

Autoreferat

Małgorzata Wróbel

Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie
Instytut Matematyki i Informatyki
ul. Armii Krajowej 13/15
42-200 Częstochowa

- Magisterium: Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Częstochowie;
tytuł pracy magisterskiej: *Podstawowe twierdzenia analizy funkcjonalnej i ich zastosowania*, 1988,
promotor: prof. dr hab. Janusz Matkowski.
- Doktorat: Uniwersytet Śląski w Katowicach, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, praca doktorska pt. *Operatory lokalnie określone*, 1998,
promotor: prof. dr hab. Janusz Matkowski.
- Historia zatrudnienia: Instytut Matematyki i Informatyki Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie (od 1 X 1988 na stanowisku asystenta stażysty; od 1 X 1989 na stanowisku asystenta; od 1 X 1998 na stanowisku adiunkta).

CZĘŚĆ PIERWSZA

Celem rozprawy habilitacyjnej pod tytułem *Operatory lokalne i operatory superpozycji* jest przedstawienie wyników zawartych w jednotematycznym cyklu obejmującym siedem następujących prac:

- [I] J. Matkowski, M. Wróbel, *Locally defined operators in the space of Whitney differentiable functions*, Nonlinear Anal. TMA 68 (2008), 2873-3232.
- [II] J. Matkowski, M. Wróbel, *Representation theorem for locally defined operators in the space of Whitney differentiable functions*, Manuscripta Math. 129 (2009), 437-448.
- [III] M. Wróbel, *Locally defined operators and a partial solution of a conjecture*, Nonlinear Anal. TMA 72 (2010), 495-506.
- [IV] M. Wróbel, *Representation theorem for local operators in the space of continuous and monotone functions*, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), 45-54.
- [V] M. Wróbel, *Locally defined operators in the Hölder spaces*, Nonlinear Anal. TMA 74 (2011), 317-323.
- [VI] M. Wróbel, *Uniformly bounded Nemytskij operators between the Banach spaces of functions of bounded n -th variation*, J. Math. Anal. Appl. 391 (2012), 451-456.
- [VII] M. Wróbel, *Locally defined operators in the space of functions of bounded φ -variation*, Real Anal. Exch. 38(1) (2013), 79-94.

Omówienie rozprawy

Wstęp

Pierwsze badania operatorów lokalnie określonych (ze względu na miarę) pojawiły się w kontekście własności operatorów Niemyckiego i skupione były głównie na operatorach przekształcających przestrzenie funkcji mierzalnych lub całkowalnych w siebie. Operator przekształcający pewną klasę funkcji $\mathcal{G}$ określonych na przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) w klasę funkcji $\mathcal{H}$ określonych na tej samej przestrzeni nazywamy miarowo lokalnie (μ -lokalnie) określonym, jeżeli z równości (μ -prawie wszędzie) funkcji z klasy $\mathcal{G}$ na podzbiorach mierzalnych wynika równość (μ -prawie wszędzie)

obrazów operatora na tych zbiorach. Każdy operator Niemyckiego (zwany także operatorem złożenia lub superpozycji) $H : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ generowany przez funkcję dwóch zmiennych h następująco:

$$H(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad \varphi \in \mathcal{G}, \quad x \in X,$$

jest operatorem lokalnie określonym.

Pojawiło się wiele prac poświęconych warunkom, przy których lokalna określoność charakteryzuje operator Niemyckiego (np. K. Kartak [19, 20], W. Kozłowski [21], R. Randriananja [45], I.V. Shragin [51-53], I. Vrkoč [58], S. Yamamuro [60], także J. Appell, P.P. Zabrejko [3]). Stosując hipotezę continuum dowodzi się [3], że operator Niemyckiego jest jedynym operatorem lokalnie określonym przekształcającym klasę funkcji mierzalnych określonych na przestrzeni z miarą ośrodkową w siebie. Dotychczas nie wiadomo, czy pojęcie operatora miarowo lokalnie określonego jest pojęciem szerszym od pojęcia operatora Niemyckiego.

I. V. Shragin [51] podał warunki, przy spełnieniu których klasa miarowo lokalnie określonych operatorów przekształca przestrzeń funkcji mierzalnych w siebie. Ponadto, sformułował kryteria ciągłości takich operatorów względem różnych typów zbieżności [53]. Wyniki te stanowiły rozszerzenie wcześniejszych rezultatów otrzymanych dla operatorów Niemyckiego działających w przestrzeniach L^p (M. M. Vajnberg [57]).

Z. Grande oraz J. S. Lipiński [16] skonstruowali funkcję niemierzalną zwaną "Polish monster" generującą operator Niemyckiego (a więc także lokalnie określony) przekształcający przestrzeń funkcji mierzalnych w siebie (patrz także G. Buttazo, G. Dal Maso [9]).

Autorzy prac [1, 2] zajmowali się pewnymi własnościami operatorów lokalnie określonych K , które sprowadzały się do postaci multiplikatywnej $K(\varphi) = \alpha \cdot \varphi$ dla pewnej funkcji mierzalnej α .

