

AUTOREFERAT

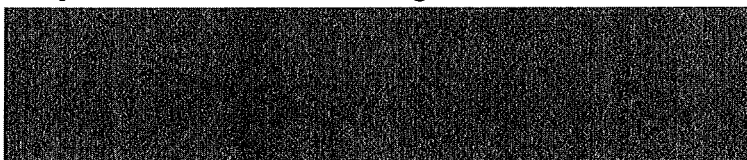
Spis treści

1. CV	2
2. WSTĘP	3
2.1. Ogólny opis dorobku naukowego	3
2.2. Ogólny cel i zakres badań dotyczących jednotematycznego cyklu publikacji	4
2.3. Podstawowe oznaczenia i definicje	5
2.4. Przegląd literatury	7
3. OMÓWIENIE GŁÓWNYCH WYNIKÓW JEDNOTEMATYCZNEGO CYKLU PUBLIKACJI	11
3.1. Klasy dodatnich operatorów liniowych dających lepszy rząd aproksymacji funkcji z wielomianowych przestrzeni wagowych	11
3.2. Uogólnienia operatorów liniowych i nieliniowych dla funkcji wielokrotnie różniczkowalnych w przestrzeniach z wielomianową funkcją wagową	13
3.3. Konstrukcje liniowych i nieliniowych operatorów obciętych w przestrzeniach funkcyjnych z wagą wielomianową	15
4. OMÓWIENIE POZOSTAŁEGO DOROBKU NAUKOWEGO	19
5. CYTOWANA LITERATURA	25
5.1. Prace autorskie lub współautorskie	25
5.2. Prace innych autorów	27

1. CV

I. Dane osobowe

Imię i nazwisko: Zbigniew Walczak



II. Przebieg nauki

1988-1993 Technikum Elektryczne w Zespole Szkół Górniczo-Energetycznych im. Stanisława Staszica w Koninie.

Technik elektryk o specjalności eksploatacja maszyn i urządzeń elektrycznych górnictwa odkrywkowego.

Data otrzymania tytułu technika: 30.05.1993 r.

1993-1998 Studia dzienne na kierunku Matematyka na Wydziale Budowy Maszyn i Zarządzania Politechniki Poznańskiej.

Tytuł pracy: *Aproksymacja funkcji 2π -okresowych w przestrzeniach L^p*

Promotor: dr hab. Lucyna Rempulska, prof. nadzw.

Data otrzymania tytułu zawodowego magistra: 04.05.1998 r.

1995-1997 Studium Pedagogiczne, Politechnika Poznańska

1999-2001 Przewód doktorski w Instytucie Matematyki Politechniki Poznańskiej (Jednostka Międzywydziałowa)

Tytuł rozprawy: *Aproksymacyjne własności pewnych operatorów liniowych*

Promotor: dr hab. Lucyna Rempulska, prof. nadzw.

Data nadania stopnia naukowego doktora: 21.06.2001 r.

Dziedzina: Nauki Matematyczne

Dyscyplina: Matematyka

Specjalność naukowa: Analiza matematyczna

III. Przebieg kariery zawodowej

1998-2001 Urząd Skarbowy w Turku:

Dział Podatku Dochodowego - na stanowisku starszego referenta,

Referat Kontroli Podatkowej - na stanowisku inspektora.

2001- Zakład Analizy Matematycznej Instytutu Matematyki Wydziału Elektrycznego Politechniki Poznańskiej - na stanowisku adiunkta

2. Wstęp

2.1. Ogólny opis dorobku naukowego

Pragnę nadmienić, że dziesięcioletni okres zatrudnienia na stanowisku adiunkta w Zakładzie Analizy Matematycznej Instytutu Matematyki Wydziału Elektrycznego Politechniki Poznańskiej jest całym okresem zatrudnienia w szkole wyższej i tylko w tym okresie mogłem w pełni poświęcić się badaniom naukowym.

Przedstawiony zostanie dorobek i osiągnięcia naukowe będące wkładem w badania z zakresu aproksymacji funkcji z klasycznych przestrzeni funkcyjnych ważnych w różnych działach analizy matematycznej, z uwzględnieniem osiągnięć, o których mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595, z późn. zm.), które stanowi jednotematyczny cykl publikacji.

Dorobek naukowy (szczegóły w załączniku) obejmuje rozprawę doktorską oraz 46 autorskich lub współautorskich publikacji naukowych. 17 z nich to publikacje w czasopismach znajdujących się w bazie ISI Web of Knowledge JCR Science Edition 2010 (tzw. lista filadelfijska czasopism). Warto podkreślić, że liczba publikacji naukowych powstałych po uzyskaniu stopnia naukowego doktora to 40 (w tym w czasopismach poświęconych teorii aproksymacji), z czego 16 w czasopismach z bazy ISI Web of Knowledge JCR Science Edition 2010. Uzyskane wyniki znalazły uznanie u innych autorów tzn. 38 autorów w 45 pracach cytuje je 58 razy oraz redaktorów renomowanych czasopism międzynarodowych, którzy powierzyli mi recenzowanie publikacji z tego działu matematyki. Nadmieniam, że znaczna część rezultatów prezentowana była także na konferencjach krajowych lub międzynarodowych oraz seminariach naukowych.

Swoje badania ukierunkowałem na konstruktywną teorię funkcji, a przede wszystkim aproksymację operatorami liniowymi. Sformułowałem i rozwiązałem kilka problemów w zakresie klasycznej teorii aproksymacji. Badania prowadziłem dla funkcji jednej i dwóch zmiennych.

W ostatnim czasie zacząłem coraz bardziej interesować się zastosowaniem operatorów liniowych i nieliniowych w różnych działach matematyki, a szczególnie analizie numerycznej, co wyrażają opublikowane wyniki.

W autoreferacie prace tworzące jednotematyczny cykl publikacji objęto numeracją z literą H, a pozostałą cytowaną literaturę - innymi literami ewentualnie z liczbą.

W skład jednotematycznego cyklu (o którym mowa w art. 16 ust. 2 wskazanej wyżej ustawy)

O aproksymacji funkcji jednej zmiennej w przestrzeniach z wagą wielomianową

wchodzą następujące publikacje:

- w czasopismach znajdujących się w bazie ISI Web of Knowledge JCR Science Edition 2010
 - [H1] Z. Walczak, On certain positive linear operators in weighted polynomial spaces, *Acta Math. Hungar.* 101(2003)3, 179-191. (IF 0.521)
 - [H2] Z. Walczak, On the rate of convergence for modified Baskakov operators, *Lithuanian Math. J.* 44(1)(2004), 102-107. (IF 0.486)
 - [H3] Z. Walczak, Approximation by some linear positive operators in polynomial weighted spaces, *Publ. Math. Debrecen* 64(3-4) (2004), 353-367. (IF 0.568)
 - [H4] Z. Walczak, On the rate of convergence for some linear operators, *Hiroshima*

- Math. J.* 35(1)(2005), 115-124. (IF 0.556)
- [H5] Z. Walczak, Error estimates and the Voronovskaya theorem for modified Szász-Mirakyan operators, *Math. Slovaca* 55(4)(2005), 465-476. (IF 0.316)
 - [H6] Z. Walczak, Remarks on the convergence of Bleimann, Butzer and Hahn type operators, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 16(1)(2009), 41-48. (IF 0.341)
 - [H7] Z. Walczak, Baskakov type operators, *Rocky Mountain J. Math.* 39(3)(2009), 981-993. (tylko Rozdziały 1. *Introduction* i 2. *Approximation of the function of one variable publikacji*) (IF 0.443)
 - [H8] Z. Walczak, Approximation theorems for a general class of truncated operators, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010), 2142-2148. (IF 1.534)
 - w innych czasopismach (poświęconych teorii aproksymacji)
 - [H9] Z. Walczak, Convergence of Szász-Mirakyan type operators, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.* 36(1)(2007), 107-113.
 - [H10] R.N. Mohapatra, Z. Walczak, Remarks on a class of Szász-Mirakyan type operators, *East J. Approx.* 15(2)(2009), 197-206.

2.2. Ogólny cel i zakres badań dotyczących jednotematycznego cyklu publikacji

Podjęta tematyka badawcza jest zgodna z badaniami prowadzonymi w różnych ośrodkach naukowych z zakresu aproksymacji funkcji rzeczywistych określonych na przedziale nieograniczonym operatorami liniowymi i nieliniowymi. Zasadnicze nurty badań z tej dziedziny, które zostaną opisane w przeglądzie literatury, obejmują przede wszystkim zagadnienia punktowej aproksymacji funkcji operatorami liniowymi.

W wyróżnionym cyklu publikacji główną uwagę skierowano na zdefiniowanie różnych klas operatorów (także nieliniowych) oraz zbadanie ich wybranych własności aproksymacyjnych. Ze względu na własności rozważanych operatorów liniowych i nieliniowych zastosowane zostały (szeroko stosowane) klasyczne metody dowodzenia twierdzeń aproksymacyjnych, w których tradycyjne problemy matematyki poddane zostały działaniu subtelnych i niekiedy bardzo trudnych technik analitycznych. Wybrane metody i techniki dowodowe pozwoliły badać w Rozdziale 3.1 aproksymację w metrykach rozważanych przestrzeni funkcyjnych. Można zauważyć, że w literaturze jest niewiele prac, w których podano twierdzenia aproksymacyjne przy zastosowaniu norm wielomianowych przestrzeni wagowych. Z kolei zastosowanie innego niż moduł ciągłości funkcji miernika aproksymacji (np. modułu gładkości funkcji) do sformułowania twierdzeń aproksymacyjnych nie poprawia otrzymanych w tych pracach wyników, ponieważ będą one zdominowane przez moduł ciągłości funkcji (z wyjątkiem pracy [H8]).

Wyniki uzyskane w jednotematycznym cyklu publikacji, będące istotnym wkładem w badania dotyczące aproksymacji funkcji, można podzielić w następujący sposób:

- 1) Klasy dodatnich operatorów liniowych dających lepszy rząd aproksymacji funkcji z wielomianowych przestrzeni wagowych (Prace [H1], [H5]).
- 2) Uogólnienia operatorów liniowych i nieliniowych dla funkcji wielokrotnie różniczkowalnych w przestrzeniach z wielomianową funkcją wagową (Prace [H2], [H4], [H6], [H8] i [H9]).
- 3) Konstrukcje liniowych i nieliniowych operatorów obciętych w przestrzeniach funkcyjnych z wagą wielomianową (Prace [H3], [H8], [H9] i [H10]).

2.3. Podstawowe oznaczenia i definicje

W autoreferacie ważniejsze definicje i twierdzenia opatrzone są kolejnymi numerami.

Przez M oznaczać będziemy stałe zależne ewentualnie od wskazanych parametrów, przy czym użycie jej w dwóch różnych związkach nie oznacza, że jest ona reprezentantem tej samej liczby.

Definicję i pewne własności przestrzeni z wielomianową funkcją wagową oraz pewne inne oznaczenia przyjmujemy jak w pracy M. Beckera [Bec]. I tak niech: $N := \{1, 2, \dots\}$, $N_0 := N \cup \{0\}$, $R := (-\infty, +\infty)$, $R_+ := (0, +\infty)$, $R_0 := R_+ \cup \{0\}$, $R_2 := [2, +\infty)$.

Definicja 1. Niech $p \in N_0$ będzie ustaloną liczbą i niech dla $x \in R_0$

$$(1) \quad w_0(x) := 1, \quad w_p(x) := (1 + x^p)^{-1}, \quad \text{gdzie } p \geq 1.$$

Wielomianową przestrzeń wagową $C_p \equiv C_p(R_0)$, związaną z funkcją wagową w_p , nazywamy zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych f ciągłych na R_0 , dla których fw_p jest funkcją jednostajnie ciągłą i ograniczoną na R_0 .

Z kolei przez B_p oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych f ciągłych na R_0 , dla których $f^{(k)}w_{p-k}$, $k = 0, 1, \dots, p$, są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi na R_0 oraz $f^{(p)}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą na R_0 , gdzie $f^{(k)}$ oznacza jak zwykle pochodną rzędu k funkcji f .

Ponadto, jak w pracy [Bec], dla ustalonych $m \in N$ i $p \in N_0$, definiujemy przestrzenie

$$C_p^m := \{f \in C_p : f^{(k)} \in C_p, \quad k = 1, 2, \dots, m\},$$

$$D_p := \{f \in C_p : f^{(k)} \in C_{p-k}, \quad k = 0, 1, \dots, p\}.$$

Dla funkcji z tychże przestrzeni norma określona jest wzorem

$$(2) \quad \|f\|_p \equiv \|f(\cdot)\|_p := \sup_{x \in R_0} w_p(x) |f(x)|.$$

Dla funkcji $f \in C_p$, $p \in N_0$, definiujemy moduł ciągłości i moduł gładkości rzędu 2 ([Bec], [Dev-Lor], [Tim]).

Definicja 2. Niech $f \in C_p$, $p \in N_0$. Modulem ciągłości funkcji f nazywamy funkcję $\omega_1(f; C_p; \cdot)$ określoną wzorem

$$\omega_1(f; C_p; t) := \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h f(\cdot)\|_p, \quad t \in R_0,$$

gdzie $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ dla $h, x \in R_0$.

