, w przeciwieństwie do równań różniczkowych, zmienia rząd równania.

W literaturze dotyczącej równań różnicowych występują dwie definicje rozwiązania równania różnicowego. Rozwiązaniem równania różnicowego nazywamy każdy ciąg (x_n) spełniający to równanie dla wszystkich $n = 1, 2, \dots$, albo ogólniejsza, jako rozwiązanie rozumiemy ciąg (x_n) spełniający dane równanie dla wszystkich dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$. W omawianych pracach używane są obydwie definicje. Rozwiązanie równania różnicowego nazywamy oscylującym, jeżeli dla dowolnego $n_0 \in \mathbb{N}$ istnieje $n \geq n_0$ takie, że $x(n)x(n+1) \leq 0$. W przeciwnym przypadku rozwiązanie nazywamy nieoscylującym.

Mając na względzie czytelność zapisu (unikanie piętrowych indeksów lub wielokrotnych nawiasów) stosować będziemy obie standardowe konwencje oznaczania n -tego wyrazu ciągu x : $x(n)$ lub x_n . Dla $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ potęgę ubywającą oznaczamy $n^{\underline{k}} = n(n-1)\dots(n-k+1)$, $n^{\underline{0}} = 1$.

3 Omówienie głównych wyników jednotematycznego cyklu publikacji

Wyróżnionym osiągnięciem, które stanowi podstawę do wszczęcia przewodu habilitacyjnego jest cykl 9 prac. Celem prac było zbadanie własności rozwiązań wybranych klas równań różnicowych. Badana jest głównie: zbieżność, asymptotyczna wielomianowość, oscylacyjność i ograniczoność rozwiązań. Poniżej omówione zostały wyniki uzyskane w pracach stanowiących wyróżniony cykl publikacji. Dla uniknięcia nieporozumień przy odwołaniach przyjęto zasadę, że prace zawarte w wyróżnionym cyklu publikacji objęte zostały numeracją z literą H, prace tworzące pozostały dorobek - numeracją z literą a lub b, a cytowana literatura - numeracją arabską.

3.1 Istnienie rozwiązań asymptotycznie wielomianowych

Jak wspomniano we wstępie, jednym z ważnych zagadnień rozważanych w ramach jakościowej teorii równań różnicowych jest problem istnienia rozwiązań asymptotycznie wielomianowych, a w szczególności rozwiązań zbieżnych badanego równania. Problem ten rozważano w pracach [H1] i [H2]. W poniższym twierdzeniu podane są warunki dostateczne, przy których dla dowolnej stałej rzeczywistej istnieje rozwiązanie równania postaci

$$\Delta^m x(n) + a(n)f(x(n)) = b(n), \quad (3)$$

gdzie $m \geq 1$, $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zbieżne do tej stałej.

Twierdzenie 1 ([H1], Theorem 1). Załóżmy, że szeregi

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} |a(j)| \quad \text{ i } \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} |b(j)|$$

są zbieżne a funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Wówczas dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$ istnieje rozwiązanie $(x(n))$ równania (3) posiadające własność $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = c$.

Twierdzenie 1 częściowo ogólnia twierdzenie 2 z pracy [19]. Ten wątek badawczy kontynuowano dla równań różnicowych z quasiróżnicami. W pracy [H2] rozważano równanie

$$L_m x(n) \pm (-1)^m a(n)f(x(\sigma(n))) = 0, \quad (4)$$

gdzie $(a(n))$ jest ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \infty$ zarówno w przypadku, gdy spełniony jest klasyczny warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_k(n)} = \infty$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, jak również w przypadku, gdy warunek ten nie jest spełniony.

Twierdzenie 2 ([H2], Theorem 3.1). Jeśli

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a(n) < \infty$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_k(n)} < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

i funkcja f jest ciągła to dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$ istnieje rozwiązanie $(x(n))$ równania (4) posiadające własność $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = c$.

Twierdzenie 2 uogólnia na dowolny rząd twierdzenie 7 z pracy [58]. Jeśli warunek (ii) w Twierdzeniu 2 nie jest spełniony, to na ciąg $(a(n))$ musimy nałożyć silniejsze założenie. Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} s_1(n) &= \sum_{j_1=n}^{\infty} a(j_1) \\ s_2(n) &= \sum_{j_2=n}^{\infty} \frac{1}{r_{m-1}(j_2)} \sum_{j_1=j_2}^{\infty} a(j_1) = \sum_{j_2=n}^{\infty} \frac{s_1(j_2)}{r_{m-1}(j_2)} \\ &\vdots \\ s_k(n) &= \sum_{j_k=n}^{\infty} \frac{s_{k-1}(j_k)}{r_{m-k+1}(j_k)}, \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Twierdzenie 3 ([H2], Theorem 3.3). Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{m-1}(n)}{r_1(n)} < \infty$ i funkcja f jest ciągła to dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$ istnieje rozwiązanie $(x(n))$ równania (4) posiadające własność $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = c$.

W pracy [H1] znaleziono również warunki dostateczne, przy których każdy ciąg wielomianowy stopnia $m-1$ jest asymptotycznie równoważny z pewnym rozwiązaniem równania (3).

Twierdzenie 4 ([H1], Theorem 2). Załóżmy, że szeregi

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} |a(j)| \quad \text{ i } \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{m-1} |b(j)|$$

są zbieżne a funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła. Wówczas dla dowolnych stałych $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$ istnieje rozwiązanie $(x(n))$ równania (3) posiadające własność $x(n) = a_{m-1}n^{m-1} + a_{m-2}n^{m-2} + \dots + a_1n^1 + a_0 + o(1)$.

W pracach [b1] i [b2] badany był szczególny przypadek równania (3), dla funkcji $f(t) = t^\gamma$. Asymptotyczna wielomianowość rozwiązań równania (3) rozważana była również przez J. Pospendę w [44]. Jednakże główne twierdzenie tej pracy zawiera szereg trudnych do zweryfikowania założeń technicznych.

W dowodach powyższych twierdzeń 1-4 korzysta się z Twierdzenia Schaudera o punkcie stałym stosowanego do odpowiednich przekształceń podzbiorów przestrzeni ciągów ograniczonych l_∞ .

3.2 Istnienie rozwiązania asymptotycznie minimalnego i maksymalnego

Równania różnicowe rzędu czwartego badane były m.in. przez S. S. Chenga [13], J. R. Graefa, E. Thandapaniego [23], J. Yanga, B. Liu [61], E. Schmeidel, B. Szmandę [47], E. Thandapaniego i I. M. Arockiasamy [59], [60] czy Zhanga, S. S. Chenga [67]. W pracy [a2] rozważano równanie różnicowe nieliniowe rzędu czwartego postaci

$$\Delta(a_n \Delta(b_n \Delta(c_n \Delta y(n)))) = f(n, x_n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

gdzie (a_n) , (b_n) i (c_n) są ciągami liczb rzeczywistych dodatnich, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ przy poniższych założeniach

$$(h1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} = \infty;$$

$$(h2) \quad f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest funkcją ciągłą i monotoniczną ze względu na drugi argument,}$$

$$xf(n, x) > 0 \text{ dla każdego } x \neq 0 \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

Warunek drugi zapewnia nam stałość znaku czwartej quasiróżnicy i razem z warunkiem pierwszym pozwalają na klasyfikację rozwiązań nieoscylujących równania (5) przy pomocy uogólnionego Lematu Kiguradze.

Bardzo niewiele jest wyników dla przypadku, gdy warunek (h1) nie jest spełniony. Klasyfikacja rozwiązań nieoscylujących jest wówczas bardziej skomplikowana i składa się z większej ilości typów. Przypadek taki rozważany jest w pracy [H3] przy następujących założeniach:

$$(h3) \quad a, b, c : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty), a_n \geq b_n \text{ dla dostatecznie dużych } n,$$

$$(h4) \quad \text{istnieje stała } \varepsilon > 0 \text{ taka, że } a_n > \varepsilon \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

$$(h5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_j} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{b_i} < \infty.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\rho_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{c_j} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{b_i}, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{c_i}.$$

W lemacie 4, pracy [H3] pokazano, że dla każdego dodatniego rozwiązania (x_n) równania (5) istnieją stałe dodatnie k_1, k_2 takie, że

$$k_1 \rho_n \leq x_n \leq k_2 \sigma_n \text{ dla dostatecznie dużych } n.$$

Z uwagi na ten lemat, rozwiązanie multiplikatywnie asymptotycznie równoważne z ciągiem (ρ_n) nazywa się rozwiązaniem minimalnym, a rozwiązanie multiplikatywnie asymptotycznie równoważne z (σ_n) rozwiązaniem maksymalnym równania (5).