Należy także wspomnieć, że z pojęciem operatora miarowo lokalnie określonego ściśle związane jest pojęcie operatora Caratheodory'ego (K. Kartak [19, 20]), które pojawiło się w pracach dotyczących teorii równań różniczkowych. Mianowicie, operator K przekształcający klasę funkcji ciągłych określonych na przedziale $[a, b]$ w klasę funkcji mierzalnych nazywamy operatorem Caratheodory'ego, jeżeli jest lokalnie określony i ciągły ze względu na topologie tych przestrzeni. I. Vrkoč [58] wykazał, że każdy operator Caratheodory'ego jest operatorem Niemyckiego, którego generatorem jest funkcja spełniająca tzw. warunki Caratheodory'ego.

Inny kierunek badań dotyczył odpowiedzi na pytanie o warunki na funkcję h gwarantujące aby odpowiedni operator Niemyckiego przekształcał klasę wszystkich (μ -równoważnych) funkcji w siebie (Z. Grande [14, 15]). Trudność w scharakteryzowaniu h leży w tym, że funkcje generujące nie są jednoznacznie wyznaczone przez

H , (dwie funkcje wyznaczone przez ten sam operator mogą być różne). W kolejnych pracach wykazano, między innymi, że funkcje Caratheodory'ego [10], czy też (stanowiące szerszą klasę) funkcje Shragina [50] generują operatory Niemyckiego przekształcające przestrzeń funkcji mierzalnych w siebie. Ciągłymi operatorami tego typu zajmował się I. V. Shragin [50]. Pełną charakteryzację operatorów Niemyckiego przekształcających inne klasy funkcji w siebie można znaleźć w monografii J. Appell i P.P. Zabrejko [3].

Ścisłe związanym z operatorem Niemyckiego jest funkcjonal całkowity Φ określony wzorem

$$\Phi(\phi) = \int_{\Omega} h(s, \phi(s)) ds$$

mający zastosowanie m.in. w rachunku wariacyjnym analizy nieliniowej (np. G. Buttazo [8], R. Pluciennik [42]). Operator Niemyckiego odgrywa ważną rolę w teorii równań funkcyjnych (M. Kuczma [23], M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger [24], a także J. Banaś [4, 5]).

W pracach [I]-[VII] przyjmuję inną definicję operatora lokalnie określonego. Fundamentalną rolę pełni w niej przestrzeń topologiczna (a nie mierzalna). Brzmi ona następująco:

Definicja 1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz Y i Z dowolnymi zbiorami. Oznaczmy przez $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, Y)$ oraz $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X, Z)$ dwie klasy funkcji $\varphi : X \rightarrow Y$ i odpowiednio $\psi : X \rightarrow Z$. Przekształcenie $K : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy *operatorem topologicznie lokalnie określonym* (lub krótko: *lokalnie określonym*, czy $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ -*lokalnym*), jeżeli dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ oraz dla wszystkich funkcji $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ zachodzi następująca implikacja:

$$\varphi|_U = \psi|_U \Rightarrow K(\varphi)|_U = K(\psi)|_U. \quad (1)$$

Takie operatory bywają też nazywane *operatorami z pamięcią*.

Przypomnijmy także ogólną definicję operatora Niemyckiego.

Definicja 2. Niech X, Y, Z będą dowolnymi zbiorami. Oznaczmy przez Y^X (Z^X) rodzinę funkcji $f : X \rightarrow Y$ ($X \rightarrow Z$). Niech $h : X \times Y \rightarrow Z$ będzie dowolną funkcją dwóch zmiennych. Odwzorowanie $H : Y^X \rightarrow Z^X$ określone wzorem

$$H(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad \varphi \in Y^X, \quad x \in X, \quad (2)$$

nazywamy *operatorem Niemyckiego (złożenia, superpozycji)*, a funkcję h *generatorem operatora H* .

Okazuje się, że w przypadku gdy przestrzeń topologiczna X , zbiory Y, Z i klasy funkcji $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, Y)$ oraz $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X, Y)$ w Definicji 1 są bardziej specjalne, to operator Niemyckiego nie wystarcza do opisanie wszystkich możliwych form operatorów lokalnie określonych $K : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. Przyjmijmy np., że $X \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, $Y = Z = \mathbb{R}$, $\mathcal{G}$ jest klasą $C^m(X)$ wszystkich funkcji z ciągłą m -tą pochodną w X oraz $\mathcal{H} = C^0(X)$. Jeżeli $K : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ jest lokalnie określony to (patrz wzór (3) poniżej), w myśl twierdzenia z pracy K. Lichawskiego, J. Matkowskiego i J. Misia [25], istnieje taka funkcja $h : X \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)), \quad \varphi \in C^m(X), x \in X.$$

Rozdział pierwszy zawiera wyniki prac [I] - [III] dotyczące operatorów lokalnych działających w przestrzeniach funkcji różniczkowalnych w sensie Whitney'a. Rozpatrujemy także operatory lewostronnie i prawostronnie określone. Podajemy tutaj twierdzenia reprezentacyjne dla operatorów lokalnych działających z przestrzeni funkcji m -krotnie różniczkowalnych w sensie Whitney'a w przestrzeń funkcji k -krotnie różniczkowalnych w sensie Whitney'a dla $k = 0, k = 1$ oraz $k \geq 2$. W przypadku $k \geq 2$ otrzymany (przy dodatkowym, słabym założeniu regularnościowym) wynik daje częściowe rozwiązanie otwartego problemu postawionego w pracy [25] z roku 1989.