Modulem gładkości drugiego rzędu danej funkcji f nazywamy funkcję

$$\omega_2(f; C_p; t) := \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h^2 f(\cdot)\|_p, \quad t \in R_0,$$

gdzie $\Delta_h^2 f(x) := f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$ dla $h, x \in R_0$.

Zachowując powyższe oznaczenia przedstawimy teraz definicję i pewne własności rozpatrywanej w autoreferacie przestrzeni funkcji dwóch zmiennych $C_{p,q}$ z wagą wielomianową.

Definicja 3. Niech $p, q \in N_0$ będą ustalonymi liczbami i niech

$$w_{p,q}(x, y) := w_p(x)w_q(y), \quad (x, y) \in R_0^2 := R_0 \times R_0,$$

gdzie $w_p(\cdot)$ jest funkcją określoną wzorem (1).

Wielomianową przestrzenią wagową $C_{p,q} \equiv C_{p,q}(R_0^2)$, związaną z funkcją wagową $w_{p,q}$, nazywamy zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych f ciągłych na R_0^2 , dla których $f w_{p,q}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą i ograniczoną na R_0^2 . Norma w $C_{p,q}$ określona jest wzorem

$$(3) \quad \|f\|_{p,q} \equiv \|f(\cdot, \cdot)\|_{p,q} := \sup_{(x,y) \in R_0^2} w_{p,q}(x, y) |f(x, y)|.$$

Ponadto, dla ustalonych $m \in N$ i $p, q \in N_0$, definiujemy przestrzeń

$$C_{p,q}^m := \left\{ f \in C_{p,q} : f_{x^j, y^{k-j}}^{(k)} \in C_{p,q}, \quad k = 1, 2, \dots, m \right\},$$

z normą określoną wzorem (3), gdzie $f_{x^j, y^{k-j}}^{(k)}$ oznacza jak zwykle pochodną cząstkową funkcji f .

Definicja 4. Niech $f \in C_{p,q}$, $p, q \in N_0$. Modułem ciągłości tej funkcji f nazywamy funkcję $\omega_1(f; C_{p,q}; \cdot, \cdot)$ określoną wzorem

$$\omega_1(f; C_{p,q}; t, s) := \sup_{\substack{0 \leq h \leq t \\ 0 \leq \delta \leq s}} \|\Delta_{h,\delta} f(\cdot, \cdot)\|_{p,q}, \quad t, s \in R_0,$$

gdzie $\Delta_{h,\delta} f(x, y) := f(x+h, y+\delta) - f(x, y)$ dla $h, \delta \in R_0$, $(x, y) \in R_0^2$.

Przedstawimy teraz definicję przestrzeni C_q z wagą wykładniczą zamieszczoną w pracy [Be-Ku-Ne].

Definicja 5. Niech $q \in R_+$ będzie ustaloną liczbą i niech

$$v_q(x) := e^{-qx}, \quad x \in R_0.$$

Wykładniczą przestrzenią wagową $C_q \equiv C_q(R_0)$, związaną z funkcją wagową v_q , nazywamy zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych f , ciągłych na R_0 , dla których $f v_q$ jest funkcją jednostajnie ciągłą i ograniczoną na R_0 . Norma w C_q określona jest wzorem

$$(4) \quad \|f\|_q \equiv \|f(\cdot)\|_q := \sup_{x \in R_0} v_q(x) |f(x)|.$$

Ponadto, dla ustalonego $m \in N$, niech

$$C_q^m := \left\{ f \in C_q : f^{(k)} \in C_q \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, m \right\}$$

i niech normę w tej przestrzeni określa wzór (4).

Moduł ciągłości dla funkcji $f \in C_q$, $q \in R_+$, definiujemy analogicznie jak w wielomianowej przestrzeni wagowej.

2.4. Przegląd literatury

Za twórcę podstaw teorii aproksymacji można uznać rosyjskiego matematyka Czebyszewa, który ponad 150 lat temu sformułował i badał zagadnienie istnienia wielomianów najmniej odległych od danej funkcji.

Jednym z pierwszych problemów w tym obszarze było zagadnienie polegające na znalezieniu w klasie wielomianów algebraicznych stopnia $n-1$ wielomianu najlepiej przybliżającego funkcję $f(x) = x^n$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązując powyższe zagadnienie Czebyszew zdefiniował wielomiany $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, zwane obecnie wielomianami Czebyszewa, szeroko stosowane w przeszłości jak i obecnie w jednostajnej aproksymacji funkcji.

Początki teorii aproksymacji funkcji związane są także z nazwiskami K. Weierstrassa, S. N. Bernsteina, L. Fejera i D. Jacksona. To właśnie pod koniec XIX i na początku XX wieku sformułowano podstawowe problemy aproksymacji funkcji ciągłych. Autorzy m. in. wykazali, że każdą funkcję ciągłą, na przedziale domkniętym i ograniczonym, można przybliżyć wielomianem algebraicznym (trygonometrycznym) z dowolnym, z góry zadany, rzędem dokładności. Ważne było również zagadnienie efektywnego otrzymania operatorów przybliżających daną funkcję z zadaną dokładnością. Ponadto badania skierowano na problemy oszacowania szybkości zbieżności do danej funkcji ciągu wielomianów ją aproksymujących.

Badania w zakresie teorii aproksymacji funkcji motywowane były jej zastosowaniami w innych dyscyplinach matematycznych (w szczególności w analizie matematycznej, analizie funkcjonalnej, teorii równań różniczkowych). Na rozwój tej dyscypliny matematycznej miały wpływ także inne dyscypliny naukowe. Pragnę wspomnieć o szerokich zastosowaniach szeregów Fouriera w fizyce i technice. Badanie wielu problemów granicznych w tym zakresie sprowadza się do badania zagadnień aproksymacyjnych. Wzajemne przenikanie się teorii aproksymacji funkcji i innych dyscyplin naukowych jest obecnie szczególnie zauważalne dzięki analizie i zagadnieniom numerycznym. Na przykład wielomiany Bernsteina znalazły szerokie zastosowania m. in. w grafice komputerowej.

Ze względu na intensywny i wielowątkowy rozwój tej dziedziny wyrażający się dużą liczbą publikacji przegląd literatury ograniczę do wyników mających największy wpływ na moje zainteresowania i osiągnięcia naukowe.

Zagadnienia dotyczące aproksymacji funkcji rzeczywistych operatorami liniowymi zebrano i opisano m. in. w następujących monografiach w kolejności chronologicznej: N. I. Achiezer [Ach] w 1957, P. P. Korovkin [Kor] w 1960, G. Meinardus [Mei] w 1968, P. L. Butzer i R. J. Nessel [But-Nes] w 1971, R. A. DeVore [Dev] w 1972, R. A. DeVore i G. G. Lorentz [Dev-Lor] w 1993, R. Păltănea [Pă1] w 2004. W swoich poszukiwaniach i badaniach naukowych korzystałem także obficie z [Dit-Tot], [Tab4], [Ple] i [Gut-Kud-Lew].

Rozwój i kierunki badań dotyczące aproksymacji funkcji operatorami liniowymi wyznaczony został w licznych publikacjach i rozprawach naukowych. Wśród wielu publikacji pragnę kilka wyróżnić i opisać.

Wybrane problemy dotyczące aproksymacji funkcji operatorami liniowymi sformułowano i rozwiązano m. in. w następujących pracach doktorskich: M. Skorupka [Sko], M. Herzog [Herz2], A. Holhoş [Hol].

W pracy [Mir] G. Mirakjan dla funkcji f ciągłych i ograniczonych na R_0 definiuje operatory liniowe następującej postaci $S_n(f; x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Wyniki przedstawione

przez wyżej wymienionego autora rozwinęli J. Favard [Fav] i O. Szász [Szá]. Operatory S_n nazywane są obecnie operatorami Szásza-Mirakjana.

M. Becker w pracy [Bec] badał aproksymację funkcji ciągłych f z wielomianowych przestrzeni wagowych C_p operatorami Szásza-Mirakjana S_n i podał dla nich proste i odwrotne twierdzenia aproksymacyjne dotyczące aproksymacji punktowej oraz twierdzenie typu Woronowskiej.

W pracach [But], [Herm], [Tot1] odnajdujemy także twierdzenia dotyczące rzędu aproksymacji funkcji operatorami Szásza-Mirakjana.

V. Totik w pracy [Tot2] rozpatrywał odpowiedniki operatorów S_n dla funkcji ciągłych i ograniczonych dwóch zmiennych. Rezultaty te są nadal rozwijane, czego świadectwem są np. prace [Ta-Ol-Ba], [Taş-Bui], [Mur], [Fir-Leş-Rem], [Isp-Ata], [Deo] i [Dir-Dem].

W pracy [Be-Ku-Ne] M. Becker, D. Kucharski i R. Nessel badali własności aproksymacyjne operatorów S_n w wykładniczych przestrzeniach wagowych C_q , $q \in R_+$. Autorzy pracy [Be-Ku-Ne] wykazali, że klasyczny operator Szásza-Mirakjana nie jest operatorem z C_q do C_q , ale S_n jest operatorem działającym z przestrzeni C_q do C_r pod warunkiem, że $r > q > 0$ i $n > n_0 > q(\ln(r/q))^{-1}$.

Wyniki przedstawione przez wyżej wymienionych autorów były i są nadal rozwijane i uogólniane. Wprowadzone zostały liczne modyfikacje operatorów Szásza-Mirakjana S_n i zbadane dla nich podstawowe zagadnienia aproksymacyjne, do których należą rzędy aproksymacji funkcji.

Interesujące uogólnienie operatorów S_n podane jest w pracy D. D. Stancu [Sta]. W 2001 roku Z. Finta w pracy [Fin2] udowodnił proste twierdzenie aproksymacyjne dla operatorów wprowadzonych przez wyżej wymienionego autora dla każdej funkcji f ciągłej i ograniczonej na R_0 .

A. Lupaş ([Lup]) oraz O. Agratini ([Agr1]) zajmowali się inną modyfikacją operatorów S_n , będącą szczególnym przypadkiem operatora zdefiniowanego przez D. D. Stancu ([Mas, s. 250]).

Warto podkreślić, że duży wkład do tej teorii wnieśli O. Duman i M. Ali Özarslan. O. Duman i M. Ali Özarslan w pracy [Dum-Öza] z 2007 roku badając własności aproksymacyjne

operatorów $D_n(f; x) := e^{-nu_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nu_n(x))^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$, gdzie $u_n(x) = \frac{-1 + \sqrt{4n^2x^2 + 1}}{2n}$, $x \in R_0$,

$n \in N$, wykazali proste twierdzenie aproksymacyjne dla każdej funkcji f ciągłej i ograniczonej na R_0 . Autorzy pracy [Dum-Öza] podali także twierdzenie typu Woronowskiej. W kolejnej pracy z 2008 roku [Öza-Dum] M. Ali Özarslan i O. Duman rozwinęli powyższy wynik, korzystając z modułu gładkości funkcji.

Ç. Atakut i İ. Büyükyazıcı ([Ata-Büy]) zajmują się innym operatorem typu Szásza-Mirakjana,

mianowicie $P_{n,\beta}^{\alpha,\beta}(f; x) := \frac{e^{-nt}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nt) f\left(x + \frac{k + \alpha}{n + \beta}\right)$, gdzie $p_k(x)$ jest wielomianem Apella

zdefiniowanym wzorem $g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k$ dla funkcji analitycznej $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$

($R > 1$), $g(1) \neq 0$ i $\alpha, \beta \geq 0$.

Aproksymacja funkcji f z wielomianowej przestrzeni wagowej C_p , $p \in N_0$, operatorami

$$\text{typu Szásza-Mirakjana } B_n(f; x) := \frac{1}{1 + \sinh(nx)} \left\{ f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!} f\left(\frac{2k+1}{n}\right) \right\}, \quad x \in R_0,$$

$n \in N$, badana była m. in. przez L. Rempulską i M. Skorupkę w pracy [Rem-Sko1]. Autorki przedstawiły proste twierdzenia aproksymacyjne dla operatorów B_n dotyczące aproksymacji punktowej. Z twierdzeń tych wynika, że rząd aproksymacji funkcji operatorami B_n jest równy rządowi aproksymacji tej funkcji klasycznymi operatorami Szásza-Mirakjana S_n .

Zagadnieniami punktowej i normowej zbieżności operatorów związanych z funkcjami hiperbolicznymi i wielomianami Apella zajmowała się także A. Ciupa ([Ciu1], [Ciu5]).

Włączając się w powyższy nurt badań E. Wachnicki i M. Herzog ([Herz1], [Herz2]) zaproponowali interesującą modyfikację operatorów S_n wykorzystującą zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju.

Interesującym modyfikacjom operatorów Szásza-Mirakjana poświęcone są także prace [Fin-Gov-Gup], [Moh-Has], [Vec-Mas-Sza], [Dum-Öza-Vec], [Isp2], [Rem-Gra], [Leś-Rem].

Podobnymi badaniami zostały objęte operatory zdefiniowane przez V. A. Baskakova

$$([Bas]) \quad V_n(f; x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \text{ Tymi zagadnieniami zajmowali się m. in.}$$

M. Becker, F. Guo, V. Gupta, J. A. Alkemade, H. S. Kasana, P. N. Agrawal, N. Ispir, A. Wafi, S. Khatoon, L. Rempulska, M. Skorupka ([Bec], [Guo], [Gup], [Alk], [Kas-Agr-Gup], [Isp1], [Waf-Kha1], [Waf-Kha1], [Rem-Sko2]).