Naturalne jest pytanie, jakie warunki muszą być spełnione, aby istniało rozwiązanie minimalne i maksymalne. Odpowiedź dają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 5 ([H3], Theorem 1). Załóżmy, że spełnione są warunki (h2) -(h5). Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n+1} |f(n, c\rho_n)| < \infty$ dla pewnej stałej niezerowej c , to istnieje rozwiązanie (x_n) równania (5) takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\rho_n} = d \neq 0$.

Twierdzenie 6 ([H3], Theorem 2). Załóżmy, że spełnione są warunki (h2) -(h5). Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{n+1} |f(n, c\sigma_n)| < \infty$ dla pewnej stałej niezerowej c , to istnieje rozwiązanie (x_n) równania (5) takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sigma_n} = d \neq 0$.

Dowody twierdzeń 5 i 6 oparte są na Twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym. Powyższe twierdzenia uogólniają niektóre rezultaty otrzymane przez E. Thandapaniego i I. M. Arockiasamy w [59].

3.3 Rozwiązania, których asymptotyczny przebieg jest określonego typu

Wyniki, które przedstawimy w tym, i w następnym punkcie opracowania dotyczą równań różnicowych typu neutralnego, tj. równań postaci

$$\Delta^m(x_n + p_n x_{n-k}) = f(n, x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Równanie takie można zapisać jako równanie różnicowe wyższego rzędu, wygodnie jednak badać je bezpośrednio. Każde rozwiązanie (x_n) równania różnicowego typu neutralnego zależy od ciągu (z_n) , zdefiniowanego wzorem

$$z_n = x_n + p_n x_{n-k},$$

gdzie (p_n) jest danym ciągiem liczb rzeczywistych, a k daną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (z_n) jest czasem nazywany ciągiem stowarzyszonym z (x_n) . W badaniu zachowań asymptotycznych rozwiązań równań różnicowych typu neutralnego zwykle znajdujemy pewne własności asymptotyczne ciągu (z_n) i stąd uzyskujemy informacje o własnościach asymptotycznych rozwiązania (x_n) . W pracy [H4] zostało udowodnionych kilka lematów dotyczących relacji między danym ciągiem i ciągiem z nim stowarzyszonym. Są one interesujące same w sobie, a także przydatne w dowodach wielu twierdzeń. Przytoczymy tutaj dwa z nich.

Lemat 1 ([H4], Lemma 1). Niech $x, p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $z_n = x_n + p_n x_{n+k}$, $n \geq \max\{0, -k\}$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Załóżmy, że ciąg (x_n) jest ograniczony, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p^* \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) jeśli $p^* = -1$, to $l = 0$;

(ii) jeśli $|p^*| \neq 1$, to ciąg (x_n) jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{l}{1+p^*}$.

Lemat 2 ([H4], Lemma 2). Niech $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ i $|p| < 1$. Jeśli ciąg $z_n = x_n + p x_{n-k}$, $n \geq k$, jest ograniczony, to ciąg (x_n) jest także ograniczony.

W pracy [H4] dla równania różnicowego typu neutralnego drugiego rzędu

$$\Delta^2(x_n + px_{n-k}) + f(n, x_n) = 0 \quad (6)$$

znalezione zostały warunki, przy których wszystkie nieoscylujące rozwiązania równania (6) posiadają własność $x_n = cn + o(n)$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, a także warunki, przy których wszystkie nieoscylujące rozwiązania mają własność $x_n = cn + d + o(1)$, zwaną asymptotyczną liniowością. W dowodach twierdzeń wykorzystano dyskretną nierówność typu Bihariego, którą znaleźć można np. w pracy V. B. Demidovica [17].

Twierdzenie 7 ([H4, Theorem 1]). *Załóżmy, że $p \geq 0$, $p \neq 1$ oraz*

(i) *$f(n, u)$ jest funkcją ciągłą ze względu na u ;*

(ii) *istnieją funkcja ciągła $g : R_+ \rightarrow R_+$ i ciąg $h : N \rightarrow R_+$ takie, że*

$$|f(n, u)| \leq h_n g\left(\frac{|u|}{n}\right) \text{ dla } n = 1, 2, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} h_n < \infty, \text{ funkcja } g \text{ jest niemalejąca i } G(x) = \int_1^x \frac{ds}{g(s)} \rightarrow \infty \text{ gdy } x \rightarrow \infty.$$

Wówczas każde nieoscylujące rozwiązanie (x_n) równania (6) posiada własność $x_n = cn + o(n)$, gdzie c jest stałą rzeczywistą.

Zauważmy, że jeżeli spełnione są założenia powyższego twierdzenia, to rozwiązanie nieoscylujące równania (6) może być, ale nie musi, asymptotycznie liniowe. Zaprezentowano to na przykładach (patrz Example 1 i Example 2 w [H4]). Głównym rezultatem pracy [H4] jest następujące twierdzenie podające warunki dostateczne asymptotycznej liniowości.

Twierdzenie 8 ([H4, Theorem 2]). *Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia 7. Jeśli ponadto $\sum_{n=1}^{\infty} nh_n < \infty$, to każde nieoscylujące rozwiązanie (x_n) równania (6) posiada własność $x_n = cn + d + o(1)$, gdzie c, d są stałymi rzeczywistymi.*

Z powyższego twierdzenia otrzymano następujące wnioski dla równania liniowego i równania typu Emden-Fowlera.

Wniosek 1 ([H4, Corollary 3]). *Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| < \infty$, to każde nieoscylujące rozwiązanie (x_n) równania*

$$\Delta^2(x_n + px_{n-k}) + a_n x_n = 0$$

jest asymptotycznie liniowe.

Wniosek 2 ([H4, Corollary 4]). *Rozważmy równanie różnicowe Emden-Fowlera*

$$\Delta^2(x_n + px_{n-k}) + a_n x_n^\alpha = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (7)$$

gdzie α jest ilorazem liczb całkowitych nieparzystych. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+1} |a_n| < \infty$, to każde nieoscylujące rozwiązanie (x_n) równania (7) jest asymptotycznie liniowe.

Przyjmując w twierdzeniu 7 i wniosku 1 $p = 0$ otrzymujemy rezultaty znane w literaturze ([20], [43]).

3.4 Oscylacyjność rozwiązań

Oscylacyjność rozwiązań liniowych równań różnicowych badana jest w pracach [H5] i [H6], a nieliniowych w [H8] i [H2]. W pracy [H5] rozważano równanie

$$\Delta^m(x_n - px_{n-\tau}) = q_n x_{n-\sigma}, \quad (8)$$

gdzie $m \geq 2$, p jest liczbą rzeczywistą nieujemną, τ i σ są liczbami całkowitymi nieujemnymi, (q_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych nierównym tożsamościowo zero. Korzystając z Twierdzenia Banacha o kontrakcji wykazano, że równanie powyższe posiada zawsze rozwiązanie dodatnie nieograniczone. Niemożliwe jest zatem znalezienie kryterium oscylacyjności wszystkich rozwiązań powyższego równania. Z rezultatu uzyskanego przez A. Zaferę w pracy [65] wynika, że jeśli m jest liczbą parzystą, $p > 1$ i $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} q_n = \infty$, to każde rozwiązanie ograniczone równanie (8) jest oscylujące. W przypadku, gdy m jest liczbą parzystą, a $0 < p \leq 1$ mamy natomiast następujące kryterium.

Twierdzenie 9 ([H5], Theorem 4). *Założmy, że m jest liczbą parzystą, $0 < p \leq 1$. Jeśli*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n-\sigma}^{n-1} \frac{(j-n+\sigma+m-1)^{m-1}}{(m-1)!} q_j > 1-p,$$

to każde rozwiązanie ograniczone równanie (8) jest oscylujące.

Rezultat ten został wykorzystany w pracy [H6], motywacją której były wyniki uzyskane przez R. P. Agarwalę i S. R. Grace w [3]. Autorzy znaleźli warunki dostateczne oscylacyjności pewnych liniowych równań różnicowych typu neutralnego o stałych współczynnikach typu mieszanego (zarówno z opóźnionym, jak i z wyprzedzonym argumentem). W pracy [H6] rozważano równanie o zmiennych współczynnikach następującej postaci

$$\Delta^m(x_n - px_{n-\tau}) = q_n x_{n-\sigma} + h_n x_{n+\eta}, \quad (9)$$

gdzie $m \geq 2$, $0 < p < 1$, τ , σ i η są liczbami całkowitymi nieujemnymi, (q_n) i (h_n) są ciągami liczb rzeczywistych nieujemnych. W pierwszej części pracy, dla równania z wyprzedzonym argumentem

$$\Delta^m(x_n - px_{n-\tau}) = h_n x_{n+\eta}, \quad (10)$$

znalezione zostały warunki dostateczne oscylacyjności wszystkich rozwiązań ograniczonych. Stąd, i z twierdzenia 9 uzyskano następujące, łatwe do zweryfikowania, warunki oscylacyjności wszystkich rozwiązań równania (9).