W szczególności wnioskujemy, że w przypadku $k = m \leq 1$ każdy operator lokalnie określony jest operatorem Niemyckiego. Analogiczny wniosek otrzymujemy dla $k = m \geq 2$, ale przy dodatkowym założeniu regularnościowym.

W rozdziale drugim pokazujemy (prace [IV], [V], [VII]), że każdy operator lokalny działający

- (i) z przestrzeni funkcji ciągłych i monotonicznych;
- (ii) z przestrzeni funkcji spełniających warunek Höldera;
- (iii) z przestrzeni funkcji ciągłych o ograniczonej φ -wariacji

w sobie jest operatorem Niemyckiego. W związku z tym pojawia się tutaj naturalne pytanie o charakteryzację przestrzeni funkcyjnych o tej własności. Odpowiednie przykłady pokazują, że jest to problem nietrywialny.

Rozdział trzeci poświęcony jest charakteryzacji operatorów Niemyckiego działających z przestrzeni funkcji o ograniczonej n -tej wariacji (w sensie Popoviciu) w siebie, które są jednostajnie ograniczone (praca [VI]). Okazuje się, że operatory takie muszą być afiniczne ze względu na zmienną funkcyjną. Stosując uzyskane wyniki stwierdzamy np., że metoda punktu stałego Banacha pozwala wyznaczyć rozwiązanie φ o ograniczonej n -tej wariacji równania funkcyjnego

$$\varphi(x) = h(x, \varphi[f(x)]),$$

tylko w przypadku, gdy równanie to jest liniowe.

1. Operatory lokalnie określone w klasie funkcji różniczkowalnych w sensie Whitney'a

Szczególnie ważny rodzaj operatorów topologicznie lokalnie określonych pojawił się w problemie postawionym przez F. Neumana w 1985 roku, w którym pytał o postać operatorów lokalnie określonych $K : C^m(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R})$, gdzie $C^m(I, \mathbb{R})$ jest klasą rzeczywistych funkcji m -krotnie różniczkowalnych na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ z ciągłą m -tą pochodną, oraz $C^0(I, \mathbb{R})$ jest klasą funkcji ciągłych.

Rozwiązanie tego problemu zostało podane w pracy K. Lichawskiego, J. Matkowskiego, J. Misia [25], gdzie udowodniono następujące twierdzenie:

Jeżeli $K : C^m(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R})$ jest operatorem lokalnie określonym, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : I \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla wszystkich $\varphi \in C^m(I, \mathbb{R})$,

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)) \quad (x \in I). \quad (3)$$

Udowodnili oni także odpowiedni rezultat dla operatorów lokalnie określonych typu $K : C^\infty(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R})$.

Ponadto w tej pracy został sformułowany następujący, ogólniejszy, otwarty

Problem. Przypuśćmy, że $m, k = 0, 1, \dots$ oraz $K : C^m(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(I, \mathbb{R})$ jest lokalnie określony. Czy wówczas prawdziwe są implikacje?

(a) Jeżeli $k \leq m$, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : I \times \mathbb{R}^{m+1-k} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(m-k)}(x));$$

(b) Jeżeli $k > m$, to K jest operatorem stałym.

Autorzy pracy [25] dali pozytywną odpowiedź w przypadku $k = 1$. Przy rozwiązywaniu powyższego problemu pojawia się trudność natury regularnościowej. Gdyby funkcja h pojawiająca się w (3) była odpowiednio regularna, wówczas postawiony problem byłby łatwy do rozwiązania. Zauważmy, że jeśli operator $K : C^0(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R})$ jest lokalnie określony, to na mocy (3) jest on operatorem Niemyckiego i, w myśl twierdzenia Krasnosielskiego [22], jego generator h jest funkcją ciągłą. Podobnie, jeżeli $K : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(I, \mathbb{R})$ jest lokalnie określony, to jest także operatorem Niemyckiego, jednak, co jest raczej w tej sytuacji dość nieoczekiwane, funkcja h nie musi być nawet ciągła! Okazuje się bowiem [25], że istnieją nieciągłe funkcje $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dla których operator K określony wzorem

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)) \quad (x \in I),$$

przekształca klasę funkcji $C^1(I, \mathbb{R})$ w siebie.

Mówiąc o funkcji klasy C^m określonej na zbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$ zakładamy najczęściej, że jej dziedziną jest zbiorem otwartym. W przypadku, gdy A jest zbiorem domkniętym napotykamy od razu na pewną trudność - mianowicie może się zdarzyć, że w punkcie leżącym na brzegu klasyczne definicje pewnych pochodnych cząstkowych tracą sens. Jeżeli A jest np. zbiorem regularnie domkniętym tj. $\text{cl}A = \text{cl int}A$ i brzeg spełnia pewne odpowiednio proste warunki, to za pochodne cząstkowe na brzegu możemy przyjąć granice (o ile istnieją) odpowiednich pochodnych cząstkowych w punktach wewnętrznych. Gdy zaś $A \subset \mathbb{R}^n$ nie jest tej postaci (np. jest zbiorem brzegowym), to definicja funkcji klasy C^m określonej na tym zbiorze wymaga zastąpienia funkcji pewną rodziną funkcji nazywaną dalej funkcją Whitney'a (lub dżetem).