W 1980 roku Bleimann, Butzer i Hahn [Bl-Bu-Ha] zdefiniowali ciąg operatorów liniowych postaci $L_n^{[1]}(f; x) := (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) x^k$, $x \in R_0$, $n \in N$. Operatory $L_n^{[1]}$ (operatory BBH) zostały zbadane w pracy [Bl-Bu-Ha] dla funkcji f ciągłych i ograniczonych na R_0 . Wyniki przedstawione przez wyżej wymienionych autorów były i są nadal rozwijane.

Dla przykładu przedstawię kilka szczegółowych wyników opublikowanych w latach 1984-2009.

W 1984 roku V. Totik [Tot3] podał twierdzenie typu Woronowskiej dla operatorów $L_n^{[1]}$. Interesujące uogólnienie rezultatu V. Totika przedstawił w 1996 roku U. Abel [Abe1]. Z opublikowanych twierdzeń wynika, że rząd aproksymacji funkcji $f \in C_1^\infty$ z wagą wielomianową w_1 operatorami $L_n^{[1]}$ jest postaci $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

U. Abel w pracy [Abe2] badał również odpowiedniki operatorów $L_n^{[1]}$ dla funkcji dwóch zmiennych.

H. M. Srivastava i V. Gupta ([Sri-Gup]) zajmowali się modyfikacją typu Béziera operatorów $L_n^{[1]}$.

Warto podkreślić, że wkład w rozwój teorii aproksymacji funkcji operatorami typu Béziera ma P. Pych-Taberska i jej współpracownicy. W ostatnich latach wspomniani autorzy opublikowali kilka interesujących prac poświęconych operatorom typu Béziera (m.in. [Pych], [Ani-Pych], [Pych-Kar] i [Kar-Pych]).

W 1985 roku C. Jayasri i Y. Sitaraman ([Jay-Sit]) opisali własności aproksymacyjne operatorów BBH w przestrzeniach funkcyjnych z wagą wielomianową. U. Abel i M. Ivan w pracy [Abe-Iva1] badali modyfikację typu Kantorowicza operatorów BBH. Modyfikacja typu

Kantorowicza operatorów BBH badana była również w 2008 roku w pracy [Zen-Abe-Iva] X. M. Zenga, U. Abela i M. Ivana. Z kolei problemami aproksymacji funkcji o ograniczonej wariacji operatorami BBH zajmowali się: S. Gu [Gu], V. Gupta i O. Dođru [Gup-Doğ].

Wśród wielu rezultatów wyznaczających aktualne kierunki badań warto wyróżnić kilka wątków.

Pierwszy dotyczy aproksymacji funkcji wielokrotnie różniczkowalnych operatorami liniowymi. Włączając się w ten nurt G. H. Kirov [Kir] i Z. Finta [Fin1] badali aproksymację funkcji ciągłej na przedziale domkniętym i ograniczonym operatorami typu Bernsteina. Autorzy zdefiniowali operatory poprawiające rząd aproksymacji funkcji r -krotnie różniczkowalnych. Takimi zagadnieniami dla funkcji jednej lub dwóch zmiennych zajmowali się także: L. Popowa, G.A. Anastassiou, R.A. Medei, U. Abel, B. D. Vecchia, L. Rempulska, M. Skorupka, K. Tomczak, A. Ciupa, S. K. Serenbay, E. İbikli, N. Mammadova ([Kir-Pop], [Ana-Mez], [Abel-Vec], [Rem-Sko3], [Rem-Sko5], [Rem-Sko6], [Rem-Tom], [Ciu3], [Ser-İbi], [Mam]).

Drugi nurt badań związany jest analizą błędów występujących w analizie matematycznej, a w szczególności błędów obcięcia występujących w zagadnieniach numerycznych. Zauważmy, że często funkcje występujące we wzorach matematycznych dane są w postaci ciągów lub szeregów nieskończonych. Ponadto wiele równań matematycznych można rozwiązać jedynie przez opis procesów nieskończonych, których granice są poszukiwanymi rozwiązaniami. Jednak na ogół przy procesach nieskończonych powstaje konieczność zakończenia obliczeń na pewnej skończonej liczbie wyrazów, ponieważ komputery nie mogą wykonywać nieskończonej liczby działań matematycznych. Oczywiście przerwanie obliczeń powoduje powstanie błędu, który nazywamy błędem obcięcia. Wielkość takiego błędu, w obszarze zagadnień badanych w cyklu publikacji, można ograniczyć definiując operatory dające lepszy rząd aproksymacji. Fakt ten uzasadnia celowość wprowadzania i badania nowych klas operatorów. W naturalny sposób podjęto badania nad operatorami, które nie będą źródłem błędów obcięcia. Oczywiście, takimi operatorami są m. in. operatory BBH.

Warto podkreślić, że duży wkład do tej teorii wniósł J. Gröf [Grö] definiując w wykładniczej

przestrzeni wagowej C_q , $q \in N$, operatory $S_{n,N}(f;x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^N \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \in N$, $x \in R_0$,

gdzie $(N(n))_1^\infty$ jest ciągiem liczb całkowitych dodatnich spełniającym warunek

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n} = \infty$. Autor pracy [Grö] wykazał, że $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,N}(f;x) = f(x)$, $f \in C_q$, $q \in N$, $x \in R_0$.

Wyniki te następnie rozwinęli: H. G. Lehnhoff [Leh], S. Xiehua [Xie],

Badania w zakresie operatorów obciętych prowadzili także: E. Omei [Ome], G. Zhou i S. Zhou [Zho-Zho], J. Wang, S. Zhou [Wan-Zho], O. Agratini [Agr2]. Autorzy tych prac pokazali, że problem definiowania i badania operatorów obciętych na przedziale nieograniczonym jest nietrywialny. Na przykład E. Omei w pracy [Ome] wykazał, że

w przestrzeniach funkcyjnych z wagą wykładniczą jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N-nx}{\sqrt{n}} = M$, to

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,N}(f;x) = \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{M/\sqrt{x}} e^{-u^2/2} du$, $f \in C_q$, $q \in R_+$, $x \in R_+$ (tzn. nie każdy ciąg operatorów

obciętych $\{S_{n,N}(f)\}_1^\infty$ jest zbieżny punktowo do f). Warto podkreślić, że zagadnienia te szerzej opisali L. Xie i T. Xie w pracy z 2008 roku [Xie-Xie].

Trzeci wątek badań (dopiero rozwijanych) dotyczy operatorów nieliniowych. Znaczny wkład w rozwój tych badań ma m. in. C. Bardaro, I. Mantellini, L. Rempulska, A. Thiel ([Bar-Man1], [Rem-Thi]). Prowadzenie takich badań wymaga zazwyczaj stosowania bardziej

subtelnych metod dowodowych, a wyniki tak uzyskane pozwalają uzyskać dodatkowe wnioski.

Oprócz wskazanych wyżej zagadnień punktowej i normowej zbieżności operatorów dyskretnych i całkowych istotnym wątkiem badań jest aproksymacja w mocnym sensie. Wiele publikacji z tego zakresu nawiązuje do badań L. Leindlera ([Lei]) i R. Taberskiego ([Tab1], [Tab2], [Tab3]). Problematyką aproksymacji w mocnym sensie zajmowali się m. in. następujący matematycy: W. Łenski, B. Szal, L. Rempulska, M. Górzeńska, M. Leśniewicz, M. Skorupka ([Łen1], [Łen2], [Łen3], [Łen4], [Łen5], [Łen-Tab], [Łen-Sza1], [Łen-Sza2], [Gór-Leś-Rem], [Rem-Sko2], [Rem-Sko4]).

3. Omówienie głównych wyników jednotematycznego cyklu publikacji

Można podkreślić, że prace tworzące wyróżnione nurty badań osiągnięcia o którym mowa w art. 16 ust. 2 wskazanej ustawy, łączą nie tylko cele, ale i wybrane metody oraz techniki dowodowe.

Z uwagi na przejrzystość i zwięzłość prezentacji w tej części autoreferatu podane zostaną wybrane definicje, twierdzenia, wnioski i uwagi z wyróżnionych publikacji.

3.1. Klasy dodatnich operatorów liniowych dających lepszy rząd aproksymacji funkcji z wielomianowych przestrzeni wagowych

Celem moich badań było poprawienie wyżej wspomnianych wyników dotyczących aproksymacji funkcji dodatnimi operatorami liniowymi. W omawianym przeze mnie cyklu publikacji zdefiniowane zostały dodatnie operatory liniowe dające lepszy rząd aproksymacji funkcji z przestrzeni C_p z wagą wielomianową w_p . Ponadto twierdzenia dowodzone dla tak definiowanych operatorów dotyczą aproksymacji globalnej, tzn. aproksymacji w metrykach rozważanych przestrzeni funkcyjnych.

W wielomianowych przestrzeniach wagowych, bazując na rozwinięciu funkcji

$$(5) \quad g(t, r) := \begin{cases} \frac{1}{t^r} \left(e^t - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{t^j}{j!} \right), & t \in R_+, \\ \frac{1}{r!}, & t = 0, \end{cases}$$

$r \in N$, w szereg potęgowy, zdefiniowano kilka klas operatorów liniowych.

W pracy [H1] przeprowadzono badania nad klasą operatorów liniowych wprowadzonych następującą definicją.

Definicja 6. ([H1], Definition) Niech $r \in N$ i $p \in N_0$ będą ustalonymi liczbami. Dla funkcji $f \in C_p$ określamy operatory

$$A_n(f; r; x) := \frac{1}{g((nx+1)^2; r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} f\left(\frac{k+r}{n(nx+1)}\right), \quad x \in R_0, \quad n \in N.$$

W pierwszej części pracy wykazane są lematy, z których wynika, że operatory A_n są dodatnimi operatorami liniowymi działającymi z wielomianowej przestrzeni wagowej C_p do tej samej przestrzeni C_p . Pragnę nadmienić, że ostatnia własność nie jest oczywista w wagowych przestrzeniach funkcyjnych (patrz Rozdział 2.4 powyżej). Więcej uwag na ten temat podamy w dalszej części autoreferatu.

Celowość wprowadzonej w rozprawie konstrukcji szczególnie wyraźnie pokazuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. ([H1], Theorem 2) *Niech $p \in N_0$ i $r \in N$ będą ustalonymi liczbami. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, r)$ taka, że dla każdej funkcji $f \in C_p$ z wagą wielomianową w_p i $n \in N$ mamy*

$$\|A_n(f; r) - f\|_p \leq M \omega_1\left(f; C_p; \frac{1}{n}\right).$$

Z powyższego twierdzenia wyprowadzono wniosek.

Wniosek 1. ([H1], Corollary 2) *Dla każdej funkcji $f \in C_p^1$ z wagą wielomianową w_p , $p \in N_0$ i $r \in N$ mamy*

$$\|A_n(f; r) - f\|_p = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Uzupełnieniem powyższego twierdzenia i wniosku jest następujące twierdzenie typu Woronowskiej.

Twierdzenie 2. ([H1], Theorem 3) *Niech funkcja $f \in C_p^1$ z ustalonym $p \in N_0$ oraz niech $r \in N$ będzie ustaloną liczbą. Wówczas dla każdego $x \in R_+$ mamy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{A_n(f; r; x) - f(x)\} = f'(x).$$

Warto zauważyć, że w pracy [H1] (Remark 1) wprowadzono modyfikację typu Kantorowicza operatorów A_n przyjmując następującą definicję:

$$\bar{A}_n(f; r; x) := \frac{1}{g((nx+1)^2; r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} n(nx+1)^{\frac{(k+1+r)/(n(nx+1))}{(k+r)/(n(nx+1))}} \int f(t) dt.$$

Praca [H1] jest cytowana m.in. w [Bus-Mor], [Wa-Li-Xi], [Pă12], [Pă13] i [Hol].

Ten nurt badawczy był kontynuowany w pracy [H5]. W pracy [H5] badane były następujące operatory liniowe.

Definicja 7. ([H5]) *Niech $p \in N_0$ będzie ustaloną liczbą. Dla funkcji $f \in C_p$ określamy operatory*

$$A_n(f; r, q; x) := e^{-(n^q x + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^q x + 1)^{rk}}{k!} f\left(\frac{k}{n^q (n^q x + 1)^{r-1}}\right), \quad x \in R_0, n \in N, q \in R_+, r \in R_2.$$

Operatory A_n są dodatnie, liniowe, ograniczone i prowadzą z przestrzeni C_p w C_p (Lemma 3).

Twierdzenia udowodnione dla tak zdefiniowanych operatorów dotyczą również aproksymacji w metrykach rozważanych przestrzeni funkcyjnych. Przytoczę teraz jedno z nich.