Twierdzenie 10 ([H6], Theorem 4). *Niech m będzie liczbą parzystą, k liczbą całkowitą dodatnią, $0 < p < 1$, $\eta \geq m + k\tau$. Założmy, że*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n-\sigma}^{n-1} \frac{(j-n+\sigma+m-1)^{m-1}}{(m-1)!} q_j > 1-p,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{n+\eta-k\tau-m} \frac{(n+\eta-k\tau-j-1)^{m-1}}{(m-1)!} h_j > \frac{1}{K},$$

gdzie $K = \sum_{i=0}^k p^i$. Ponadto, dla $m > 2$ załóżmy, że

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\infty} (j-n+m-3)^{m-3} h_j > 0.$$

Wówczas każde rozwiązanie równanie (9) jest oscylujące.

Wielu autorów, np. R. P. Agarwal, S. R. Grace, N. Parhi, B. Szmanda, E. Thandapani, A. K. Tripathy, A. Zafer ([4], [6], [39], [52], [54], [57], [63]), badało oscylacyjność rozwiązań równań różnicowych nieliniowych typu neutralnego rzędu $m \geq 1$ następującej postaci

$$\Delta^m(x_n + p_n x_{n-\tau}) + f(n, x_n, x_{n-\sigma}) = 0. \quad (11)$$

Jednakże większość z nich rozważała przypadek, gdy ciąg (p_n) wewnątrz składnika neutralnego jest stałego znaku. Stosunkowo niewiele jest prac, w których badany był przypadek, gdy ciąg (p_n) jest ciągiem oscylującym ([8, 9, 25]). Kryteria porównawcze oscylacyjności rozwiązań liniowych równań różnicowych postaci $\Delta^m(y_n + p_n y_{\tau(n)}) + q_n y_{\sigma(n)} = 0$ udowodnione zostały przez Y. Bolata, O. Akin i H. Yildirima w pracy [9], a dla nieliniowych równań postaci

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{\tau(n)}) + q_n y_{\sigma(n)}^\alpha = 0 \quad (12)$$

przez I. Kira i Y. Bolata w [25].

A. Zafer w pracy [66], korzystając z metody użytej przez P. Sundarama w [49] otrzymał kryteria oscylacyjności równania (11), gdy m jest parzyste i $0 < p_n \leq 1$. Podobne rozumowanie wykorzystano w pracy [H8] dla równania (11) z oscylującym ciągiem (p_n) .

Twierdzenie 11 ([H8, Theorem 1]). Niech $m \geq 2$ będzie liczbą parzystą. Załóżmy, że (p_n) jest ciągiem oscylującym liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ oraz

(i) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $v f(n, u, v) > 0$ dla $v \neq 0$;

(ii) istnieje funkcja ciągła $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ i ciąg $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ taki, że

$$|f(n, u, v)| \geq \phi_n g\left(\frac{|v|}{\left(\frac{n-\sigma}{2^{m-2}}\right)^{m-1}}\right)$$

dla dostatecznie dużych n , gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n = \infty$, funkcja g jest niemalejąca i

$$\int_0^\beta \frac{ds}{g(s)} < \infty \text{ dla każdego } \beta > 0.$$

Wówczas każde rozwiązanie ograniczone (x_n) równania (11) jest oscylujące.

Twierdzenie 11 zastosowane do uogólnionego dyskretnego równania Emden-Fowlera

$$\Delta^m(x_n + p_n x_{n-\tau}) + a_n |x_{n-\sigma}|^\alpha \operatorname{sgn}(x_{n-\sigma}) = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (13)$$

gdzie $m \geq 2$, (p_n) jest ciągiem oscylującym liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, τ i σ są liczbami całkowitymi dodatnimi, (a_n) ciągiem liczb rzeczywistych, daje następujący wniosek.

Wniosek 3 ([H8], Corollary 1). Załóżmy, że $\sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha(m-1)} |a_j| = \infty$. Jeśli m jest liczbą parzystą, to każde rozwiązanie ograniczone (x_n) równania (13) jest oscylujące.

Dla równania rzędu nieparzystego udowodniono następujące kryterium.

Twierdzenie 12 ([H8], Theorem 2). Niech $m \geq 3$ będzie liczbą nieparzystą. Załóżmy, że (p_n) jest ciągiem oscylującym liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ oraz

(i) $f : N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $vf(n, u, v) > 0$ dla $v \neq 0$;

(ii) istnieje funkcja ciągła $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ i ciąg $\phi : N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ taki, że

$$|f(n, u, v)| \geq \phi_n g \left(\frac{|v|}{(m + \sigma - 2)^{m-1}} \right),$$

dla dostatecznie dużych n , gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n = \infty$, funkcja g jest niemalejąca i

$$\int_0^\beta \frac{ds}{g(s)} < \infty \quad \text{dla każdego } \beta > 0.$$

Wówczas każde rozwiązanie ograniczone (x_n) równania (11) jest oscylujące.

Bezpośrednią konkluzją Twierdzenia 12 jest

Wniosek 4 ([H8], Corollary 2). Załóżmy, że m jest liczbą nieparzystą i $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = \infty$. Wówczas każde rozwiązanie ograniczone (x_n) równania (13) jest oscylujące.

Kryteria oscylacyjności uzyskane w pracy [H8] dotyczą nie tylko ogólniejszej klasy równań, ale mogą być również stosowane do pewnych równań postaci (12), do których odpowiednie kryteria z pracy [25] nie mogą być zastosowane. Pokazano to na przykładach (Example 1, Example 2, [H8]).

O oscylacyjnym zachowaniu rozwiązań równań z quasiróżnicami $(4\pm)$ rozstrzygają następujące kryteria uzyskane w pracy [H2]. Korzystamy w nich z warunków:

$$(h1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_k(n)} = \infty, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$(h2) \quad xf(x) > 0 \text{ dla } x \neq 0,$$

(h3) funkcja $|f(x)|$ jest ograniczona z dołu przez stałą dodatnią, gdy $|x|$ jest ograniczone z dołu przez stałą dodatnią,

oraz oznaczeń

$$\begin{aligned}\omega_1(n) &= \sum_{j_1=1}^n \frac{1}{r_1(j_1)} \\ \omega_2(n) &= \sum_{j_2=1}^n \frac{1}{r_2(j_2)} \sum_{j_1=1}^{j_2} \frac{1}{r_1(j_1)} = \sum_{j_2=1}^n \frac{\omega_1(j_2)}{r_2(j_2)} \\ &\vdots \\ \omega_k(n) &= \sum_{j_k=1}^n \frac{\omega_{k-1}(j_k)}{r_k(j_k)}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, m-1.\end{aligned}$$

Twierdzenie 13 ([H2], Theorem 2.1). *Jeśli spełnione są warunki (h1)-(h3) i $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{m-1}(n)a(n) = \infty$, to każde ograniczone rozwiązanie równania (4-) jest oscylujące.*

Twierdzenie 14 ([H2], Theorem 2.3). *Jeśli spełnione są warunki (h1)-(h3) i $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{m-1}(n)a(n) = \infty$, to każde ograniczone rozwiązanie równania (4+) jest albo oscylujące albo $L_k x$ są monotoniczne dla dostatecznie dużych n i $\lim_{n \rightarrow \infty} L_k x(n) = 0$ dla $k = 0, 1, \dots, m-1$.*

Łatwo sprawdzić, że jeżeli $r_k(n) \equiv 1$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, m$ to $\omega_{m-1}(n) = \frac{(n+m-2)^{m-1}}{(m-1)!}$. Stąd, powyższe rezultaty uogólniają twierdzenia 1, 2 uzyskane przez B. Szmandę w [51].

3.5 Ograniczoność rozwiązań

Ograniczoność rozwiązań rozważana była w pracach [H6], [H7] i [H9]. W pracy [H6], oprócz kryteriów oscylacyjności rozwiązań równania (9) omówionych w punkcie 3.4, znaleziono również warunki dostateczne ograniczoności wszystkich nieoscylujących rozwiązań równania (10) z wyprzedzonym argumentem.