Dla przypomnienia tej definicji wprowadzimy najpierw pewne oznaczenia.

Niech $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dla $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0^n$, $j = (j_1, \dots, j_n)$ i $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ położmy

$$|j| := j_1 + \dots + j_n, \quad j! := j_1! \cdot \dots \cdot j_n!, \quad x^j := x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n},$$

oraz

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Ponadto, dla $j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_0^n$ oraz $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$, niech

$$i + j := (i_1 + j_1, \dots, i_n + j_n),$$

$$i - j := (i_1 - j_1, \dots, i_n - j_n) \text{ dla wszystkich } j \leq i,$$

gdzie $j \leq i$ oznacza, że $j_s \leq i_s$ dla wszystkich $s \in \{1, \dots, n\}$.

Definicja 3 [59, str. 65]. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $m \in \mathbb{N}_0$. Rodzinę funkcji

$$f = \{f^j \in \mathbb{R}^A : j \in \mathbb{N}_0^n, |j| \leq m\}$$

nazywamy *funkcją klasy C^m w sensie Whitney'a na zbiorze A* lub *m -dżetem Whitney'a na zbiorze A* (co zapisujemy $f \in C^m(A)$), jeżeli dla wszystkich $j \in \mathbb{N}_0^n$, $|j| \leq m$; $x_0 \in A$ oraz $\varepsilon > 0$, istnieje taka $\delta > 0$, że dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi następująca implikacja:

$$(\|x - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|y - x_0\| < \delta) \Rightarrow$$

$$\left| f^j(x) - \sum_{|i| \leq m-|j|} \frac{f^{j+i}(y)}{i!} (x-y)^i \right| \leq \varepsilon \|x-y\|^{m-|j|}.$$

W przypadku gdy $m = 0$, oczywiście $f^{(0,\dots,0)} = f$.

Definicja 4 [59, str. 65]. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem. Rodzinę funkcji

$$f = \{f^j \in \mathbb{R}^A : j \in \mathbb{N}_0^n\}$$

nazywamy *funkcją klasy C^∞ w sensie Whitney'a*, jeżeli dla każdego $m \in \mathbb{N}_0$, rodzina $\{f^j \in \mathbb{R}^A : j \in \mathbb{N}_0^n, |j| \leq m\}$ jest funkcją klasy C^m w sensie Whitney'a na zbiorze A .

Uwaga 1. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie domknięciem zbioru otwartego, którego brzeg składa się ze skończonej liczby nie przecinających się, kawałkami gładkich krzywych oraz niech $f = \{f^j \in \mathbb{R}^A : j \in \mathbb{N}_0^n, |j| \leq m\}$. Wówczas f jest klasy C^m w sensie Whitney'a na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(0,\dots,0)}$ jest klasy C^m w zwykłym sensie na zbiorze A , oraz

$$f^j = \frac{\partial^{|j|} f^{(0,\dots,0)}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}, \quad j \in \mathbb{N}_0^n, |j| \leq m.$$

W tym przypadku możemy utożsamiać funkcję $f^{(0,\dots,0)}$ z całą rodziną f .

Aby odpowiedzieć na pytanie, kiedy funkcja $f^{(0,\dots,0)}$ jednoznacznie wyznacza całą rodzinę $f \in C^m(A)$ potrzebna będzie następująca

Definicja 5 [I, Definition 2]. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *doskonałym ze względu na bazę kanoniczną*, jeżeli jest domknięty oraz dla każdego $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in A$ oraz dla każdego $s \in \{1, \dots, n\}$ istnieje taki ciąg $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, że

$$x_p = (x_p^1, \dots, x_p^s, \dots, x_p^n) \in A, \quad p \in \mathbb{N}; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \|x_p - x_0\| = 0$$

oraz

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|x_p^s - x_0^s|}{\|x_p - x_0\|} \neq 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|x_p^t - x_0^t|}{\|x_p - x_0\|} = 0, \quad t \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}.$$

W szczególności, produkt kartezjański n zbiorów doskonałych zawartych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiorem doskonałym ze względu na bazę kanoniczną.

Twierdzenie 1 [I, Proposition 1]. Niech $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem doskonałym ze względu na bazę kanoniczną. Jeżeli $f, g \in C^m(A)$ i $f^{(0,\dots,0)} = g^{(0,\dots,0)}$, to $f = g$, tj. $f^j = g^j$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}_0^n, |j| \leq m$.