Twierdzenie 3. ([H5], Theorem 3) *Niech funkcja $f \in C_p^1$ z ustalonym $p \in N_0$ oraz niech $r \in R_2$, $q \in R_+$ będą ustalonymi liczbami. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, r)$ taka, że dla $n \in N$ mamy*

$$\|A_n(f; r, q) - f\|_p \leq \frac{M}{n^q} \|f'\|_p.$$

W pracy [H5] wyprowadzono wniosek, że rząd aproksymacji funkcji $f \in C_p^1$ n -tym operatorem $A_n(f; r, q)$ jest postaci $O\left(\frac{1}{n^q}\right)$. To oznacza, że zamieszczonych w pracy twierdzeń aproksymacyjnych nie można uzyskać jako wniosku z innych wyników, ponieważ rząd zbieżności ciągu $\{A_n(f; r, q)\}_1^\infty$ do funkcji aproksymowanej f nie zależy od parametru r . Precyzyjną formą powyższej uwagi jest twierdzenie typu Woronowskiej orzekające w szczególności, że jeżeli $f \in C_p^1$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{A_n(f; r; 1; x) - f(x)\} = f'(x).$$

W [H5] zauważono także, że analogiczne własności aproksymacyjne mają otrzymane na podstawie Definicji 7 klasy operatorów typu Kantorowicza i Durrmeyera. Pragnę nadmienić, że praca [H5] cytowana jest przez C. Bardaro i I. Mantellini w pracy [Bar-Man1] oraz A. Holhoşa w streszczeniu głównych tez jego pracy doktorskiej [Hol].

Wyżej podane twierdzenia pokazują, że otrzymane rezultaty są istotnie lepsze od większości poprzednio opisanych (patrz Rozdział 2.4 powyżej), ponieważ rząd aproksymacji funkcji z przestrzeni C_p z wagą wielomianową operatorami A_n jest lepszy od rzędu aproksymacji tej funkcji operatorami rozważanymi np. w pracach [Bec], [Dum-Óza], [Óza-Dum], [Herz1], [Herz2], [Sko], [Fin1], [Fin2] i [Rem-Gra].

Opisane wyżej metody konstruowania operatorów liniowych zostały zastosowane w kilku opublikowanych później pracach, czego świadectwem są prace [Ciu5], [Wal8], [Wal9] i szereg innych.

3.2. Uogólnienia operatorów liniowych i nieliniowych dla funkcji wielokrotnie różniczkowalnych w przestrzeniach z wielomianową funkcją wagową

Wśród wielu definicji operatorów liniowych wprowadzonych w ostatnich latach, warto wyróżnić takie konstrukcje, które dla funkcji wielokrotnie różniczkowalnych dają istotnie lepszy rząd aproksymacji. Tym zagadnieniom poświęcone są prace [H2], [H4], [H6], [H8] i [H9].

Ponieważ badania prowadzone w pracach [H8] i [H9] są wielowątkowe, dbając o przejrzystość prezentacji, prace te zostaną omówione na końcu Rozdziału 3.3.

Ważne ze względu na późniejsze zastosowania idei i metod dowodowych były badania w pracy [H2], która dotyczy uogólnienia klasycznego operatora Baskakowa V_n (patrz Rozdział 2.4 powyżej) oraz [H4], poświęconej operatorom bazującym na rozwinięciu w szereg potęgowej funkcji $g(t; r)$ (patrz Rozdział 3.1 powyżej).

Własności aproksymacyjne operatorów Baskakowa znane są w literaturze od wielu lat. W szczególności z opublikowanych twierdzeń wynika ([Bec]), że rząd aproksymacji funkcji

$f \in C_p^r$, $r \geq 2$, operatorami V_n jest postaci $O\left(\frac{1}{n}\right)$. W naturalny sposób podjęto badania nad modyfikacją operatora Baskakowa, która zapewniałaby istotną zmianę rzędu aproksymacji funkcji przy zmianie jej własności różniczkowych. Zagadnienie to rozwiązano przyjmując następującą definicję.

Definicja 8. ([H2], Definition) Niech $p \in N$ będzie ustaloną liczbą. Dla funkcji $f \in B_p$ wprowadzamy operatory

$$L_n(f; p; x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{k} x^k (1+x)^{-n-k} \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{k}{n}\right) \left(x - \frac{k}{n}\right)^j}{j!}, \quad x \in R_0, n \in N.$$

W pierwszej części pracy zamieszczony jest lemat z którego wynika, że operatory L_n są ograniczone na przestrzeni B_p . Następnie znajdujemy twierdzenia o rzędach aproksymacji funkcji $f \in B_p$ operatorami L_n .

Twierdzenie 4. ([H2], Theorem 1) Niech funkcja $f \in B_{2p+1}$ z ustalonym $p \in N_0$. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p)$ taka, że dla $x \in R_0$ i $n \in N$ mamy

$$w_{2p+1}(x) |L_n(f; 2p+1; x) - f(x)| \leq \frac{M}{n^p} (1+x) \omega_1\left(f^{(2p+1)}; C_0; \frac{1}{n}\right).$$

Twierdzenie 5. ([H2], Theorem 2) Niech funkcja $f \in B_{2p+2}$ z ustalonym $p \in N_0$. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p)$ taka, że

$$\|L_n(f; 2p+2) - f\|_{2p+2} \leq \frac{M}{n^{p+1}} \|f^{(2p+2)}\|_0, \quad n \in N.$$

Praca [H2] jest cytowana przez J. Wanga ([Wan]).

Ten wątek badawczy był kontynuowany w pracy [Wal-Gup2].

W pracy [H4] zbadano własności aproksymacyjne następującej klasy operatorów.

Definicja 9. ([H4], Definition) Niech $p, r \in N$ i $s \in R_+$ będą ustalonymi liczbami. Dla funkcji $f \in B_p$ definiujemy operatory

$$L_n(f; p, r, s; x) := \frac{1}{g(n^s x; r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^s x)^k}{(k+r)!} \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{k+r}{n^s}\right) \left(x - \frac{k+r}{n^s}\right)^j}{j!}, \quad x \in R_0, n \in N,$$

gdzie $g(\cdot, \cdot)$ jest funkcją określoną wzorem (5).

Z przedstawionych w publikacji twierdzeń ([H4], Theorem 1 i Theorem 2) wydedukowano m.in.

Wniosek 2. ([H4], Corollary) Dla każdej funkcji $f \in B_p$, $p \in N$, zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; p, r, s) - f\|_p = 0, \quad r \in N \text{ i } s \in R_+.$$

Można zauważyć, że C. Mortici cytuje pracę [H4] w pracy z 2009 roku [Mor].

Prace poświęcone operatorom BBH stanowią ważną część publikowanych wyników dotyczących aproksymacji funkcji operatorami liniowymi.

W 2010 roku w pracy [Abe-Iva2] U. Abel i M. Ivan zebrali rezultaty związane z tymi operatorami z lat 1980-2009 cytując m.in. pracę [H6].

W pracy [H6] wprowadzone zostały zmodyfikowane operatory BBH

$$F_n(f; p; x) := (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{k}{n-k+1}\right)}{j!} \left(x - \frac{k}{n-k+1}\right)^j, \quad x \in R_0, \quad n \in N, \quad p \in N_0,$$

dla funkcji $f \in C_0^p$.

Zauważmy najpierw, że $F_n(f; 0; x) = L_n^{[1]}(f; x)$, tzn. wprowadzona definicja obejmuje przypadek klasycznych operatorów BBH.

Poniżej podamy twierdzenie z którego wynika, że rząd aproksymacji funkcji p -krotnie różniczkowalnych $f \in C_0^p$ operatorami F_n zależy od p .

Twierdzenie 6. ([H6], Theorem 1) *Niech $p \in N$ będzie ustaloną liczbą. Wówczas dla każdej funkcji $f \in C_0^p$ mamy*

$$F_n(f; p; x) - f(x) = o(n^{-p/2}), \quad x \in R_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Oczywiście dla $p \geq 2$ rząd aproksymacji funkcji p -krotnie różniczkowalnych operatorami F_n jest lepszy od rzędu aproksymacji tej funkcji operatorami $L_n^{[1]}$ wykazanego w pracy U. Abela [Abe1]. Wykazane w pracy [H6] twierdzenie typu Woronowskiej jest rozszerzeniem wyniku uzyskanego przez V. Totika ([Tot3]).

Twierdzenie 7. ([H6], Theorem 2) *Dla każdej funkcji $f \in C_0^{p+2}$, $p \in N$, mamy*

$$F_n(f; p; x) - f(x) = \frac{(-1)^p f^{(p+1)}(x) L_n^{[1]}((t-x)^{p+1}; x)}{(p+1)!} + \frac{(-1)^p (p+1) f^{(p+2)}(x) L_n^{[1]}((t-x)^{p+2}; x)}{(p+2)!} + o(n^{-1-p/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Inna korzyść z zaproponowanych przeze mnie definicji to możliwość zastosowania tej metody badawczej do modyfikowania innych znanych z literatury dodatnich operatorów liniowych. Świadectwem tego jest praca [Wal-Moh], powstała przy współpracy z R. N. Mohapatrą, poświęcona dwuwymiarowej wersji operatorów wprowadzonych w pracy [H2]. Idee i metody dowodowe z pracy [Wal-Moh] m. in. zaowocowały podobnymi badaniami w [Ser-Ibi].

3.3. Konstrukcje liniowych i nieliniowych operatorów obciętych w przestrzeniach funkcyjnych z wagą wielomianową

Ogólna motywacja do prowadzenia badań w tym zakresie wskazana została w Rozdziale 2.4 (patrz badania dotyczące błędów obcięcia).

Prace [Xie-Xie], [Ome], [Zho-Zho] i [Wan-Zho], pokazują, że problem jest nietrywialny.

Pragnę podkreślić, że praca [H3] powstała tylko pod wpływem publikacji [Bec], [Dev-Lor], [Rem-Wal1], [Wal11] i [H1], tzn. niezależnie od definicji operatorów BBH. Moje badania prowadzone w pracy [H3] bazujące na równości

$$(1+t^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2k}, \quad t \in R_0, \quad n \in N,$$

zaowocowały przyjęciem następującej definicji.

Definicja 10. ([H3], Definition) *Niech $p \in N_0$ będzie ustaloną liczbą. Dla funkcji $f \in C_p$ określamy operatory*

$$L_n(f; x) := \frac{1}{(1+(x+n^{-1})^2)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+n^{-1})^{2k} f\left(\frac{k(1+(x+n^{-1})^2)}{n(x+n^{-1})}\right), \quad x \in R_0, \quad n \in N.$$

W pierwszej części pracy [H3] zamieszczony jest lemat, z którego wynika, że operatory L_n są dodatnie, liniowe, ograniczone i prowadzą z przestrzeni C_p w C_p . Główną częścią pracy są twierdzenia aproksymacyjne. Wykazano m. in. następujące

Twierdzenie 8. ([H3], Theorem 2) *Niech w_p będzie wagą wielomianową z ustalonym $p \in N_0$. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p)$ taka, że dla funkcji $f \in C_p$ mamy*

$$\|L_n(f) - f\|_p \leq M \omega_1\left(f; C_p; \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \in N.$$

Nadmieniam, że w ostatniej części pracy odnajdujemy twierdzenie typu Woronowskiej, mówiące o tym, że jeżeli $f \in C_p^2$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{L_n(f; x) - f(x)\} = f'(x) + \frac{1}{2} f''(x), \quad x \in R_+.$$

Praca [H3] zainspirowała mnie do dalszych badań naukowych w tym obszarze.

Rozdziały 1. *Introduction* i 2. *Approximation of the function of one variable* pracy [H7] poświęcone są aproksymacji funkcji jednej zmiennej następującymi klasami operatorów obciętych:

$$A_n(f; a_n; x) := \sum_{k=0}^{[n(x+a_n)]} \binom{n-1+k}{k} x^k (1+x)^{-n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie ciąg liczb dodatnich $(a_n)_1^\infty$ spełnia warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \infty$ oraz $[n(x+a_n)]$ oznacza część całkowitą $n(x+a_n)$.

Podstawowe własności operatorów A_n w przestrzeniach funkcyjnych z wagą wielomianową podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9. ([H7], Theorem 3) *Niech $p \in N$ będzie ustaloną liczbą. Wówczas dla funkcji $f \in C_p$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{A_n(f; a_n; x) - f(x)\} = 0, \quad x \in R_0,$$

a zbieżność ta jest jednostajna w każdym przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$, $x_2 > x_1 \geq 0$.

W pracy [H7] podajemy także, nie wchodzące do osiągnięcia o którym mowa w art. 16 ust. 2 wskazanej ustawy, rozszerzenie tego wyniku na przypadek funkcji dwóch zmiennych z wielomianowych przestrzeni wagowych $C_{p,q}$. Praca cytowana jest przez V. Gupta i R. Yadav ([Gup-Yad]).

Wyniki pracy [H7] otrzymano niezależnie o podobnych rezultatów z prac [Wan-Zho] i [Agr2].

Ten wątek badawczy rozwija praca [H9], gdzie zbadane zostały własności aproksymacyjne operatorów wprowadzonych wzorem

$$B_n(f; a_n; p; x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{[n(x+a_n)]} \frac{(nx)^k}{k!} \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{k}{n}\right)}{j!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^j.$$

Warto podkreślić, że badania w pracy [H9] zakończono wskazaniem szczególnych klas operatorów obciętych

$$C_n(f; p; x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^n \frac{(nx)^k}{k!} \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{k}{n}\right)}{j!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^j.$$

Zauważmy, że

$$C_n(f; p; x) = B_n(f; 1-x; p; x),$$

dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$ i $n \in \mathbb{N}$.