Twierdzenie 15 ([H6], Theorem 2). *Założmy, że m jest liczbą parzystą, k liczbą całkowitą dodatnią, $\eta \geq k\tau + m$ i nierówność różnicowa $\Delta^m z_n - K h_n z_{n+\eta-k\tau} \geq 0$, gdzie $K = \sum_{i=0}^k p^i$, nie ma rozwiązań stopnia m (tj. rozwiązań nieoscylujących mających własność $x_n \Delta^j x_n > 0$ dla $j = 0, 1, \dots, m$ i dla dostatecznie dużych n). Ponadto, dla $m > 2$ zakładamy, że $\sum_{j=1}^{\infty} j^{m-3} h_j = \infty$. Wówczas każde nieoscylujące rozwiązanie równania (10) jest ograniczone.*

W pracy [H7] badano równanie różnicowe wymierne postaci

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{b + cx_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

z dodatnimi współczynnikami i nieujemnymi warunkami początkowymi. Równania różnicowe wymierne powyższej postaci badane były również w [15], [48], [62]. W pracy [H7] wykorzystując postać analityczną rozwiązań równania (14), otrzymaną przez C. Cinara w [15], udowodniono

Twierdzenie 16 ([H7], Theorem 1). Niech $p \geq 1$. Wówczas każde rozwiązanie dodatnie (x_n) równania (14) jest zbieżne do zera.

X. Yang, W. Li w [62] udowodnili, że jeśli $p > 1$, to jedyny punkt równowagi równania (14), $\bar{x} = 0$ jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Stąd, i z twierdzenia 16 wynika, że gdy $p \geq 1$, to $\bar{x} = 0$ jest globalnie asymptotycznie stabilny. W przypadku, gdy $p \in (0, 1)$, wykazano

Twierdzenie 17 ([H7], Theorem 2). Załóżmy, że $p \in (0, 1)$. Niech (x_n) będzie rozwiązaniem równania (14) z dodatnimi warunkami początkowymi x_{-1}, x_0 .

- (i) Jeśli $x_0 x_{-1} < 1 - p$, to podciągi (x_{2n}) i (x_{2n-1}) są oba rosnące i ograniczone.
- (ii) Jeśli $x_0 x_{-1} > 1 - p$, to podciągi (x_{2n}) i (x_{2n-1}) są oba malejące (i ograniczone).
- (iii) Jeśli $x_0 x_{-1} = 1 - p$, to podciągi (x_{2n}) i (x_{2n-1}) są oba stałe.

Z twierdzeń 16 i 17 wynika, że wszystkie rozwiązania dodatnie równania (14) są ograniczone. Ponadto, gdy $p \in (0, 1)$ każde rozwiązanie dodatnie równania (14) jest ciągiem asymptotycznie 2-okresowym $\{r, s, r, s, r, s, \dots\}$, gdzie $rs = 1 - p$. Dla ustalonego p , liczby r i s zależą tylko od warunków początkowych x_{-1}, x_0 .

Praca [H9] otwiera cykl prac (będących w stadium przygotowania do druku) dotyczących k -wymiarowych układów równań różnicowych z opóźnieniami. Rozważa się w niej układy równań

$$x(n+1) = A(n)x(n) + \sum_{s=1}^m B_s(n)x(n-h_s(n)), \quad n \geq n_0 \quad (15)$$

i

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n-h(n))), \quad n \geq n_0 \quad (16)$$

z warunkami początkowymi $x(n) = \varphi(n)$ dla $n \in E_0$, gdzie $E_0 = \bigcup_{i=1}^m E_i \cup \{n_0\}$,

$E_i = \{n \in \mathbb{Z} : n = l - h_i(l) \leq n_0, l \geq n_0\}$, $\varphi : E_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $h_s, h : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - h_s(n)) = \infty$, $s = 1, 2, \dots, m$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - h(n)) = \infty$, $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Motywacją tych badań były rezultaty uzyskane przez Čermáka w pracy [12], w której autor uzyskał m.in. oszacowanie rozwiązań układu równań typu (15) za pomocą rozwiązań pewnej nierówności różnicowej skalarnej. Głównym celem pracy [H9] było znalezienie warunków koniecznych ograniczoności rozwiązań powyższych układów równań. Otrzymane wyniki uzyskano wykorzystując rozwiązania pomocniczych równań różnicowych skalarnych z odpowiednio dobranymi współczynnikami występującymi w tych równaniach. Pozwoliło to w sposób jawny oszacować rozwiązania rozpatrywanych układów.

Twierdzenie 18 ([H9], Theorem 2.1). Załóżmy, że

(H₀) istnieją stałe rzeczywiste $\alpha \geq 1$ i $0 < \eta < 1$ takie, że

$$\|X(n)X^{-1}(s)\| \leq \alpha \eta^{n-s}, \quad \text{dla wszystkich } n \geq s \geq n_0,$$

(H₁) $\|B_i(n)\| \leq b_i$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq n_0$, $\sum_{i=1}^m b_i = b$,

(H₂) istnieje stała $q > 0$ taka, że $\eta < \frac{q}{\tau(n)} \leq 1$,

$$q^{\tau(n)} \left(\frac{q}{\tau(n)} - \eta \right) \prod_{s=n-\tau(n)}^{n-1} \frac{1}{\tau(s)} \geq \alpha b \quad \text{dla wszystkich } n - \tau(n) \geq n_0,$$

$$\text{gdzie } \tau(n) = \max \left\{ 1, \max_{1 \leq i \leq m} h_i(n) \right\} \quad \text{dla } n \geq n_0.$$

Wówczas rozwiązanie x układu (15) z warunkami początkowymi $x(n) = \varphi(n)$ dla $n \in E_0$, posiada własność

$$\|x(n)\| \leq c_0 q^n \prod_{s=n_0}^{n-1} \frac{1}{\tau(s)}, \quad n \geq n_0, \quad (17)$$

$$\text{dla każdego } c_0 > \max \left\{ \alpha \|\varphi(n_0)\|, \max_{n \in E_0} \frac{\|\varphi(n)\|}{q^n} \right\}.$$

Na mocy założenia (H₂), z (17) wynika, że

$$\|x(n)\| \leq c_0 q^{n_0} \prod_{s=n_0}^{n-1} \frac{q}{\tau(s)} \leq c_0 q^{n_0}.$$

Zatem, jeśli spełnione są założenia twierdzenia 15, to wszystkie rozwiązania układu (15) są ograniczone. Konsekwencją twierdzenia 15 jest poniższy warunek globalnej asymptotycznej stabilności układu (15).

Wniosek 5 ([H9], Corollary 1). Załóżmy, że spełnione są założenia (H₀) - (H₂). Jeśli $q < 1$, to każde rozwiązanie x układu (15) dąży do zera, gdy $n \rightarrow \infty$.

Układy równań różnicowych nieliniowych postaci (16) badane były dotychczas przez niewielu autorów, np. R. Medina w pracy [35] i S. K. Choi i in. w pracy [14] badali asymptotyczną równowagę pomiędzy rozwiązaniami układu liniowego $x(n+1) = A(n)x(n)$ i jego perturbacją $x(n+1) = A(n)x(n) + g(n, x(n))$. W pracy [H9] dla układu (16) udowodniono

Twierdzenie 19 ([H9], Theorem 3.1). Załóżmy, że spełniony jest warunek (H₀) i

$$(H_3) \quad \|f(n, x)\| \leq \beta \|x\|^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad \gamma > 1, \quad \beta > 0, \quad n \geq n_0,$$

$$(H_4) \quad \text{istnieje ciąg nierosnący } \tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ taki, że } h(n) \leq \tau(n) \text{ i } \frac{\tau(n)}{n} < \frac{\gamma-1}{\gamma} \text{ dla wszystkich } n > n_0,$$

$$(H_5) \quad \text{istnieje stała dodatnia } m_1 \text{ taka, że } \max_{n \in E_0} \|\varphi(n)\| < \frac{m_1}{\alpha} \text{ i } \alpha \beta (m_1)^{\gamma-1} < 1.$$

Wówczas istnieje liczba całkowita $n^* > n_0$ taka, że rozwiązanie x układu (16) z warunkami początkowymi $x(n) = \varphi(n)$ dla $n \in E_0$, ma własność

$$\|x(n)\| \leq m_1 \lambda^{-(n-n_0)}, \quad \text{dla } n \geq n^*,$$

gdzie λ jest stałą taką, że $1 < \lambda < \frac{1}{\eta}$.

Oczywiście, ponieważ $\lambda > 1$, jeśli spełnione są założenia twierdzenia 19, to rozwiązania układu (16) są zbieżne do zera.