Definicja 6 [I, Definition 4]. Niech X będzie podzbiorem n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ i niech Y, Z będą dowolnymi zbiorami. Niech $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, Y)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X, Z)$ będą ustalonymi rodzinami funkcji, odpowiednio $\varphi : X \rightarrow Y$ i $\psi : X \rightarrow Z$. Operator $K : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy

- (a) *lewostronnie określonym*, jeżeli dla wszystkich $x = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ spełniony jest następujący warunek:

$$\varphi|_{X \cap (-\infty, x)} = \psi|_{X \cap (-\infty, x)} \Rightarrow K(\varphi)|_{X \cap (-\infty, x)} = K(\psi)|_{X \cap (-\infty, x)},$$

gdzie $(-\infty, x) := (-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n)$;

- (b) *prawostronnie określonym*, jeżeli dla wszystkich $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ oraz $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ zachodzi następująca implikacja:

$$\varphi|_{X \cap (x, \infty)} = \psi|_{X \cap (x, \infty)} \Rightarrow K(\varphi)|_{X \cap (x, \infty)} = K(\psi)|_{X \cap (x, \infty)},$$

gdzie $(x, \infty) := (x_1, \infty) \times \dots \times (x_n, \infty)$.

Oczywiście, każdy lokalnie określony operator $K : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ jest zarówno lewostronnie jak i prawostronnie określony.

Podamy teraz przykłady operatorów typu $K : C^0(A) \rightarrow C^0(A)$, które są jednostronnie określone, natomiast nie są lokalnie określone.

W tym celu przyjmijmy, że $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ dla $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, oraz weźmy funkcje ciągłe $H : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $f_i : A \rightarrow [a_i, b_i]$ dla $i = 1, \dots, n$.

Przykład 1 [I, Example 1]. Operator $K : C^0(A) \rightarrow C^0(A)$ określony wzorem

$$K(\varphi)(x) = \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} H(y_1, \dots, y_n, \varphi(y_1, \dots, y_n)) dy_1 \dots dy_n$$

jest lewostronnie określony, natomiast operator $K : C^0(A) \rightarrow C^0(A)$ dany wzorem

$$K(\varphi)(x) = \int_{x_1}^{b_1} \dots \int_{x_n}^{b_n} H(y_1, \dots, y_n, \varphi(y_1, \dots, y_n)) dy_1 \dots dy_n$$

jest prawostronnie określony.

Operatory tego typu (z pamięcią, odpowiednio, lewostronną lub prawostronną) noszą nazwę operatorów Volterry-Hammersteina.

Przykład 2 [I, Example 2]. Operator $K : C^0(A) \rightarrow C^0(A)$ określony wzorem

$$K(\varphi)(x) = H(x, \varphi(f_1(x), \dots, f_n(x)))$$

jest lewostronnie określony, jeżeli

$$f_i(x_1, \dots, x_n) \geq x_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (x_1, \dots, x_n) \in A,$$

oraz prawostronnie określony, jeżeli

$$f_i(x_1, \dots, x_n) \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (x_1, \dots, x_n) \in A.$$

W tych przykładach (na ogół) żaden z operatorów jednostronnie określonych nie jest lokalnie określony.

Biorąc w Przykładzie 2:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (x_1, \dots, x_n) \in A,$$

otrzymujemy operator zarówno lewostronnie, prawostronnie, jak i lokalnie określony.

Twierdzenia reprezentacyjne dla operatorów lokalnie określonych typu

$$K : C^m(A) \rightarrow C^0(A)$$

Dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}_0$ oznaczmy

$$S(k) := \sum_{i=0}^{m-k} \binom{n+i-1}{i}.$$

Jeżeli $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, to łatwo zauważyć, że liczba $S(k)$ wyraża ilość wszystkich ciągłych pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^{|j|} g}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}$; $j \in \mathbb{N}_0^n$, $|j| \leq m-k$, dowolnej funkcji n -zmiennych klasy C^{m-k} (utożsamiamy tutaj pochodne cząstkowe różniące się jedynie kolejnością różniczkowania względem odpowiednich zmiennych niezależnych).

Twierdzenie 2 [I, Theorem 2]. Niech $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, oraz niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym niepustym zbiorem domkniętym. Jeżeli operator $K : C^m(A) \rightarrow C^0(A)$ jest lokalnie określony, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja

$$h : A \times \mathbb{R}^{S(0)} \rightarrow \mathbb{R},$$

że

$$\begin{aligned} & K(\varphi)(x) \\ &= h(x, \varphi^{(0, \dots, 0)}(x), \varphi^{(1, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, 1)}(x), \dots, \varphi^{(m, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, m)}(x)), \end{aligned} \quad (4)$$

dla wszystkich $\varphi \in C^m(A)$, $x \in A$.

(Zgodnie z uwagą po Definicji 3, mamy $[K(\varphi)]^{(0, \dots, 0)} = K(\varphi)$.)

Twierdzenia reprezentacyjne dla operatorów lokalnie określonych typu

$$K : C^m(A) \rightarrow C^1(A)$$

Twierdzenie 3 [II, Theorem 3]. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ oraz niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym niepustym zbiorem doskonałym. Jeżeli $K : C^m(A) \rightarrow C^1(A)$ jest operatorem lokalnie określonym, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : A \times \mathbb{R}^{S(1)} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $\varphi \in C^m(A)$,

$$\begin{aligned} & [K(\varphi)]^{(0, \dots, 0)}(x) \\ = & h(x, \varphi^{(0, \dots, 0)}(x), \varphi^{(1, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, 1)}(x), \dots, \varphi^{(m-1, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, m-1)}(x)), \\ & \text{dla wszystkich } x \in A. \end{aligned}$$

Twierdzenie 2 i Twierdzenie 3 stanowią uogólnienia Twierdzenia 1 i Twierdzenia 3 z pracy [25], gdzie $n = 1$ i A jest zwartym przedziałem na prostej.