Chciałbym zaznaczyć, że zastosowane w pracy [H9] metody dowodowe mogą dostarczyć informacji o szybkości zbieżności do danej funkcji ciągu operatorów ją aproksymujących. W pracy [H9] wyprowadzono wniosek, że rząd aproksymacji funkcji $f \in B_p$ n -tym operatorem $B_n(f; a_n; p)$ jest postaci $O\left(\frac{1}{n^{p/2}}\right)$. To oznacza, że otrzymane zostały istotnie

lepsze rzędy aproksymacji dla operatorów obciętych (patrz np. [Leh]).

Nadmieniam, że A. Holhoş w [Hol] cytuje pracę [H9].

Ten nurt badań był kontynuowany w pracy współautorskiej [H10]. Praca rozwiązuje problem postawiony w 2002 roku przez M. Herzog [Herz2]. Problem dotyczył operatorów określonych wzorem

$$\frac{1}{I_\nu(nx)} \sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\left(\frac{nx}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} f\left(\frac{2k}{n}\right),$$

gdzie $(N(n))_1^\infty$ jest pewnym ciągiem liczbowym, I_ν , $\nu \in R_0$, zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju określoną wzorem

$$I_\nu(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}.$$

W pracy [H10], powstałej przy współpracy z R. N. Mohapatrą, podane są twierdzenia aproksymacyjne dotyczące punktowej zbieżności wprowadzonych klas operatorów liniowych:

$$B_n(f; \nu; a_n; x) := \begin{cases} \frac{1}{I_\nu(nx)} \sum_{k=0}^{[n(x+a_n)]} \frac{(nx)^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} f\left(\frac{2k}{n}\right), & x > 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$$

$$E_n(f; p; v; a_n; x) := \begin{cases} \frac{1}{I_v(nx)} \sum_{k=0}^{[n(x+a_n)]} \frac{(nx)^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{2k}{n}\right)}{j!} \left(x - \frac{2k}{n}\right)^j, & x > 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$$

gdzie $(a_n)_1^\infty$ jest ciągiem liczb dodatnich spełniającym warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \infty$.

Praca [H10] cytowana jest przez Ç. Atakut i İ. Büyükyazıcı ([Ata-Büy]).

W pracy [H8] przeprowadzono badania ogólniejsze, dotyczące nie tylko wątków badawczych opisanych już w Rozdziałach 3.2 i 3.3, ale i nowego obszaru badań związanego z operatorami nieliniowymi.

W wielomianowych przestrzeniach wagowych C_p i D_p wprowadzamy klasy operatorów dyskretnych przyjmując następującą definicję.

Definicja 11. ([H8]) Niech dany będzie zbiór macierzy $\Omega := \{A = [a_{nk}(x)]_{n \in N, k \in N_0} : a_{nk}(x) \in C_0, x \in R_0\}$ o własnościach:

$$(i) \ a_{nk}(x) \geq 0,$$

$$(ii) \ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(x) = 1,$$

(iii) dla $p \in N_0$ szereg $\sum_{k=0}^{\infty} k^p a_{nk}(x)$ jest jednostajnie zbieżny na R_0 i jego suma jest funkcją z przestrzeni C_p z wagą wielomianową w_p ,

(iv) dla $p \in N$ istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, A)$ taka, że funkcja

$$T_{n,p}(A; x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(x) \left(\frac{k}{n} - x\right)^p \text{ spełnia warunki}$$

$$\|T_{n,2p}(A; \cdot)\|_{2p} \leq M n^{-p}, \quad T_{n,1}(A; x) = 0.$$

Ponadto niech dane będą dwa ciągi liczb dodatnich $(b_n)_1^\infty$ i $(c_n)_1^\infty$ o własnościach $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_n = \infty$. Ponadto niech $A \in \Omega$ i niech $r \in N$ będzie ustaloną liczbą.

Wówczas definiujemy operatory

$$S_n(f; F_{n,r}; A; c_n; x) := \sum_{k=0}^{[n(x+c_n)]} a_{nk}(x) F_{n,r} \left(f \left(\frac{k}{n} \right) \right), \quad f \in C_p, \quad p \in N_0,$$

$$S_{n,p}(f; F_{n,r}; A; c_n; x) := \sum_{k=0}^{[n(x+c_n)]} a_{nk}(x) F_{n,r} \left(\sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}\left(\frac{k}{n}\right)}{j!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^j \right), \quad f \in D_p, \quad p \in N,$$

$x \in R_0$, $n \in N$, gdzie $(F_{n,r})_1^\infty$ jest ciągiem funkcji ciągłych na R spełniającym warunek

$$\sup_{x \in R} w_r(|x|) |F_{n,r}(x) - x| \leq \frac{M(r)}{b_n}, \text{ z wagą wielomianową } w_r.$$

Warto zauważyć, że wprowadzone definicje obejmują także przypadek operatorów nieliniowych. W literaturze, zgodnie z wiedzą autora, jest niewiele publikacji na ten temat. Prowadzone badania zaowocowały uzyskaniem kilku twierdzeń aproksymacyjnych. Dwa z nich pragnę wyróżnić.

Twierdzenie 10. ([H8], Theorem 4) *Niech spełnione będą założenia Definicji 11. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, r, A)$ taka, że dla każdej funkcji $f \in C_p$ z wagą wielomianową w_p , $p \in N$, i $x \in R_0$ mamy*

$$w_{pr}(x) |S_n(f; F_{n,r}; A; c_n; x) - f(x)| \leq M \left\{ \frac{1}{n^{p/2}} \left(\frac{1+x^p}{c_n^p} + 1 \right) + \frac{1}{b_n} + \omega_2 \left(f; C_p; \frac{x+1}{n^{1/2}} \right) \right\}.$$

Twierdzenie 11. ([H8], Theorem 5) *Niech spełnione będą założenia powyższego twierdzenia i niech $p \in N$ będzie ustalona liczbą. Wtedy istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, r, A)$ taka, że dla każdej funkcji $f \in D_p$ i $x \in R_0$ zachodzi nierówność*

$$w_{pr}(x) |S_{n,p}(f; F_{n,r}; A; c_n; x) - f(x)| \leq M \left\{ \frac{1+x^p}{n^{p/2} c_n^p} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{n^{p/2}} \omega_1 \left(f^{(p)}; C_0; \frac{x+1}{n^{1/2}} \right) \right\}.$$

Kończąc rozważania dotyczące wybranych wyników jednotematycznego cyklu publikacji chciałbym zaznaczyć, że definicje i twierdzenia aproksymacyjne zamieszczone w [H8] obejmują wyniki podane w [Bec], [Grö], [Leh] i wielu innych pracach.

Na przykład, gdy $A = [a_{nk}^{[1]}(x)]_{n \in N, k \in N_0}$, gdzie $a_{nk}^{[1]}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}$ i $F_{n,r}(x) = x$ dla $x \in R_0$, to

operator S_n staje się operatorem wprowadzonym w pracy [Leh].

Warto podkreślić, że ciągi $(b_n)_{n=1}^\infty$ i $(c_n)_{n=1}^\infty$ można tak dobrać, że rząd aproksymacji funkcji z przestrzeni z wagą wielomianową operatorami $S_{n,p}$ będzie lepszy od rzędu aproksymacji tej funkcji otrzymanego dla klasycznych operatorów.

4. Omówienie pozostałego dorobku naukowego

Prace z Rozdziału 3 zainspirowały mnie do dalszych badań naukowych w tym obszarze.

Chciałbym zaznaczyć, że część badań poświęcam aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Badając aproksymację funkcji wielu zmiennych operatorami liniowymi z reguły napotykamy na nowe trudności nie mające analogii z przypadkiem jednowymiarowym. W związku z tym jest znacznie mniej publikacji na ten temat.

W pracy [Wal14] podajemy rozszerzenie wyników [H1] na przypadek funkcji dwóch zmiennych z wielomianowych przestrzeni wagowych.

Definicja 12. ([Wal14], Definition 1) *Niech $p, q \in N_0$, $r, s \in N$ i $\alpha \in R_+$ będą ustalonymi liczbami. Dla funkcji $f \in C_{p,q}$ definiujemy operatory*

$$A_{m,n}(f; r, s, \alpha; x, y) := \frac{1}{g((m^\alpha x + 1)^2; r) g((n^\alpha y + 1)^2; s)} \times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m^\alpha x + 1)^{2j}}{(j+r)!} \frac{(n^\alpha y + 1)^{2k}}{(k+s)!} f\left(\frac{j+r}{m^\alpha(m^\alpha x + 1)}, \frac{k+s}{n^\alpha(n^\alpha y + 1)}\right), \quad (x, y) \in R_0^2, m, n \in N.$$

Podam teraz dwa twierdzenia o rzędach aproksymacji funkcji $f \in C_{p,q}$ operatorami $A_{m,n}$.

Twierdzenie 12. ([Wal14], Theorem 1) *Niech funkcja $f \in C_{p,q}^1$ z ustalonymi $p, q \in N_0$. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, q, r, s)$ taka, że*

$$\|A_{m,n}(f; r, s, \alpha) - f\|_{p,q} \leq M \left\{ \frac{1}{m^\alpha} \|f_x\|_{p,q} + \frac{1}{n^\alpha} \|f_y\|_{p,q} \right\}, \quad \alpha \in R_+, m, n, r, s \in N.$$

Twierdzenie 13. ([Wal14], Theorem 2) *Jeżeli funkcja $f \in C_{p,q}$ z ustalonymi $p, q \in N_0$, to istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, q, r, s)$ taka, że*

$$\|A_{m,n}(f; r, s, \alpha) - f\|_{p,q} \leq M \omega_1 \left(f; C_{p,q}; \frac{1}{m^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

dla $\alpha \in R_+$ i $m, n, r, s \in N$.

Praca [Rem-Wal6], powstała przy współpracy z L. Rempulską, rozwija powyższy nurt badań. W swojej prezentacji ograniczę się tylko do drugiej części pracy [Rem-Wal6] tzn. *II. Approximation of functions of two variables*, ponieważ jestem jej autorem. Rozpatrywana będzie teraz aproksymacja funkcji dwóch zmiennych z wielomianowych przestrzeni wagowych $C_{p,q}$ wprowadzonymi operatorami:

$$\begin{aligned} L_{m,n}^{[1]}(f; x, y) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j(x_m^2) a_k(y_n^2) f\left(\frac{2j}{mx_m}, \frac{2k}{ny_n}\right), \\ L_{m,n}^{[2]}(f; x, y) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_j(x_m^2) b_k(y_n^2) f\left(\frac{2j+1}{mx_m}, \frac{2k+1}{ny_n}\right), \\ L_{m,n}^{[3]}(f; x, y) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j(x_m^2) b_k(y_n^2) f\left(\frac{2j}{mx_m}, \frac{2k+1}{ny_n}\right), \end{aligned}$$

$(x, y) \in R_0^2$, $m, n \in N$, gdzie

$$\begin{aligned} x_m &:= mx + 1, \quad y_n := ny + 1, \\ a_i(t) &:= \frac{1}{\cosh t} \frac{t^{2i}}{(2i)!}, \quad b_i(t) := \frac{1}{\sinh t} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad t \in R_+, i \in N_0. \end{aligned}$$

Z udowodnionych w pracy [Rem-Wal6] lematów wyprowadzono wniosek, że $L_{m,n}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3$, są dobrze określone na wielomianowej przestrzeni wagowej $C_{p,q}$ oraz, że są to dodatnie operatory liniowe działające z przestrzeni $C_{p,q}$ do tej samej przestrzeni $C_{p,q}$. Ponadto wykazane są twierdzenia o rzędach aproksymacji funkcji $f \in C_{p,q}$ operatorami $L_{m,n}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3$ oraz twierdzenie typu Woronowskiej.

Twierdzenie 14. ([Rem-Wal6], Theorem 4) *Niech funkcja $f \in C_{p,q}^1$ z ustalonymi $p, q \in N_0$ oraz niech $i = 1, 2, 3$. Wówczas istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, q)$ taka, że dla $m, n \in N$ mamy*

$$\|L_{m,n}^{[i]}(f) - f\|_{p,q} \leq M \left\{ \frac{1}{m} \|f_x\|_{p,q} + \frac{1}{n} \|f_y\|_{p,q} \right\}.$$

Twierdzenie 15. ([Rem-Wal6], Theorem 5) *Jeżeli funkcja $f \in C_{p,q}$ z ustalonymi $p, q \in N_0$, to istnieje stała dodatnia $M \equiv M(p, q)$ taka, że*

$$\|L_{m,n}^{[i]}(f) - f\|_{p,q} \leq M \omega\left(f; C_{p,q}; \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$$

dla $i = 1, 2, 3$ oraz $m, n \in N$.

Twierdzenie 16. ([Rem-Wal6], Theorem 6) *Niech funkcja $f \in C_{p,q}^1$ z ustalonymi $p, q \in N_0$. Ponadto niech $i = 1, 2, 3$. Wówczas*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{L_{n,n}^{[i]}(f; x, y) - f(x, y)\} = f_x(x, y) + f_y(x, y),$$

w każdym punkcie $(x, y) \in R_+^2$.

Wyżej podane twierdzenia pokazują, że rząd aproksymacji funkcji z przestrzeni $C_{p,q}$ z wagą wielomianową operatorami $A_{m,n}, L_{m,n}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3$, jest lepszy od rzędu aproksymacji tej funkcji klasycznymi operatorami liniowymi.