4 Pozostałe osiągnięcia naukowo - badawcze

4.1 Omówienie wyników pozostałych prac naukowych

W moim dorobku znajdują się 44 autorskie lub współautorskie prace naukowe (z tego 41 powstało po doktoracie) opublikowane w recenzowanych czasopismach matematycznych o zasięgu międzynarodowym, w tym 14 w czasopismach znajdujących się w bazie *ISI Web of Knowledge JCR Science Edition 2010*. Poniżej zamieszczona została lista prac z wyłączeniem pozycji opisanych we wcześniejszej części autoreferatu. Pełna lista znajduje się w odrębnym załączniku (załącznik nr 3).

a) Prace w czasopismach znajdujących się w bazie JCR ²

po uzyskaniu stopnia naukowego doktora

- [a1] A. Drozdowicz, M. Migda, *Asymptotic behavior of solutions of the m -th order nonhomogeneous difference equations*, J. Comput. Appl. Math. 81 (1997), 75–81 (IF 1.029).
- [a2] M. Migda, A. Musielak, E. Schmeidel, *On a class of fourth order nonlinear difference equations*, Adv. Difference Equ. 1 (2004), 23–36 (IF 0.89).
- [a3] M. Migda, G. Zhang, *Monotone solutions of neutral difference equations of odd order*, J. Difference Equ. Appl. 10 (2004), 691–703 (IF 0.951).
- [a4] M. Migda, J. Migda, *On a class of first order nonlinear difference equations of neutral type*, Math. Comput. Modelling 40 (2004), 297–306 (IF 1.066).
- [a5] G. Zhang, M. Migda, *Unstable neutral differential equations involving the „maximum” function*, Glas. Mat. Ser. III 40(60) (2005), 249–259 (IF 0.475).
- [a6] A. Andruch-Sobiło, M. Migda, *Bounded solutions of third order nonlinear difference equations*, The Rocky Mountain J. Math. 36(1), (2006), 23–34 (IF 0.443).
- [a7] M. Migda, G. Zhang, *On unstable neutral difference equations with "maxima"*, Math. Slovaca 56 (2006), no. 4, 451–463 (IF 0.316).
- [a8] J. Diblík, M. Migda, E. Schmeidel, *Bounded solutions of nonlinear discrete equations*, Nonlinear Anal. 65 (2006), no. 4, 845–85 (IF 1.279).

b) Prace w innych czasopismach matematycznych

- [b1] J. Korczak, M. Migda, *On the asymptotic behaviour of solutions of the m -th order difference equation*, Demonstratio Math 21, 3 (1988), 615–629.
- [b2] J. Korczak, M. Migda, *Asymptotic behaviour of solutions of an m -th order difference equation*, Fasc. Math. 5 (1988), 89–95.

²z powodu niedostępności dla roku 2011 impact factor podany został za rok 2010

- [b3] M. Migda, *Asymptotic properties of solutions of higher order difference equations*, Radovi Math. 5 (1989), 279–309.

po uzyskaniu stopnia naukowego doktora

- [b4] M. Migda, J. Popenda, *Monotonicity and Olver type comparison results for difference equations*, 483–491, World Sci. Ser. Appl. Anal., 3, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.
- [b5] J. Korczak, M. Migda, *Asymptotic properties of solutions of higher order linear difference equations*, Demonstratio Math. 28 (1995), 97-1-06.
- [b6] J. Korczak, M. Migda, *Comparison theorems for difference equations*, Fasc. Math. 25 (1995), 75–80.
- [b7] M. Migda, J. Migda, *Asymptotic properties of the solutions of the second order difference equations*, Archivum Math. 34 (1998), 467–476.
- [b8] M. Migda, E. Schmeidel, *Asymptotic behavior of solutions of higher order difference equations*, Demonstratio Math. 31, 1(1998), 71–80.
- [b9] M. Migda, J. Migda, *Asymptotic behaviour of solutions of difference equations of second order*, Demonstratio Math. 32, 4(1999), 767-773.
- [b10] M. Migda, E. Schmeidel, *Some properties of solutions of a class of nonlinear difference equations*, Acta Univ. Palacki, Mathematica 38 (1999), 131-137.
- [b11] M. Migda, *Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear difference equations*, Fasc. Math. 31 (2001), 57–63.
- [b12] M. Migda, E. Schmeidel, *On the asymptotic behavior of solutions of nonlinear difference equations*, Fasc. Math. 31 (2001), 63–69.
- [b13] E. Schmeidel, M. Migda, E. Magnucka-Blandzi, *Mathematical works of Jerzy Popenda*, Appl. Math. E-Notes 2 (2002), 155–170.
- [b14] M. Migda, E. Schmeidel, A. Drozdowicz, *Nonoscillation results for some third order nonlinear difference equation*, Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk. Brun. Math. 13 (2003), 185–192.
- [b15] M. Migda, *Nonoscillatory solutions of some higher order difference equations*, Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk. Brun. Math. 13 (2003), 177-185.
- [b16] G. Zhang, M. Migda, *Monotone solutions of a higher order neutral differential equation*, Comment. Math. Prace Mat. 44 (2004), 147–162.
- [b17] E. Schmeidel, M. Migda, M. Zbąszyniak, *Some properties of solutions of second order nonlinear difference equations*, Funct. Differ. Equ. 11 (2004), no. 1-2, 147–152.

- [b18] M. Migda, *On the existence of nonoscillatory solutions of some higher order difference equations*, Appl. Math. E-Notes 4 (2004), 33–39.
- [b19] A. Andruch-Sobiło, M. Migda, *On the oscillation of solutions of third order linear difference equations of neutral type*, Math. Bohem. 130 (2005), 19–33.
- [b20] M. Migda, *On the discrete version of generalized Kiguradze's lemma*, Fasc. Math. 35 (2005), 77–83.
- [b21] M. Migda, A. Musielak, E. Schmeidel, *Oscillation theorems for a class of fourth order nonlinear difference equations*, Proceedings of Eighth International Conference on Difference Equations and Applications, 201–208, Boca Raton FL, 2005.
- [b22] E. Schmeidel, M. Migda, M. Zbąszyniak, *On the existence of solutions of some second order nonlinear difference equations*, Archivum Math. 42 (2005), 379–388.
- [b23] M. Migda, *Asymptotic properties of nonoscillatory solutions of higher order neutral difference equations*, Opuscula Math. 26 (2006), no. 3, 507–514.
- [b24] E. Schmeidel, M. Migda, A. Musielak, *Oscillatory properties of fourth order nonlinear difference equations with quasidifferences*, Opuscula Math. 26 (2006), no. 2, 371–380.
- [b25] A. Andruch-Sobiło, M. Migda, *Further properties of the rational recursive sequence $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{b+cx_nx_{n-1}}$* , Opuscula Math. 26 (2006), no. 3, 387–394.
- [b26] J. Migda, M. Migda, *Asymptotically polynomial solutions of higher order difference equations*, (English) Ruffing, A. (ed.) et al., Communications of the Laufen colloquium on science, 2007. Aachen: Shaker. Berichte aus der Mathematik 11, 1–12 (2007).
- [b27] M. Migda, J. Migda, *On first-order nonlinear difference equations of neutral type*, Elaydi, Saber (ed.) et al., Discrete dynamics and difference equations. Proceedings of the twelfth international conference on difference equations and applications (ICDEA), Lisbon, Portugal, July 23–27, 2007. Hackensack, NJ: World Scientific. 345–354 (2010).

Omówienie tematyki badań

Tematyka prawie wszystkich powyższych prac dotyczy także jakościowej teorii równań różnicowych. Po uzyskaniu stopnia naukowego doktora, zajmowałam się badaniem własności asymptotycznych rozwiązań równań różnicowych, takich jak istnienie rozwiązania zbieżnego, asymptotycznie wielomianowego a także rozwiązań, których przebieg jest określonego typu. Efektami tej pracy są publikacje [a1] - [a4] i [b7] - [b12], a także późniejsze [b14], [b15], [b17]-[b19].

W pracy [b7] podane zostały warunki dostateczne, przy których dla dowolnej stałej rzeczywistej istnieje rozwiązanie równania postaci $\Delta^2 x(n) = a(n)\phi(x(n+k))$ zbieżne do tej stałej oraz warunki dostateczne istnienia rozwiązania asymptotycznie liniowego. Praca zawiera m.in. uogólnienie rezultatu uzyskanego w pracy A. Drozdowicz, J. Popenda [18].