Z Twierdzenia 2 wynika natychmiast, że jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym, to operator $K : C^0(A) \rightarrow C^0(A)$ jest lokalnie określony wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem Niemyckiego, tj. postaci $K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x))$ dla wszystkich $\varphi \in C^0(A)$, $x \in A$, i na podstawie twierdzenia Krasnosielskiego [22] wnosimy, że funkcja h jest ciągła na zbiorze $A' \times \mathbb{R}$, gdzie A' jest zbiorem wszystkich punktów skupienia zbioru A [I, Corollary 2].

Podobnie zauważmy, że w myśl Twierdzenia 3, jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem doskonałym i operator $K : C^1(A) \rightarrow C^1(A)$ jest lokalnie określony, to istnieje taka funkcja h , że $K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x))$, $\varphi \in C^1(A)$, $x \in A$, a więc operator K jest także operatorem Niemyckiego. Wydawać by się mogło, że i w tym przypadku generator h tego operatora powinien być funkcją o znacznym stopniu regularności - można by oczekiwać, że funkcja h jest klasy C^1 na zbiorze $A \times \mathbb{R}$. Niestety, przykład z pracy [25] ([por. także [3] str. 323) pokazuje istnienie operatorów lokalnie określonych $K : C^1(A) \rightarrow C^1(A)$, których generatory h nie są nawet funkcjami ciągłymi.

Twierdzenia reprezentacyjne dla wielomianowo (m, k) -ograniczonych lokalnie określonych operatorów typu $K : C^m(A) \rightarrow C^k(A)$

Kluczową rolę w charakteryzacji operatorów topologicznie lokalnie określonych typu $K : C^m(A) \rightarrow C^k(A)$, gdy $k \geq 2$, pełni następująca

Definicja 7 [III, Definition 3]. Niech $m, k, n \in \mathbb{N}$ będą ustalone i niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem doskonałym. Operator $K : C^m(A) \rightarrow C^k(A)$ nazywamy *wielomianowo (m, k) -ograniczonym*, jeżeli dla każdego $x_0 \in A$ i dla każdego ciągu wielomianów $(\varphi_N)_{N=0}^\infty$ stopnia co najwyżej r spełniającego warunek

$$\varphi_M^j(x_0) = \varphi_N^j(x_0) \quad M, N \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{N}_0^n, |j| \leq r, \quad j \neq p,$$

zachodzi implikacja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N^p(x_0) = \varphi_0^p(x_0) \Rightarrow [([K(\varphi_N)]^q(x_0))_{N=0}^\infty \text{ jest ograniczony}]$$

dla wszystkich liczb naturalnych $r \in \{m - k + 1, \dots, m\}$, $p, q \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| = r$, $|q| = m - r + 1$.

Twierdzenie 4 [III, Theorem 3]. Niech $m, n, k \in \mathbb{N}$ będą takie, że $m \geq 2$, $2 \leq k \leq m$ oraz niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym spójnym zbiorem doskonałym. Jeżeli operator $K : C^m(A) \rightarrow C^k(A)$ jest lokalnie określony i wielomianowo (m, k) -ograniczony, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : A \times \mathbb{R}^{S(k)} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $\varphi \in C^m(A)$,

$$\begin{aligned} & [K(\varphi)]^{(0, \dots, 0)}(x) \\ &= h(x, \varphi^{(0, \dots, 0)}(x), \varphi^{(1, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, 1)}(x), \dots, \varphi^{(m-k, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, m-k)}(x)), \end{aligned}$$

dla wszystkich $x \in A$.

Z powyższego twierdzenia wynika następujący

Wniosek 1 [III, Corollary 1]. Niech $m, n, k \in \mathbb{N}$ będą takie, że $m \geq 2$, $2 \leq k \leq m$ oraz niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym i spójnym zbiorem doskonałym. Jeżeli operator K jest lokalnie określony i ciągły w sensie norm przestrzeni Banacha $C^m(A)$ i $C^k(A)$, lub jest lokalnie określony i przekształca ciągi zbieżne w przestrzeni Banacha $C^m(A)$ na ciągi ograniczone w przestrzeni Banacha $C^k(A)$, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : A \times \mathbb{R}^{S(k)} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $\varphi \in C^m(A)$,

$$\begin{aligned} & [K(\varphi)]^{(0, \dots, 0)}(x) \\ &= h(x, \varphi^{(0, \dots, 0)}(x), \varphi^{(1, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, 1)}(x), \dots, \varphi^{(m-k, \dots, 0)}(x), \dots, \varphi^{(0, \dots, m-k)}(x)), \end{aligned}$$

dla wszystkich $x \in A$.

Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy lokalnie określony operator K przekształca $C^m(A)$ w $C^k(A)$ i $k > m$.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym spójnym i ograniczonym zbiorem doskonałym. Jeżeli operator $K : C^m(A) \rightarrow C^k(A)$ i $k > m$, to również $K : C^m(A) \rightarrow C^m(A)$ i, przy założeniu lokalnej określoności i wielomianowo (m, m) -ograniczoności, na mocy Twierdzenia 4 wnioskujemy, że jest operatorem Niemyckiego. Wobec tego, w myśl [3, Theorem 8.3], jest on operatorem stałym, tj. istnieje taka funkcja $h \in C^k(A)$, że $K(\varphi) = h$ dla wszystkich $\varphi \in C^m(A)$.