Z kolei praca [Wal15] poświęcona jest m. in. aproksymacji funkcji dwóch zmiennych następującymi klasami operatorów obciętych:

$$B_{m,n}(f; r, s; a_m, b_n; x, y) := \frac{1}{g(mx; r)g(ny; s)} \sum_{j=0}^{[m(x+a_m)]} \sum_{k=0}^{[n(y+b_n)]} \frac{(mx)^j}{(j+r)!} \frac{(ny)^k}{(k+s)!} f\left(\frac{j+r}{m}, \frac{k+s}{n}\right),$$

gdzie $g(\cdot, \cdot)$ jest funkcją określoną wzorem (5), a ciągi liczb dodatnich $(a_m)_1^\infty$ i $(b_n)_1^\infty$ spełniają warunki $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m}a_m = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}b_n = \infty$.

Pragnę teraz wyróżnić konstrukcję operatora wprowadzoną i zbadaną w pracy [Wal18]. W autorskiej pracy [Wal18] badane są dwuwymiarowe odpowiedniki operatorów F_n (patrz Rozdział 3.3). Operatory te wprowadzono następującą definicją.

Definicja 13. ([Wal18], Definition 1) *Niech dana będzie przestrzeń $C_{0,0}^p$, $p \in N_0$. Dla funkcji $f \in C_{0,0}^p$ definiujemy operatory*

$$L_n^{[3]}(f; p; x, y) := ((1+x)(1+y))^{-n} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{k} x^j y^k \sum_{i=0}^p \frac{d^i f\left(\frac{j}{n-j+1}, \frac{k}{n-k+1}\right)}{i!},$$

gdzie $(x, y) \in R_0^2$, $n \in N$ i

$$d^i f(s, t) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{\partial^i f(s, t)}{\partial x^{i-k} \partial y^k} (x-s)^{i-k} (y-t)^k.$$

Celem tej pracy było pokazanie, że operatory $L_n^{[3]}$ mają własności analogiczne jak F_n tzn.

$$L_n^{[3]}(f; p; x, y) - f(x, y) = o(n^{-p/2}), \quad (x, y) \in R_0^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Chciałbym nadmienić, że prace dotyczące aproksymacji funkcji dwóch zmiennych pewnymi operatorami liniowymi, których jestem autorem lub współautorem, cytowane są m. in. w [Ta-Ol-Ba], [Mur], [Isp-Ata], [Mam], [Herz2], [Hol], [Now-Sik], [Son-Yan-Ye] i [Ser-Ibi].

Można zauważyć, że w moim dorobku znajdują się ponadto inne prace autorskie lub współautorskie, w których badania koncentrowały się na opisanych w poprzednim rozdziale wątkach aproksymacji funkcji z wielomianowych przestrzeni wagowych operatorami liniowymi (m. in. [Rem-Wal2], [Rem-Wal5], [Wal4], [Wal13], [Wal16], [Wal17], [Wal-Gup1]).

Uzupełnieniem omówionych wyżej zagadnień dotyczących punktowej i normowej zbieżności w wielomianowych przestrzeniach wagowych jest aproksymacja w mocnym sensie nawiązująca do badań matematyków L. Leindlera, W. Łenskiego, L. Rempulskiej, R. Taberskiego. Zagadnienie to opisano i rozwiązano w pracy współautorskiej [Rem-Wal8]. W pracy wprowadzono i zbadano m. in. następujące mocne różnice rzędu $q \in R_+$ dla operatorów typu Szásza-Mirakjana i Baskakowa

$$H_{n,r}^q(f;x) := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^{(i)}(x) \left| F_r\left(\frac{k}{n}, x\right) - f(x) \right|^q \right\}^{1/q}, \quad f \in C_0^r, \quad r \in N_0, \quad n \in N, \quad x \in R_0, \quad i=1,2,$$

$$\text{gdzie } F_r(t,x) := \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j, \quad a_{nk}^{(1)}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}, \quad a_{nk}^{(2)}(x) = \binom{n-1+k}{k} x^k (1+x)^{-n-k},$$

$$t, x \in R_0.$$

Inny obszar moich zainteresowań naukowych jest ściśle związany z badaniami prowadzonymi przez wiele lat w Poznaniu przez L. Rempulską. Ten nurt badawczy dotyczy aproksymacji punktowej i aproksymacji w metrykach wykładniczych przestrzeni wagowych. Celem prac [Rem-Wal1] i [Wal3] była taka modyfikacja klasycznych operatorów Szásza-Mirakjana S_n , by te zmodyfikowane operatory były operatorami działającymi z danej przestrzeni C_q z wagą wykładniczą do tej samej przestrzeni C_q . Drugim celem było wykazanie, że zasadnicze własności tak zmodyfikowanych operatorów w wykładniczych przestrzeniach C_q są podobne do własności operatorów S_n w wielomianowych przestrzeniach C_p .

Praca [Rem-Wal1] jest cytowana m.in. przez C. Bardaro i I. Mantellini [Bar-Man2], [Bar-Man3], A. Ciupa [Ciu2], [Ciu4] i A. Holhoş [Hol]. Metoda modyfikacji operatorów wprowadzona w [Wal3] wykorzystana została m.in. w pracach [Ciu6], [Ciu7] i [Now-Sik].

Na uwagę zasługują klasy operatorów liniowych wprowadzonych i zbadanych w pracy [Wal1]. Podobnie jak dla klasycznych operatorów Szásza-Mirakjana, A_n (patrz Rozdział 3.1, Definicja 6) nie działa z przestrzeni C_q z wagą wykładniczą v_q do tej samej przestrzeni C_q , ponieważ $1/v_q \in C_q$, ale $A_n(1/v_q) \notin C_q$.

Można pokazać, że A_n są operatorami z wykładniczej przestrzeni wagowej C_q do wykładniczej przestrzeni wagowej C_r z $r > q > 0$ ($C_q \subset C_r$) i pod warunkiem, że n jest dostatecznie dużą liczbą naturalną. W związku z tymi niekorzystnymi własnościami operatorów A_n w pracy [Wal1] postawiono pytanie: jaka modyfikacja operatora A_n implikuje jego działanie z przestrzeni C_q z wagą wykładniczą v_q do tej samej przestrzeni C_q dla każdego $n \in N$? Metoda zastosowana w modyfikacji operatora A_n jest rozwinięciem metody

zastosowanej w przypadku klasycznych operatorów Szásza-Mirakjana. Przedstawione przeze mnie zmodyfikowane operatory $A_n^{(q,r)}$ ([Wal1], Definition)

$$A_n^{(q,r)}(f;x) := \frac{1}{g((nx+1)^2;r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} f\left(\frac{k+r}{n(nx+1)+2q}\right),$$

działające z przestrzeni C_{2q} z wagą wykładniczą v_{2q} do tej samej przestrzeni C_{2q} , mają zasadnicze własności aproksymacyjne podobne do własności klasycznych operatorów A_n w wielomianowych przestrzeniach wagowych C_p , tzn. rząd aproksymacji funkcji z przestrzeni C_{2q} operatorami $A_n^{(q,r)}$ jest lepszy od rzędu aproksymacji tej funkcji operatorami badanymi m.in. w pracach [Herz2], [Rem-Wal1], [Ciu4].

Dowodzi tego następujące twierdzenie.

Twierdzenie 17. ([Wal1], Theorem 1) *Niech C_{2q}^1 , $q \in R_+$, będzie wykładniczą przestrzenią wagową i niech $r \in N$. Wówczas dla funkcji $f \in C_{2q}^1$ istnieje stała dodatnia $M \equiv M(q,r)$ taka, że*

$$\|A_n^{(q,r)}(f) - f\|_{2q} \leq \frac{M}{n} \|f'\|_{2q}.$$

W pracy [Wal2] badamy dwuwymiarowe odpowiedniki operatorów $A_n^{(q,r)}$.

Jak już wspomniałem, opisane wyżej metody konstruowania operatorów liniowych zastosowane zostały w opublikowanych później pracach. Praca [Wal7] cytowana m.in. w [Bus-Mor] i [Mur] rozwija wynik [Wal1].

Wybranych zagadnieniom aproksymacji funkcji w tych przestrzeniach poświęcone są m. in. następujące prace autorskie lub współautorskie: [Rem-Sko-Wal], [Wal5], [Wal6], [Wal9], [Wal10].

Przestrzeń funkcji całkowalnych z p -tą potęgą stanowi istotną klasę funkcji w różnych działach analizy. To skierowało mnie na kolejny wątek badawczy dotyczący aproksymacji funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a i aproksymacji funkcji 2π -okresowych. Pracując w Zakładzie Analizy Matematycznej Politechniki Poznańskiej intensywnie poszerzałem wiedzę i badania dotyczące operatorów całkowych w przestrzeniach funkcyjnych i ich zastosowań. Uzyskane wyniki badań zostały opublikowane w kilku autorskich lub współautorskich artykułach. Dla przykładu w pracy współautorskiej [Rem-Wal4] badano aproksymacyjne własności operatorów całkowych typu

$$A_r(f;x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Phi_r(t-x) dt, \quad f \in L_{2\pi}^p, 1 \leq p \leq \infty, r \in I := [a,b) \subseteq R_0, x \in R,$$

gdzie $\Phi = \{\Phi_r : r \in I\}$ jest rodziną funkcji z przestrzeni $L_{2\pi}^\infty$ o własnościach:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_r(t) dt = 1, r \in I,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_r(t)| dt \leq M(\Phi), M(\Phi) = \text{const.} > 0 \text{ niezależna od } r, r \in I.$$

W swoich badaniach operatorów całkowych nie ograniczałem się tylko do aproksymacji funkcji 2π -okresowych. Świadczą o tym m. in. prace [Rem-Wal7] i [Wal3] poświęcone są innym operatorom całkowym.

W pracy [Rem-Wal7] uogólniono całki singularne Picarda

$$P_r(f; x) = \frac{1}{2r} \int_R f(x+t) \exp\left(-\frac{|t|}{r}\right) dt,$$

i Gaussa-Weierstrassa

$$W_r(f; x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int_R f(x+t) \exp\left(-\frac{t^2}{4r}\right) dt,$$

$f \in L^p$, $x \in R$, $r \in R_+$.

Praca [Wal3] zawiera wyniki dotyczące operatorów typu Kantorowicza

$$T_n(f; a_n, b_n; x) = b_n e^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)^k}{k!} \int_{k/b_n}^{(k+1)/b_n} f(t) dt, \quad f \in L^p,$$

gdzie $(a_n)_1^\infty$, $(b_n)_1^\infty$ są ciągami liczbowymi o własnościach:

- (i) podane ciągi są rosnące i nieograniczone oraz $b_n \geq a_n \geq 1$,
- (ii) $\frac{a_n}{b_n} - 1 = o\left(\frac{1}{b_n}\right)$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Podam teraz wybrane dwa twierdzenia o zbieżności ciągu operatorów $(T_n(f; a_n, b_n; \cdot))_1^\infty$ dla $f \in L^p(R_0)$, $p \geq 1$.

Twierdzenie 18. ([Wal3], Theorem 8) *Niech $f \in L^1(R_0)$ i niech F będzie funkcją określoną wzorem*

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt, \quad x \in R_0.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f; a_n, b_n; x) = f(x)$$

w każdym punkcie $x \in R_0$, w którym

$$F'(x) = f(x).$$

Zatem zbieżność zachodzi prawie wszędzie na R_0 .

Twierdzenie 19. ([Wal3], Theorem 9) *Niech funkcja $f \in L^p(R_0)$, przy pewnym $p > 1$. Wówczas*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f; a_n, b_n) - f\|_p = 0,$$

gdzie $\|f\|_p := \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

Z kolei badania w pracy autorskiej [Wal12] koncentrowały się na operatorach całkowych typu Bernsteina-Durrmeiera

$$M_{n,r}(f;x) := (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j dt,$$

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad x \in [0,1].$$

W pracy [Wal12] udowodniono m. in. następujące twierdzenie typu Woronowskiej.

Twierdzenie 20. ([Wal12], Theorem 2) *Założmy, że $f \in C_{[0,1]}^{r+2}$ z ustalonym $p \in N_0$. Wtedy dla każdego $x \in [0,1]$ mamy*

$$M_{n,r}(f;x) - f(x) = \frac{(-1)^r f^{(r+1)}(x) M_{n,0}((t-x)^{r+1}; x)}{(r+1)!} +$$

$$+ \frac{(-1)^r (r+1) f^{(r+2)}(x) M_{n,0}((t-x)^{r+2}; x)}{(r+2)!} + o\left(\frac{1}{n^{1+r/2}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Oprócz omówionych wyżej zagadnień celem moich rozważań naukowych było rozszerzenie znanych wyników na inne przestrzenie funkcyjne np. przestrzenie Höldera ([Rem-Wal3]).

Planuję badania w zakresie sumowalności szeregów liczbowych oraz zbieżności szeregów Fouriera. Będę dążył także do rozwinięcia problematyki aproksymacji w mocnym sensie i aproksymacji na płaszczyźnie zespolonej.

Aktualnie analizuję problemy minimalnych projekcji. Mam nadzieję, że ten wątek badawczy, intensywnie rozwijany w różnych ośrodkach naukowych, zaowocuje interesującymi wynikami w przyszłości.