W pracy [b8] badana jest struktura rozwiązań równania różnicowego postaci

$$\Delta^m x(n) = a(n)x(n+1) + f(n, x(n)).$$

Udowodniono, że przy dostatecznie silnych założeniach na funkcję zaburzającą f , jeżeli ciągi $x_1, x_2, \dots, x_m$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania niezaburzonego, to każde rozwiązanie rozważanego równania jest postaci

$$\alpha_1(n)x_1(n) + \alpha_2(n)x_2(n) + \dots + \alpha_m(n)x_m(n),$$

gdzie $(\alpha_i(n))$, $i = 1, 2, \dots, m$ są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych. W oparciu o to twierdzenie i lemat 3 z pracy [b3] dotyczący własności minorów macierzy Casoratiego ciągów $x_1, x_2, \dots, x_m$ uzyskano także warunki dostateczne istnienia asymptotycznie wielomianowych rozwiązań równania $\Delta^m x(n) = f(n, x(n))$. Asymptotyczna wielomianowość rozwiązań równań różnicowych wyższych rzędów badana była również w pracach [b1] i [b2] oraz [b26]. W pracach tych sformułowano warunki dostateczne, przy których dla dowolnego wielomianu istnieje rozwiązanie badanego równania asymptotycznie z nim równoważne. W dowodach twierdzeń korzystano z twierdzenia o kontrakcji lub Twierdzenia Schaudera o punkcie stałym.

Praca [b18] poświęcona jest badaniu własności rozwiązań nieoscylujących równań różnicowych liniowych postaci $\Delta^m x(n) = \pm a(n)x(n+1)$. Wykazane zostało istnienie rozwiązań zbieżnych. Podane zostały też warunki dostateczne zbieżności do zera wszystkich rozwiązań nieoscylujących stopnia $l = 0$ (tzn. spełniających warunek $(-1)^j x_n \Delta^j x_n > 0$ dla $j = 0, 1, \dots, m-1$).

Z wyników dotyczących równań różnicowych z quasiróżnicami warto wymienić prace [a2], [a6] i [b11]. W pracy [a2] podane zostały warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązania minimalnego i maksymalnego równania $L_4 x(n) + f(n, x(n)) = 0$, gdy spełniony jest warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_k(n)} = \infty$, $k = 1, 2, 3$. Udowodnione w pracy twierdzenia są uogólnieniem (dla równania z quasiróżnicami) rezultatu uzyskanego przez B. G. Zhanga, S. S. Chenga w [67]. W pracy [a6] znalezione zostały kryteria ograniczoności wszystkich nieoscylujących rozwiązań nieliniowego równania różnicowego rzędu trzeciego z quasiróżnicami. Praca [b11] zawiera uogólnienie wyników uzyskanych w pracy [b7], dla ważnego w zastosowaniach równania różnicowego w tzw. postaci samodołączonej $\Delta(r_{n-1}\Delta x_{n-1}) + a_n f(x_{n-k}) = b_n$.

W 2002 r. w Changsha, w czasie międzynarodowej konferencji z cyklu ICDEA (International Conference on Difference Equations and Applications), nawiązałam współpracę z Guangiem Zhangiem. Jej efekty zostały opublikowane w 4 publikacjach dotyczących własności rozwiązań równań typu neutralnego. Z badań nad równaniami różnicowymi typu neutralnego $\Delta^m(x(n) + p(n)x(n-\tau)) + f(n, x(\sigma(n))) = 0$ wiadomo, że ich rozwiązania nieoscylujące mają istotnie różne własności dla $p(n) > -1$ i $p(n) < -1$. W pracy [a3] rozpatrywany był szczególny przypadek takiego równania, gdy $p(n) \equiv -1$, tj. równanie postaci

$$\Delta^m(x(n) - x(n-\tau)) + f(n, x(\sigma(n))) = 0.$$

Badane były (*)-monotoniczne rozwiązania tego równania. Ciąg x nazywamy (*)-monotonicznym, jeżeli spełnia warunki

$$x(n) > 0, \quad x(n) - x(n-\tau) \geq 0,$$

$$\Delta(x(n) - x(n-\tau)) \leq 0, \quad \dots, \quad (-1)^m \Delta^m(x(n) - x(n-\tau)) \geq 0 \quad \text{dla } m \geq 0.$$

Pokazano, że wszystkie (*)-monotoniczne rozwiązania powyższego równania można podzielić na 4 typy. Następnie udowodnione zostały warunki dostateczne bądź konieczne i dostateczne istnienia rozwiązań (*)-monotonicznych danego typu oraz wynikające z nich wnioski dla równań typu Emden-Fowlera. Podobne rezultaty dla równań różniczkowych zawarte są w pracy [b16]. W pracy [a5], badane jest równanie różniczkowe typu neutralnego z funkcją maksimum postaci $(x(t) - px(t - \tau))' = q(t)\max_{s \in [t-\sigma, t]} x(s)$ w nierozpatrywanym wcześniej przypadku, gdy $q(t) \geq 0$. Równania takie mają zastosowania w teorii sterowania. W pracy wykazano istnienie rozwiązań nieoscylujących gdy $p \geq 0$, podano ich własności asymptotyczne a także warunki dostateczne oscylacyjności wszystkich rozwiązań ograniczonych. Rezultaty te zostały zamieszczone w paragrafie 1 rozdziału 5 monografii D. Bainova, S.G. Hristovy [7], która ukazała się w 2011 roku. Praca [a7], zawiera podobne rezultaty dla równań różnicowych.

Badanie równań różnicowych typu neutralnego, kontynuowane w kolejnych latach, zaowocowało publikacjami [a4], [b19], [b23] i [b27]. W pracy [a4] rozpatrywane było równanie różnicowe pierwszego rzędu typu neutralnego z wieloma opóźnieniami. Przeprowadzono klasyfikację wszystkich rozwiązań nieoscylujących w zależności od ich własności asymptotycznych oraz znaleziono kryteria oscylacyjności rozwiązań badanego równania. Praca [b23] zawiera uogólnienie na równanie dowolnego rzędu, z opóźnionym argumentem i zmiennym współczynnikiem (p_n) , niektórych wyników uzyskanych w pracy [H4]. Korzystając z nierówności typu Bihariego otrzymano warunki dostateczne, przy których każde nieoscylujące rozwiązanie równania $\Delta^m(x(n) + p(n)x(n - \tau)) + f(n, x(\sigma(n))) = h(n)$ posiada własność $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^i x_n}{n^{m-i-1}} = \frac{c}{(m-i-1)!}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ gdzie c jest stałą rzeczywistą. W szczególności, z dowodu tego twierdzenia wynika fakt, że przy tych samych założeniach, powyższą własność posiada każde rozwiązanie równania nieneutralnego (tj, gdy $p(n) \equiv 0$.) Podobny rezultat został udowodniony wcześniej innymi metodami przez A. Gleską i J. Werbowskiego (Theorem 2, [21]). W pracy [21] zagadnienie asymptotycznej własności rozważanego równania sprowadzone zostało do zagadnienia ograniczoności rozwiązań równania różnicowego pierwszego rzędu.

Praca [b25] stanowi kontynuację badań (dla ujemnych warunków początkowych) własności rozwiązań równań różnicowych wymiernych postaci $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{b+cx_n x_{n-1}}$ podjętą w pracy [H8]. Dalsze badania równań wymiernych powyższej postaci, będące w fazie przygotowywania do druku, dotyczą przypadku, gdy współczynniki występujące w równaniu są ciągami 2-okresowymi.

4.2 Udział w konferencjach międzynarodowych i krajowych

Po uzyskaniu stopnia naukowego doktora brałam czynny udział w 22 międzynarodowych konferencjach naukowych. Poniżej zamieszczona jest lista konferencji z tytułami wystąpień.