Stąd otrzymujemy także

Wniosek 2 [III, Corollary 2]. Niech $m, n, k \in \mathbb{N}$ będą takie, że $m \geq 2$, $k > m$ oraz niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym i ograniczonym spójnym zbiorem doskonałym.

Jeżeli lokalnie określony operator $K : C^m(A) \rightarrow C^k(A)$ jest ciągły w sensie norm przestrzeni Banacha $C^m(A)$ i $C^k(A)$ lub przekształca ciągi zbieżne w przestrzeni Banacha $C^m(A)$ na ciągi ograniczone w przestrzeni Banacha $C^k(A)$, to jest operatorem stałym.

Na koniec zauważmy, że jeżeli lokalnie określony operator $K : C^0(A) \rightarrow C^k(A)$ ($k \in \mathbb{N}$, gdzie A jest niepustym zbiorem zwartym lub $K : C^1(A) \rightarrow C^k(A)$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$), gdzie A jest niepustym ograniczonym zbiorem doskonałym, to na mocy Twierdzenia 2 i Twierdzenia 3 otrzymujemy stałość operatora K bez dodatkowych założeń regularnościowych o operatorze K .

2. Lokalność a operatory Niemyckiego

Operatory lokalnie określone w klasach funkcji ciągłych i monotonicznych

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem oraz niech $M_+(I)$ i $M_-(I)$ oznaczają odpowiednio rodzinę funkcji niemalejących i nierosnących określonych na I . Połóżmy $CM_+(I) := C^0(I) \cap M_+(I)$ i $CM_-(I) := C^0(I) \cap M_-(I)$.

W dowodach twierdzeń reprezentacyjnych dla operatorów lokalnie określonych w klasie funkcji ciągłych i monotonicznych istotną rolę odgrywa następujący

Lemat 1 [IV, Lemma 3]. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem i niech $x_0 \in I$. Załóżmy, że $K : CM_+(I) \rightarrow CM_+(I)$ jest lokalnie określony. Wówczas

(i) dla wszystkich $\psi_1, \psi_2 \in CM_+(I)$ spełniona jest implikacja

$$\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0) \implies K(\psi_1)(x_0) = K(\psi_2)(x_0);$$

(ii) jeżeli ciąg $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ jest jednostajnie zbieżny i $\varphi_{k+1} \leq \varphi_k$, $k \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(\varphi_k)(x_0) = K(\varphi)(x_0),$$

gdzie $\varphi := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$.

Twierdzenie 5 [IV, Theorem 1]. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Lokalnie określony operator K przekształca $CM_+(I)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna taka ciągła i niemalejąca ze względu na obie zmienne funkcja $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla wszystkich $\varphi \in CM_+(I)$,

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Twierdzenie 6 [IV, Theorem 2]. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Lokalnie określony operator K przekształca $CM_-(I)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna taka ciągła, nierosnąca ze względu na pierwszą zmienną i niemalejąca ze względu na drugą zmienną funkcja $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)),$$

dla wszystkich $\varphi \in CM_-(I)$ i $x \in I$.

Twierdzenie 7 [IV, Theorem 3]. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Lokalnie określony operator K przekształca $CM_+(I)$ w $CM_-(I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna taka ciągła i nierosnąca ze względu na obie zmienne funkcja $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)),$$

dla wszystkich $\varphi \in CM_+(I)$ i $x \in I$.

Twierdzenie 8 [IV, Theorem 4]. Lokalnie określony operator K przekształca $CM_-(I)$ w $CM_+(I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna taka ciągła, niemalejąca ze względu na pierwszą zmienną i nierosnąca ze względu na drugą zmienną funkcja $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad \varphi \in CM_-(I) \quad (x \in I).$$

Wykorzystując oznaczenia wprowadzone w Definicji 1, otrzymujemy stąd następujący

Wniosek 3. Operator K jest (CM_+, CM_+) -, (CM_-, CM_-) -, (CM_+, CM_-) -, (CM_-, CM_+) -lokalnie określony wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem Niemyckiego z ciągłym i odpowiednio monotonicznym generatorem.

Uwaga 2. Jeżeli lokalnie określony operator K działa z $CM_+(I)$ w $CM_-(I)$ oraz K działa z $CM_-(I)$ w $CM_-(I)$, to jest operatorem stałym, tj. istnieje taka funkcja $b \in CM_-(I)$, że

$$K(\varphi) = b, \quad \varphi \in CM_+(I) \cup CM_-(I).$$

Jeżeli lokalnie określony operator K działa z $CM_+(I)$ w $CM_+(I)$ oraz K działa z $CM_-(I)$ w $CM_-(I)$, to istnieje taka ciągła i niemalejąca funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$K(\varphi) = h \circ \varphi, \quad \varphi \in CM_+(I) \cup CM_-(I),$$

a więc K jest operatorem autonomicznym.