5. Cytowana literatura

5.1. Prace autorskie lub współautorskie

- [Rem-Sko-Wal] L. Rempulska, M. Skorupka, Z. Walczak, On some operators of Szász-Mirakyan type, *Indian J. Math.* 46(1)(2004), 111-128.
- [Rem-Wal1] L. Rempulska, Z. Walczak, Approximation properties of certain modified Szász-Mirakyan operators, *Matematiche (Catania)* 55(2000)1, 121-132 (2001).
- [Rem-Wal2] L. Rempulska, Z. Walczak, On modified Baskakov operators, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 133(2003), 109-117.
- [Rem-Wal3] L. Rempulska, Z. Walczak, On some properties of Szász-Mirakyan operators in Hölder spaces, *Turkish. J. Math.* 27(2003)3, 435-446.
- [Rem-Wal4] L. Rempulska, Z. Walczak, On approximation of 2π -periodic functions in Hölder spaces, *Hokkaido Math. J.* 33(2004), 647-656.
- [Rem-Wal5] L. Rempulska, Z. Walczak, Modified Szász-Mirakyan operators, *Mat. Balcanica (N. S.)* 18(1-2) (2004), 53-63.
- [Rem-Wal6] L. Rempulska, Z. Walczak, Approximation by some operators of Szász-Mirakyan type, *Anal. Theory Appl.* 20(1)(2004), 1-15.

- [Rem-Wal7] L. Rempulska, Z. Walczak, On modified Picard and Gauss-Weierstrass singular integrals, *Ukrainian Math. J.* 57(11)(2005), 1844-1852.
- [Rem-Wal8] L. Rempulska, Z. Walczak, The strong approximation of differentiable functions by operators of Szász-Mirakyan and Baskakov type, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 63(2)(2005), 187-196.
- [Wal1] Z. Walczak, On certain linear positive operators in exponential weighted spaces, *Math. J. Toyama Univ.* 25(2002), 109-118.
- [Wal2] Z. Walczak, Approximation properties of certain linear positive operators of functions of two variables, *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 6(2002), 17-27.
- [Wal3] Z. Walczak, On modified Szász-Mirakyan operators, *Novi Sad J. Math.* 33(1)(2003), 93-107.
- [Wal4] Z. Walczak, On the rate of convergence for modified Szász-Mirakyan operators, *An. Univ. Timișoara Ser. Mat.-Inform.* 61(2003)(2), 141-149.
- [Wal5] Z. Walczak, Approximation properties of certain linear positive operators in exponential weighted spaces, *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.* 42(2003) 123-130.
- [Wal6] Z. Walczak, Approximation properties of certain linear positive operators in exponential weighted spaces of functions of two variables, *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.* 42(2003) 131-138.
- [Wal7] Z. Walczak, On some linear positive operators in exponential weighted spaces, *Math. Commun.* 8(2003)1, 77-84.
- [Wal8] Z. Walczak, On certain modified Szász-Mirakyan operators in polynomial weighted spaces, *Note Mat.* 22(1)(2003/2004), 17-25.
- [Wal9] Z. Walczak, On the convergence of the modified Szász-Mirakyan operators, *Yokohama Math. J.* 51(2004), 11-18.
- [Wal10] Z. Walczak, Approximation properties of certain modified Szász-Mirakyan operators of functions of two variables, *Fasc. Math.* 34(2004), 129-140.
- [Wal11] Z. Walczak, Certain modification of Szász-Mirakyan operators, *Fasc. Math.* 34(2004), 141-148.
- [Wal12] Z. Walczak, Bernstein-Durrmeyer type operators, *Acta Math. Univ. Ostrav.* 12(2004), 65-72.
- [Wal13] Z. Walczak, Approximation properties of certain linear positive operators in polynomial weighted spaces of functions of one and two variables, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 15(2004), 52-65.
- [Wal14] Z. Walczak, Approximation of functions of two variables by some linear positive operators, *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)* 74(1)(2005), 37-48.
- [Wal15] Z. Walczak, On some class of Szász-Mirakyan type operators, *Czechoslovak Math. J.* 58(133)(2008), 705-716.
- [Wal16] Z. Walczak, Remarks on some variant of Szász-Mirakyan type operators, *J. Appl. Math.* 1(2)(2008), 279-285.
- [Wal17] Z. Walczak, The degree of approximation by certain linear positive operators, *Carpatian J. Math.* 25(2)(2009), 246-257.
- [Wal18] Z. Walczak, Rate of convergence of Bleimann, Butzer and Hahn type operators, *East J. Approx.* 15(4)(2009), 429-437.
- [Wal-Gup1] Z. Walczak, V. Gupta, Uniform convergence with certain linear operators, *Indian J. Pure Appl. Math.* 38 (4)(2007), 259-269.
- [Wal-Gup2] Z. Walczak, V. Gupta, A note on the convergence of Baskakov type operators, *Appl. Math. Comput.* 202 (2008), 370-375.

- [Wal-Moh] Z. Walczak, R.N. Mohapatra, Rate of convergence of two-dimensional analogue of Baskakov operators, *Commun. Appl. Anal.* 13(1)(2009), 105-110.

5.2. Prace innych autorów

- [Abe1] U. Abel, On the asymptotic approximation with operators of Bleimann, Butzer and Hahn, *Indag. Math.(N.S.)* 7(1996), 1-9.
- [Abe2] U. Abel, On the asymptotic approximation with bivariate operators of Bleimann, Butzer and Hahn, *J. Approx. Th.* 97 (1999), 181-198.
- [Abe-Iva1] U. Abel, M. Ivan, A Kantorovich variant of Bleimann, Butzer and Hahn operators, Proceedings of the 4th international conference on functional analysis and approximation theory, Acquafredda di Maratea (Potenza), Italy, September 22.28, 2000, Vols. I and II, Palermo: Circolo Matematico di Palermo, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, I. Ser. 68 (2002), 205-218.
- [Abe-Iva2] U. Abel, M. Ivan, The Bleimann-Butzer-Hahn operators: old and new results, *Appl. Anal.* 90(3-4)(2011), 483-491.
- [Abel-Vec] U. Abel, B. D. Vecchia, Enhanced asymptotic approximation by linear approximation operators, *Facta Univ. (NIS) Ser. Math. Inform.* 19 (2004), 37-51.
- [Ach] N. I. Achiezer, Teoria aproksymacji, PWN, Warszawa 1957.
- [Agr1] O. Agratini, On the rate of convergence of a positive approximation process, *Nihonkai Math. J.* 11(2000), No.1, 47-56.
- [Agr2] O. Agratini, On the convergence of a truncated class of operators, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica* 31(3)(2003), 213-223.
- [Alk] J. A. Alkemade, Approximation with generalized Baskakov operators in weighted function spaces, *Delft Progr. Rep.* 8(1983)(2), 94-109.
- [Ana-Mez] G.A. Anastassiou, R.A. Mezei, A Voronovskaya Type Theorem for Poisson-Cauchy Type singular operators, *J. Math. Anal. Appl.* 366(2)(2010), 525-529.
- [Ani-Pych] G. Anioł, P. Pych-Taberska, Some approximation properties of the Bézier-Durrmeyer type operators, *Comment. Math. Prace Mat.* 41(2001), 1-11.
- [Ata-Büy] Ç. Atakut, İ. Büyükyazıcı, Stancu type generalization of the Favard-Szász operators, *Appl. Math. Lett.* 23(2010), 1479-1482.
- [Bar-Man1] C. Bardaro, I. Mantellini, Voronovskaya-type estimates for mellin convolution operators, *Results. Math.* 50(1-2)(2007), 1-16.
- [Bar-Man2] C. Bardaro, I. Mantellini, A Voronovskaya-type theorem for a general class of discrete operators, *Rocky Mountain J. Math.* 39(5)(2009), 1411-1442.
- [Bar-Man3] C. Bardaro, I. Mantellini, A quantitative asymptotic formula for a general class of discrete operators, *Comput. Math. Appl.* 60(10)(2010), 2859-2070.
- [Bas] V. A. Baskakov, An example of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 113(1957), 249-251.
- [Bec] M. Becker, Global approximation theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces, *Indiana Univ. Math. J.* 27(1)(1978), 127 - 142.
- [Be-Ku-Ne] M. Becker, D. Kucharski, R. J. Nessel, Global approximation theorems for the Szász-Mirakjan operators in exponential weight spaces, In: Linear Spaces and Approximation (Proc. Conf. Oberwolfach, 1977) Birkhäuser

- Verlag, Basel ISNM, 40(1978), 319 - 333.
- [Bl-Bu-Ha] G. Bleimann, P. L. Butzer, and L. Hahn, A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis, *Indag. Math.* 42(1980), 255-262.
- [Bus-Mor] J. Bustamante, L. Morales de la Cruz, Korovkin type theorem for weighted approximation, *Int. Journal of Math. Analysis* 26(1)(2007), 1273 -1283.
- [But] P. L. Butzer, On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), 547 - 553.
- [But-Nes] P. L. Butzer, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation I, Academic Press, New York-London, 1971.
- [Ciu1] Ciupa A., Approximation by a generalized Szász type operator, *J. Comput. Anal. Appl.* 5:4(2003), 413-424.
- [Ciu2] A. Ciupa, On the approximation by Jakimovski-Leviatan operators, *Automat. Comput. Appl. Math. (ACAM)* 16(2)(2007), 9-15.
- [Ciu3] A. Ciupa, Modified Jakimowski-Leviatan operators, *Creative Math. & Inf.* 16(2007), 13-19.
- [Ciu4] A. Ciupa, Approximation properties of a modified Jakimovski-Leviatan operator, *Automat. Comput. Appl. Math. (ACAM)* 17(3)(2008), 401-408.
- [Ciu5] A. Ciupa, Positive linear operators for the approximation in polynomial weighted spaces, *Bull. Allahabad Math. Soc. (BAMS)* 24(2)(2009), 233-240.
- [Ciu6] A. Ciupa, On a Jakimovski-Leviatan type operator, *Automat. Comput. Appl. Math. (ACAM)* 18(1)(2009), 105-115.
- [Ciu7] A. Ciupa, On the approximation by Jakimovski Leviatan operators, *Analele Universitatii din Oradea, Fasc. Matematica* 17(1)(2010), 71-76.
- [Dem-Mar] B. P. Demidowicz, I. A. Maron, Metody numeryczne, Cz. I, PWN, Warszawa 1965.
- [Deo] N. Deo, Simultaneous approximation by two dimensional hybrid positive linear operators, *General Math.* 14(4)(2006), 15-28.
- [Dev] R. A. DeVore, The approximation of continuous functions by positive linear operators, Lecture Notes in Mathematics 293, Springer-Verlag, Berlin 1972.
- [Dev-Lor] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer - Verlag, Berlin 1993.
- [Dir-Dem] F. Dirik, K. Demirci, Modified double Szász-Mirakjan operators preserving $x^2 + y^2$, *Math. Commun.* 15(1)(2010), 177-188.
- [Dit-Tot] Z. Ditzian and V. Totik, Moduli of Smoothness, Springer Series in Computational Mathematics 9, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Dum-Öza] O. Duman, M. A. Özarslan, Szász-Mirakjan type operators providing a Belter error estimation, *Appl. Math. Lett.* 20(2007), 1184-1188.
- [Dum-Öza-Vec] O. Duman, M. A. Özarslan, B. Della Vecchia, Modified Szász-Mirakjan-Kantorovich operators preserving linear functions, *Turk. J. Math.* 33(2009), 151-158.
- [Fav] J. Favard, Sur les multiplicateurs d'interpolation, *J. Math. Pures Appl.* 23 (1944), 219-247.
- [Fin1] Z. Finta, On approximation by modified Kantorovich polynomials, *Math. Balcanica (New Ser.)* 13(1999)3-4, 205-211.
- [Fin2] Z. Finta, Pointwise approximation by generalized Szász-Mirakjan operators, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.* XLVI, 4(2001), 61-66.