1. The Fourth International Conference on Functional Equations and Inequalities, 1993, Krynica, Polska, *On the asymptotic properties of solutions higher order linear difference equations.*
2. ICDEA 1998, Fourth International Conference on Difference Equations and Applications, 27-31.08.1998, Poznań, Polska, *Some properties of solutions of a class of nonlinear difference equations.*

3. Colloquium on Differential and Difference Equations, 2000, Brno, Czechy, *Asymptotic behaviour of solutions of and nonlinear delay difference equations*.
4. The Third World Congress of Nonlinear Analysts, 19-26.07.2000, Catania, Włochy, *On the asymptotic behavior of solutions of higher order nonlinear difference equations*, (wykład na zaproszenie organizatorów).
5. Sixth International Conference on Difference Equations and Applications, 2001, Augsburg, Niemcy, *On the existence of monotonic solutions of some difference equations of higher order*.
6. Seventh International Conference on Difference Equations and Applications, 2002, Changsha, Chiny, (A Satellite Conference of the 2002 Beijing International Congress of Mathematicians), *Oscillation and nonoscillation results for higher order nonlinear difference equations*.
7. Colloquium on Differential and Difference Equations, 2002, Brno, Czechy, *Nonoscillatory solutions of some higher order nonlinear difference equation*.
8. 8th International Conference on Difference Equations and Applications, 2003, Brno, Czechy, *On a class of fourth order nonlinear difference equations* (również przewodniczyłam sesji).
9. The Forth World Congress of Nonlinear Analysts, 2004, Orlando, USA, *Oscillatory and asymptotic properties of solutions of higher-order difference equations of neutral type*, (wykład na zaproszenie organizatorów).
10. Conference on Differential and Difference Equations, 2005, Gdańsk, Polska, *Oscillation and Asymptotic Properties of Solutions of Higher Order Neutral Difference Equations*.
11. Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2006 (CDDEA 2006), 2006, Rajcke Teplice, Słowacja, *Oscillation of higher-order difference equations of mixed type*.
12. Progress on difference equations 2007, Laufen/Salzach, Niemcy, 2007, *Asymptotically polynomial solutions of higher order difference equations*.
13. International Conference on Difference Equations and Applications, 2007, Lizbona, Portugalia, *On a class of first-order nonlinear difference equations of neutral type*.
14. Conference on differential and difference equations and applications, Strecno, Słowacja, 2008, *Asymptotic properties of solutions of second-order rational difference equation*, (również przewodniczyłam sesji).
15. 14th International Conference on Difference Equations and Applications, Istambuł, Turcja, 2008, *Oscillatory and asymptotic properties of solutions of nonlinear neutral-type difference equations*.

16. Progress on difference equations, Będlewo, Polska, 2009, *Oscillations of higher order neutral difference equations*, (również przewodniczyłam sesji).
17. 7th ISAAC Congress London 2009, *Oscillatory and asymptotic properties of solutions of higher-order difference equations of neutral type*.
18. Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2010, Rajecke Teplice, Słowacja, 2010, *Asymptotically polynomial solutions of nonautonomous difference equations*.
19. Conference on Difference Equations and Applications, Ryga, Łotwa, 2010, *On the rational difference equation with period-two coefficient*.
20. Research Workshop of the Israel Science Foundation, Functional Differential Equations and Applications, August 29 - September 2, 2010, Ariel, Izrael, *Oscillatory and asymptotic properties of solutions of nonlinear neutral-type difference equations*.
21. Progress on Difference Equations, 2011, Dublin, Irlandia, *Asymptotic properties of solutions of difference systems with delays*.
22. International Conference on Differential Difference Equations and Applications, 2011, Ponta Delgada, Portugalia, *Asymptotic properties of solutions of linear difference equation with several delays and summation Volterra equations*.

Ponadto uczestniczyłam w 3 konferencjach krajowych:

1. Dwudziesta Ósma Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 1999, *On the asymptotic behaviour of solution of higher order nonhomogeneous difference equations*.
2. Drugie Forum Równań Różniczkowych Częstkowych, Będlewo, 2000, *Asymptotyczne własności rozwiązań nieliniowych równań różnicowych drugiego rzędu*.
3. Trzydziesta Czwarta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, 2005, *Własności rozwiązań równań różnicowych wyższych rzędów typu neutralnego*.

4.3 Recenzje artykułów naukowych

Recenzowałam 28 prac dla następujących czasopism:

- Abstract and Applied Analysis
- Applied Math. E-Notes
- Advances in Difference Equations
- Applied Mathematica Sinica
- Applied Mathematics Letters

- Communications in Pure and Applied Analysis
- Computers and Mathematics with Applications
- Demonstratio Mathematica
- Discrete Dynamics in Nature and Society
- Fasciculi Mathematici
- Fields Institute Communications
- International Journal of Pure and Applied Mathematics
- Journal of Applied Mathematics and Computing
- Journal of Computational and Applied Mathematics
- Journal of Mathematical Analysis and Applications
- Mathematica Slovaca
- Mathematical and Computer Modelling
- Portugaliae Mathematica. Nova Série
- Turkish Journal of Mathematics

Wykonałam 26 sterszczeń przeglądowych (tzw. reviews) dla Mathematical Reviews.

4.4 Sumaryczny Impact Factor, liczba cytowań i indeks Hirscha

Sumaryczny Impact Factor moich publikacji naukowych według listy *Journal Citation Reports* (JCR) zgodnie z rokiem opublikowania wynosi **4.686**, a według *Journal Citation Reports Science Edition 2010*: **12.550**.

Na podstawie bazy *Web of Science* (dane z „*Cited References Search*”) 27 moich prac cytowanych było łącznie **65** razy (**53** bez autocytowań) w 48 publikacjach.

Według bazy *Web of Science* (dane z „*General Search*”) h-index: **4**.

4.5 Udział w projektach badawczych

Granty w ramach badań własnych Politechniki Poznańskiej:
wykonawca:

- w 1998: *Metody matematyki dyskretnej*, kierownik dr hab. J. Popenda
- w latach 1999 – 2003: *Metody matematyki dyskretnej*, kierownik dr hab. B. Szmanda
- w latach 2001 – 2010: *Asymptotyczne własności rozwiązań równań różniczkowych i różnicowych*, kierownik prof. dr hab. J. Morchało

Granty statutowe Politechniki Poznańskiej:
wykonawca:

- w latach 1994 – 1999: *Równoważność asymptotyczna równań liniowych i nieliniowych*, kierownik zadania prof. dr hab. J. Werbowski
- w latach 2000 – 2011: *Jakościowa teoria równań funkcyjnych*, kierownik zadania prof. dr hab. J. Werbowski

5 Literatura

Literatura

- [1] R. P. Agarwal, *Difference equations and inequalities. Theory, Methods and Applications*, Marcel Dekker, New York 1992 (drugie rozszerzone wydanie 2000).
- [2] R. P. Agarwal, M. Bohner, S. R. Grace, D. O'Regan, *Discrete oscillation theory*, Hindawi Publishing Corporation, New York 2005.
- [3] R. P. Agarwal, S. R. Grace, *The oscillation of certain difference equations*, Math. Comput. Modelling 30(1999), 53–66.
- [4] R. P. Agarwal, S. R. Grace, *Oscillation of higher-order nonlinear difference equations of neutral type*, Appl. Math. Lett. 12 (1999), no. 8, 77–83.
- [5] R. P. Agarwal, S. R. Grace, D. O'Regan, *Oscillation theory for difference and functional differential equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000.
- [6] R. P. Agarwal, E. Thandapani, P. J. Y. Wang, *Oscillation of higher-order neutral difference equations*, Appl. Math. Lett. 10 (1997), 71–78.
- [7] D. Bainov, S.G. Hristova, *Differential Equations with Maxima*, Taylor Francis, 2011.
- [8] Y. Bolat, O. Akin, *Oscillatory behavior of a higher-order nonlinear neutral type functional difference equations with oscillating coefficients*, Appl. Math. Lett. 17 (2004) 1073–1078.
- [9] Y. Bolat, O. Akin, H. Yildirim *Oscillation criteria for certain even order neutral difference equation with an oscillating coefficient*, Appl. Math. Letters 22 (2009) 590–594.
- [10] R. K. Brayton, R. A. Willoughby, *On the numerical integration of a symmetric system of difference-differential equations of neutral type*, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967), 182–189.
- [11] E. Camouzis, G. E. Ladas, *Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures*, Advances in Discrete Mathematics and Applications, 5. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.
- [12] J. Čermák, *Asymptotic bounds for linear difference systems*, Adv. Difference Equ. Article ID 182696, (2010), 14 pages.

- [13] S. S. Cheng, *On a class of fourth order linear recurrence equations*, Internat. J. Math. and Math. Sci. 7 (1) (1984), 131–149.
- [14] S. K. Choi, N. J. Koo, H. S. Ryu, *Asymptotic equivalence between two difference systems*, Comput. Math. Appl. 45 (2003), 1327–1337.
- [15] C. Cinar, *On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1+bx_nx_{n-1}}$* , Appl. Math. and Comp. 156 (2004) 587–590.
- [16] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, *Boundedness of discrete Volterra equations*, J. Math. Anal. Appl. 211 (1997), no. 1, 106–130.
- [17] V. B. Demidovic, *A certain criterion for the stability of difference equations*, Diff. Urav. 5 (1969), 1247–1255.
- [18] A. Drozdowicz, J. Popenda, *Asymptotic behavior of solutions of the second order difference equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 99(1) (1987), 135–140.
- [19] A. Drozdowicz, J. Popenda, *Asymptotic behavior of the solutions of an n -th order difference equation*, Comment. Math. Prace Mat. 29 (2) (1990), 161–168.
- [20] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag New York, 1996.
- [21] A. Gleska, J. Werbowksi, *Comparison theorems for the asymptotic behavior of solutions of nonlinear difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 226 (1998), 456–465.
- [22] J. R. Graef, A. Miciano, P. Spikes, P. Sundaram, E. Thandapani, *Oscillatory and asymptotic behavior of solutions of nonlinear neutral-type difference equations*, J. Austral. Math. Soc. 38 (1996), 163–171.
- [23] J. R. Graef, E. Thandapani, *Oscillatory and asymptotic behavior of fourth order nonlinear delay difference equations*, Fasc. Math. 31 (2001), 23–36.
- [24] W. G. Kelly, A. C. Peterson, *Difference Equations*, Academic Press, Inc., Boston-San Diego 1991.
- [25] I. Kir, Y. Bolat, *Oscillation criteria for higher-order neutral delay difference equations with oscillating coefficients*, Int. J. Difference Equ. 2 (2006), 219–223.
- [26] V. L. Kocic, G. Ladas, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993.
- [27] M. R. S. Kulenovic, G. Ladas, *Dynamics of second order rational difference equations. With open problems and conjectures*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [28] G. Ladas, Y. G. Sficas, *Oscillations of neutral delay differential equations*, Canad. Math. Bull. 29 (1986), 438–445.
- [29] G. Ladas, Y. G. Sficas, *Oscillations of higher-order neutral equations*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 27 (1986) 502–511.

- [30] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, *Theory of difference equations: Numerical methods and applications*. Academic Press, Boston 1988.
- [31] B. S. Lalli, B. G. Zhang, *On existence of positive solutions and bounded oscillations of neutral difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 16 (1992), 272–287.
- [32] W. T. Li, S. S. Cheng, *Asymptotic trichotomy for positive solutions of a class of odd order nonlinear neutral difference equations*, Comput. Math. Appl. 35 (1998), no. 8, 101–108.
- [33] B. Liu, S. S. Cheng, *Monotone solutions of a higher order nonlinear difference equation with advancement*, Commun. Appl. Anal. 3 (1999), no. 3, 373–381.
- [34] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature Vol. 261 (1976), 459–467.
- [35] R. Medina, *Asymptotic properties of solutions of nonlinear difference equations*, J. Comput. Appl. Math. 70 (1996), no. 1, 57–66.
- [36] J. Migda, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear difference equations*, Math. Bohem. 129 (2004), no. 4, 349–359.
- [37] J. Migda, *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous difference equations*, Arch. Math.(Brno) 46 (2010), 1–11.
- [38] J. Migda, *Asymptotic properties of solutions of higher order difference equations*, Math. Bohem. 135 (2010), No 1, 29–39.
- [39] N. Parhi, A. K. Tripathy, *Oscillation of a class of nonlinear neutral difference equations of higher order*, J. Math. Anal. Appl. 284 (2003), 756–774.
- [40] O. Perron, *Über einen Satz des Herrn Poincaré*, (German) J. für Math. 136, (1909), 17–37.
- [41] O. Perron, *Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen*, (German) Math. Ann. 84 (1921), no. 1-2, 1–15.
- [42] H. Poincare, *Sur les Equations Lineaires aux Differentielles Ordinaires et aux Differences Finies*, (French) Amer. J. Math. 7 (1885), no. 3, 203–258.
- [43] J. Popena, J. Werbowksi, *On the asymptotic behaviour of the solutions of difference equations of second order*, Comment. Math. Prace Mat. 22 (1980), 135–142.
- [44] J. Popena, *On the asymptotic behaviour of the solutions of an n -th order difference equation*, Ann. Polon. Math., 44(1) (1984), 95–111.
- [45] J. Popena, *Asymptotic properties of solutions of difference equations*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 95(2) (1986), 141–153.

- [46] J. Popenda, E. Schmeidel, *On the asymptotic behavior of solutions of nonhomogeneous linear difference equations*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 28 3(1997), 319–327.
- [47] E. Schmeidel, B. Szmanda, *Oscillatory and asymptotic behavior of certain difference equation*, Nonlinear Anal. 47(2001), 4731–4742.
- [48] S. Stević, *More on a rational recurrence relation*, Appl. Math. E-Notes 4 (2004), 80–84.
- [49] P. Sundaram, *Oscillation criteria for even order neutral difference equations*, Bull. Cal. Math. Soc. 92 (2000), 81–86.
- [50] Z. Szafranski, B. Szmanda, *Oscillation theorems for some nonlinear difference equations*, Appl. Math. Comput. 83 (1997), 43–52.
- [51] B. Szmanda, *Note on the oscillation of certain difference equations*, Glas. Mat. 31(51)(1996), 115–121.
- [52] B. Szmanda, *Note on the behaviour of solutions of difference equations of arbitrary order*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 8 (1997), 52–59.
- [53] B. Szmanda, *Oscillatory and asymptotic behaviour of higher order difference equations*, Le Matematiche Vol. LII (1997), Fasc. I, pp. 169–176.
- [54] B. Szmanda, *Properties of solutions of higher order difference equations*, Math. Comput. Modelling 28 (10)(1998), 95–101.
- [55] X. H. Tang, J. S. Yu, D. H. Peng, *Oscillation and nonoscillation of neutral difference equations with positive and negative coefficients*, Comput. Math. Appl. 39 (2000), no. 7-8, 169–181.
- [56] W. E. Taylor, M. Sun, *Oscillation properties of nonlinear difference equations*, Port. Math., 52(1) (1995), 15–24.
- [57] E. Thandapani, P. Sundaram, J. R. Graef, A. Miciano, P. Spikes, *Classification of nonoscillatory solutions of higher order neutral type difference equations*, Arch. Math. (Brno) 31 (1995), 263–277.
- [58] E. Thandapani, M. M. S. Manuel, J. R. Graef, W. Spikes, *Monotone properties of certain classes of solutions of second-order difference equations*, Comput. Math. Appl. 36 (10-12)(1998), 291–297.
- [59] E. Thandapani, M. Arockiasamy, *Fourth-order nonlinear oscillations of difference equations*, Comput. Math. Appl. 42 (3-5)(2001), 357–368.
- [60] E. Thandapani, M. Arockiasamy, *Oscillatory and asymptotic properties of solution of nonlinear fourth order difference equations*, Glas. Mat. Ser. III (37) (2002), 119–131.

- [61] J. Yan, B. Liu, *Oscillatory and asymptotic behavior of fourth order nonlinear difference equations*, Acta Math. Sin., 13(1) (1997), 105–115.
- [62] X. Yang, W. Su, B. Chen, G. Megson, D. Evans, *On the recursive sequences*
 $x_n = \frac{ax_{n-1}+bx_{n-2}}{c+dx_{n-1}x_{n-2}}$, Appl. Math. Comp. 162 (2005), 1485–1497.
- [63] A. Zafer, R. S. Dahiya, *Oscillation of a neutral difference equation*, Appl. Math. Lett. 2 (1993), 71–74.
- [64] A. Zafer, *Oscillation of higher order neutral type difference equations*, Advances in difference equations, 641–647, Gordon and Breach, Amsterdam, 1997.
- [65] A. Zafer, *The existence of positive solutions and oscillation of solutions of higher-order difference equations with forcing term*, Advances in difference equations, II. Comput. Math. Appl. 36 (1998), 27–35.
- [66] A. Zafer, *Oscillation criteria for even order neutral differential equations*, Appl. Math. Lett. 11 (1998), 21–25.
- [67] B. G. Zhang, S. S. Cheng, *On a class of nonlinear difference equations*, J. Differ. Equations Appl. 1 (1995), 391–411.
- [68] Y. Zhou, *Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral difference equations with general coefficients*, Appl. Math. Letters 15 (2002), 785–791.
- [69] Y. Zhou, Y. Q. Huang, *Existence for nonoscillatory solutions of higher-order nonlinear neutral difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 280 (2003), 63–76.
- [70] Y. Zhou, B. G. Zhang *Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral delay difference equations with variable coefficients*, Comput. Math. Appl. 45 (2003), 991–1000.
- [71] Y. Zhou, *Oscillation of higher-order delay difference equations*, Adv. Difference Equ. 2006, Art. ID 65789, 7 pp.

Matgorzata Migda