- [Fin-Gov-Gup] Z. Finta, N. K. Govil, V. Gupta, some results on modified Szász-Mirakjan operators, *J. Math. Anal. Appl.* 327(2007)(2), 1284-1296.
- [Fir-Leś-Rem] B. Firlej, M. Leśniewicz, L. Rempulska, Approximation of functions of two variables by some operators in weighted spaces, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 101(1999), 63-82.
- [Gór-Leś-Rem] M. Górzeńska, M. Leśniewicz, L. Rempulska, On strong approximation in Hölder norms, *Math. Nachr.* 170(1)(1994), 127-132.
- [Grőf] J. Grőf, Über Approximation durch Polynome mit Belegfunktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 35(1980), 109-116.
- [Gu] S. Gu, Pointwise approximation for functions of bounded variation on infinite interval by positive linear operators, *J. Math. Study* 29(1996), 23-28.
- [Guo] F. Guo, On convergence rate of approximation for two-dimensional Baskakov operators, *Anal. Th. Appl.* 19(3)(203), 273-279.
- [Gup] V. Gupta, Rate of convergence by Baskakov-Beta operators, *Mathematica* 37(60)(1-2)(1995), 109-117.
- [Gup-Doğ] V. Gupta, O. Doğru, Approximation of bounded variation functions by a Bézier variant of the the Bleimann, Butzer and Hahn operators, *Int. J. Math. Math. Sci.* (2006), Art. ID 37253, 5.
- [Gup-Yad] V. Gupta, R. Yadav, Rate of convergence for generalized Baskakov operators, *Arab. J. Math. Sci.* doi:10.1016/j.ajmsc.2011.08.001
- [Gur-Rem-Sko] M. Gurdek, L. Rempulska, M. Skorupka, The Baskakov operators for function of two variables, *Collect. Math.* 50(1999), 289-302.
- [Gut-Kud-Lew] R. S. Guter, Ł. D. Kudriawcew, B. M. Lewiatan, Elementy teorii funkcji: funkcje zmiennej rzeczywistej, przybliżenia funkcji, funkcje prawie okresowe, PWN, Warszawa 1967.
- [Herm] T. Hermann, On the Szász-Mirakjan operator, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.* 32(1 - 2)(1978), 163 - 173.
- [Herz1] M. Herzog, Approximation theorems for modified Szász-Mirakjan operators in polynomial weight spaces, *Matematiche(Catania)* 54(1999)1, 77-90.
- [Herz2] M. Herzog, Praca doktorska: *Twierdzenia aproksymacyjne dla operatorów typu Szasza-Mirakjana*, Kraków 2002.
- [Hol] A. Holhoş, Ph. D. Thesis Summary, Faculty of Mathematics and Computer Science, Scientific Advisor-Professor Ioan Gavrea, Contributions to the approximation of functions, Babeş-Bolyai University Cluj-Napoca, Romania, 2010.
- [Isp1] N. Ispir, On modified Baskakov operators on weighted spaces, *Turkish J. Math.* 25(2001)(3), 355-365.
- [Isp2] N. Ispir, Weighted approximation by modified Favard- Szász operatora, *Int. Math. J.* 3(2003)(10), 1053-1060.
- [Isp-Ata] N. Ispir, C. Atakut, Approximation by modified Szász-Mirakjan operators on weighted spaces, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 112 (4)(2002), 571-578.
- [Jay-Sit] C. Jayasri, Y. Sitaraman, Direct and inverse theorems for certain Bernstein-type operators, *Indian J. Pure Appl. Math.* 16(1985), 1495-1511.
- [Kar-Pych] H. Karsli, P. Pych-Taberska, On the rates of convergence of Chlodovsky-Durrmeyer operators and their Bézier variant, *Georgian Math. J.* 16(4)(2009), 693-704.

- [Kas-Agr-Gup] H. S. Kasana, P. N. Agrawal, V. Gupta, Inverse and saturation theorems for linear combination of modified Baskakov operators, *Approx. Theory Appl.* 7(1991)(2), 65-82.
- [Kir] G. K. Kirov, A generalization of the Bernstein polynomials, *Math. Balcanica (New Ser.)* 6(2)(1992), 147-153.
- [Kir-Pop] G. H. Kirov, L. Popova, A generalization of the linear positive operators, *Math. Balkanica (N.S.)* 7(1993), 149-162.
- [Kor] P. P. Korovkin, Linear operators and approximation theory, Hindustan Publ. Corp., Delhi 1960 (wydanie rosyjskie 1959).
- [Leh] H. G. Lehnhoff, On a modified Szász-Mirakjan operator, *J. Approx. Theory* 42(1984), 278 - 282.
- [Lei] L. Leindler, *Strong Approximation by Fourier Series*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.
- [Leś-Rem] M. Leśniewicz, L. Rempulska, Approximation by some operators of the Szász-Mirakjan type in exponential weight spaces, *Glas. Math.* 32(52) (1997), 57-69.
- [Lup] A. Lupaş, The approximation by some positive linear operators, Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory (Edited by M. W. Müller, M. Felten, D. H. Mache), Akademie Verlag, Berlin 1995, 201-229.
- [Łen1] W. Łenski, Strong approximation of double Fourier series, *Funct. Approx. Comm. Math.* IV (1976), 71-83.
- [Łen2] W. Łenski, Strong approximation of functions belonging to the space L^q , *Funct. Approx. Comm. Math.* VI (1978), 153-166.
- [Łen3] W. Łenski, On the norm-strong approximation of 2π periodic functions, *Demonstratio Math.* XI 2(1978), 285-299.
- [Łen4] W. Łenski, Strong approximation of functions by the triangular partial sums of double Fourier series, *Demonstratio Math.* XII 2(1979), 445-456.
- [Łen5] W. Łenski, Pointwise strong and very strong approximation of Fourier series, *Acta Math. Hung.* 115(3)(2007), 215-233.
- [Łen-Sza1] W. Łenski, B. Szal, Pointwise strong and very strong approximation by matrix means of Fourier series, *Comment. Math. Prace Mat.* 48(2)(2008), 177-198.
- [Łen-Sza2] W. Łenski, B. Szal, On the degree of strong approximation of functions and conjugate functions, *Demonstratio Math.* XLIII 1(2010), 117-128.
- [Łen-Tab] W. Łenski, R. Taberski, On the rate of pointwise (H, q) -summability of Fourier series, *Funct. Approx. Comment. Math.* 18(1989), 153-168.
- [Mam] N. Mammadova, Approximation theorems for generalized Szász operators, *Baku Univ. publishing house* 2(2010), 75-82.
- [Mas] G. Mastroianni, Una generalizzazione dell'operatore di Mirakjan, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Serie IV*, XLVIII (1980 /1981), 237-252.
- [Mei] G. Meinardus, *Aproksymacja funkcji ciągłych i jej metody numeryczne*, PWN, Warszawa 1968.
- [Mir] G. Mirakjan, Approximation des fonctions continues au moyen de polynomes de la forme $e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,n} x^k$, *Dokl. Akad. Nauk* 31 (1941), 201-205.
- [Moh-Has] A. J. Mohammad, A. K. Hassan, Simultaneous approximation by a new sequence of Szász-Beta type operators, *Rev. Un. Mat. Argentina* 50(1)(2009), 31-40.

- [Mor] C. Mortici, An extension of the Szász-Mirakjan operators, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* 17(1)(2009), 137–144.
- [Mur] C. V. Muraru, Kantorovich-Szász bivariate operators, *Stud. Cercet. Ştiinţ., Ser. Mat. Univ. Bacău* 16, suppl. (2006), 169-175.
- [Now-Sik] G. Nowak, A. Sikorska-Nowak, Some approximation properties of Szász-Mirakjan-Kantorovitch operators, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.* 38(1)(2009), 73-83.
- [Ome] E. Omei, Note on operators of Szász-Mirakjan type, *J. Approx. Theory* 47 (1986) 246–254.
- [Öza-Dum] M. A. Özarslan, O. Duman, Local approximation results for Szász-Mirakjan type operators, *Arch. Math.* 90(2008), 144-149.
- [Păl1] R. Păltănea, Approximation theory using positive linear operators, Birkhäuser Boston, 2004.
- [Păl2] R. Păltănea, Estimates for general positive linear operators on non-compact interval using wighted moduli of continuity, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.* 56(2)(2011), 497-50.
- [Păl3] R. Păltănea, Estimates of approximation in terms of a weighted modulus of continuity, *Bull. Transiv. Univ. Braşov Ser. III* 4(53)(1)(2011), 67-74.
- [Ple] W. Pleśniak, Wykłady z teorii aproksymacji, Wydawnictwo UJ, Kraków 2000.
- [Pych] P. Pych-Taberska, Some properties of the Bézier-Kantorovich type operators, *J. Approx. Theory* 123(2)(2003), 256-269.
- [Pych-Kar] P. Pych-Taberska, H. Karsli, On the rates of convergence of Chlodovsky-Kantorovich operators and their Bézier variant, *Comment. Math.* 49(2)(2009), 189-208.
- [Rem-Gra] L. Rempulska, S. Graczyk, Approximation by modified Szász-Mirakjan operators, *J. Inequal. Pure Appl. Math.* 10(3) (2009), Art. 61, 8 pp.
- [Rem-Sko1] L. Rempulska, M. Skorupka, On approximation of functions by some operators of the Szász-Mirakjan type, *Fasc. Math.* 26(1996), 125-137.
- [Rem-Sko2] L. Rempulska, M. Skorupka, On strong approximation of functions by certain linear operators, *Math. J. Okayama Univ.* 46(2004), 153-161.
- [Rem-Sko3] L. Rempulska, M. Skorupka, On the degree of approximation of functions of two variables by some operators, *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 9(2005), 51-64.
- [Rem-Sko4] L. Rempulska, M. Skorupka, On strong approximation of functions of one and two variables by certain operators, *Fasc. Math.* 35(2005), 115-133.
- [Rem-Sko5] L. Rempulska, M. Skorupka, Approximation by generalized MKZ-operators in polynomial weighted spaces, *Anal. Th. Appl.* 23(1)(2007), 64–75.
- [Rem-Sko6] L. Rempulska, M. Skorupka, Approximation properties of modified gamma operators. *Integral Transforms Spec. Funct.* 18(9-10)(2007), 653-662.
- [Rem-Thi] L. Rempulska, A. Thiel, Approximation of functions by certain nonlinear integral operators, *Lithuanian Math. J.* 48(4)(2008), 451-462.
- [Rem-Tom] L. Rempulska, K. Tomczak, On Certain Modified Meyer-König and Zeller Operators, *Turk. J. Math.* 30(2006), 117-127.
- [Ser-İbi] S. K. Serenbay, E. İbikli, Approximation by Chlodowsky-Taylor Polynomials, *Appl. Math. Comput.* (2011) (doi:10.1016/j.amc.2011.03.085)
- [Sko] M. Skorupka, Praca doktorska: Aproksymacja funkcji pewnymi liniowymi

- operatorami liniowymi, Poznań 1997.
- [Son-Yan-Ye] Z. Song, Z. Yang, P. Ye, Estimates of central moments for one kind of exponential-type operators, *Trans. Tianjin Univ.* 17(2)(2011), 85-88.
- [Sta] D.D. Stancu, A study of the remainder in an approximation formula using a Favard-Szász type operator, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.* XXV (1980), 70 - 76.
- [Sri-Gup] H. M. Srivastava, V. Gupta, Rate of convergence for the Bézier variant of the The Bleimann-Butzer-Hahn operators, *Appl. Math. Lett.* 18(2005), 849-857.
- [Szá] O. Szász, Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 45 (1950), 239-245.
- [Tab1] R. Taberski, Strong summability of double Fourier series, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.* 17(1969), 719-726.
- [Tab2] R. Taberski, A theorem of the Steckin and Leindler type connected with Abel summability of Fourier series, *Demonstratio Math.* 8(1975), 215-225.
- [Tab3] R. Taberski, On the speed of summability of double Fourier series, *Funct. Approx. Comment. Math.* 3(1976), 243-258.
- [Tab4] R. Taberski, Aproksymacja funkcji wielomianami trygonometrycznymi, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1979.
- [Ta-Ol-Ba] F. Tasdelen, A. Olgun, G. Bascanbaz-Tunca, Approximation of functions of two variables by certain linear positive operators, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 117(3)(2007), 387-399.
- [Taş-Bui] I. Taşcu, A. Buie, On the order of approximation of functions by the bidimensional operators Favard-Szász-Mirakyan, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* 11(2)2003, 163-170.
- [Tim] A. F. Timan, Theory of approximation of functions of a real variable, New York 1963.
- [Tot1] V. Totik, Approximation by Szász-Mirakjan-Kantorovich operators in L^p ($p > 1$), *Analysis Math.* 9(1983) 147-167.
- [Tot2] V. Totik, Uniform approximation by Szász-Mirakjan type operators, *Acta Math. Hung.* 41(3 - 4)(1983), 291 - 307.
- [Tot3] V. Totik, Uniform approximation by Bernstein-type operators, *Indag. Math.* 46(1984), 87-93.
- [Vec-Mas-Sza] B. Della Vecchia, G. Mastroianni, J. Szabados, Weighted approximation of functions by Szász-Mirakyan-Kantorovich operators, *Acta Math. Hungar.* 111(4)(2006), 325-345.
- [Waf-Kha1] A. Wafi, S. Khatoon, Direct and inverse theorems for generalized Baskakov operators in polynomial weight spaces, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Mat. (N. S.)* 50(2004)(1), 159-173.
- [Waf-Kha2] A. Wafi, S. Khatoon, Convergence and Voronovskaja-type theorems for derivatives of generalized Baskakov operators, *Cent. Eur. J. Math.* 6(2008)(2), 325-334.
- [Wan] J. Wang, Approximation by modified Baskakov operators for functions of bounded variation, *J. Comput. Anal. Appl.* 9 (4)(2007), 401-410.
- [Wan-Zho] J. Wang, S. Zhou, On the convergence of modified Baskakov operators, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica* 28(2)(2000), 117-123.
- [Wa-Li-Xi] F. Wang, C. Li, Y. Xin, Approximate properties of a kind of modified Benstein-Kantorovitch operators, *J. Hebei Normal Univ. (Natural Science Edition)* 34(5)(2010), DOI: CNKI:SUN:HBSZ.0.2010-05-005.

- [Xie] S. Xiehua, On the convergence of the modified Szász-Mirakjan operator, *Approx. Th. Appl.* 10(1)(1994), 21-25.
- [Xie-Xie] L. Xie, T. Xie, Approximation theorems for localized Szász-Mirakjan operators, *J. Approx. Theory* 152 (2008) 125-134.
- [Zen-Abe-Iva] X. M. Zeng, U. Abel, M. Ivan, Approximation by a Kantorovich variant of the Bleimann, Butzer and Hahn operators, *Math. Inequal. Appl.* 11(2008), 317-325.
- [Zho-Zho] G. Zhou, S. Zhou, A remark on a modified Szász-Mirakjan operator, *Colloq. Math.* 79(2)(1999), 157-160.

Z. Walczak