Uwaga 3. Założenie, że dziedzina i zbiór wartości rozważanego operatora zawierają się w przestrzeni funkcji ciągłych jest istotne. Pokazuje to następujący

Przykład 3. Niech $K : M_+(I) \rightarrow M_+(I)$ będzie określony wzorem

$$K(\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x-) & \text{dla } x \neq \inf I, x \in I, \\ \varphi(x) & \text{dla } x = \inf I. \end{cases}$$

Oczywiście K jest lokalnie określony, ale nie jest operatorem Niemyckiego.

Operatory lokalnie określone w klasach funkcji spełniających warunek Höldera

Funkcja $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją Höldera (por. [3], str. 182), gdy spełnia następujące warunki:

- (a) ϕ jest prawostronnie ciągła w punkcie 0 i $\phi(0) = 0$;
- (b) ϕ jest rosnąca;
- (c) $(0, \infty) \ni t \rightarrow \frac{\phi(t)}{t}$ jest nierosnąca.

Z warunków (a) - (c) wynika, że ϕ jest podaddytywna i ciągła ([V, Remark 2.1], także [3, Lemma 7.1]).

Klasycznym przykładem funkcji Höldera jest $\phi(t) = t^\alpha$ dla wykładnika $\alpha \in (0, 1]$.

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem oraz ϕ funkcją Höldera. Zdefiniujemy przestrzeń Höldera $H_\phi(I) = H_\phi(I, \mathbb{R})$ jako zbiór wszystkich funkcji $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, dla których

$$h_\phi(\varphi) := \sup_{s>0} \frac{\omega(\varphi, s)}{\phi(s)} < \infty,$$

gdzie $\omega(\varphi, s)$ jest modułem ciągłości, tj.,

$$\omega(\varphi, s) := \sup\{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq s\}.$$

Każda funkcja należąca do przestrzeni $H_\phi(I)$ jest ciągła. W przypadku, gdy $\phi(t) = t^\alpha$, przestrzeń H_ϕ oznaczamy często przez H_α ; natomiast gdy $\alpha = 1$, piszemy $H_\phi = Lip$.

Wprowadzając

$$\|\varphi\|_\phi := |\varphi(z)| + h_\phi(\varphi),$$

gdzie $z \in I$ jest dowolnie ustalonym punktem, przestrzeń $(H_\phi(I), \|\cdot\|_\phi)$ jest przestrzenią Banacha.

Dla dwóch funkcji Höldera ϕ i ψ piszemy

$$\phi \preceq \psi \text{ jeśli } \phi(t) = O(\psi(t)), \text{ gdy } t \rightarrow 0,$$

gdzie O jest symbolem Landaua. Wiadomo, że ([3, str. 183])

$$\phi \preceq \psi \iff H_\phi(I) \subset H_\psi(I).$$

Z definicji przestrzeni $H_\phi(I, \mathbb{R})$ wynika, że $\varphi \in H_\phi(I, \mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| \leq L\phi(|x - \bar{x}|), \quad x, \bar{x} \in I, \quad (5)$$

dla pewnej nieujemnej liczby rzeczywistej L .

Twierdzenie 9 [V, Theorem 1]. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeżeli lokalnie określony operator K przekształca $H_\phi(I)$ w $C^0(I)$, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla wszystkich $\varphi \in H_\phi(I)$,*

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Z inkluzji $H_\psi(I) \subset C^0(I)$ dla dowolnej funkcji Höldera ψ i powyższego twierdzenia wynika, że dowolny lokalnie określony operator $K : H_\phi(I) \rightarrow H_\psi(I)$ jest operatorem Niemyckiego. Podobnie jak w przypadku operatorów $K : C^1(I) \rightarrow C^1(I)$ również teraz generator operatora $K : H_\phi(I) \rightarrow H_\psi(I)$ nie musi być funkcją ciągłą ([3, str. 190]). A. Bondarenko i P. P. Zabrejko [6, 7] (także [3, Theorem 7.3]) wykazali, że przy założeniu zwartości przedziału I , warunek ograniczoności operatora K jest konieczny dla ciągłości generatora h .

Mianowicie udowodniono następujące

Twierdzenie 10. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie zwartym przedziałem. Operator Niemyckiego generowany przez funkcję h przekształcający przestrzeń $H_\phi(I)$ w przestrzeń $H_\psi(I)$ jest ograniczony (tzn. przekształca zbiory ograniczone na zbiory ograniczone) wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony następujący warunek:*

(i) dla każdego $r > 0$ istnieje takie $m(r)$, że

$$|h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)| \leq m(r) \left\{ \psi(|x_1 - x_2|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|y_1 - y_2|}{r} \right) \right] \right\},$$

dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ i $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Ponieważ każdy operator Niemyckiego jest lokalny, otrzymujemy

Twierdzenie 11 [V, Theorem 2]. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zwartym. Lokalnie określony i ograniczony operator przekształca przestrzeń $H_\phi(I)$ w $H_\psi(I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem Niemyckiego z funkcją generującą spełniającą warunek (i).*

Wniosek 4 [V, Corollary 3]. *Niech I będzie przedziałem zwartym. Jeżeli lokalnie określony operator $K : H_\phi(I) \rightarrow H_\psi(I)$ jest ograniczony, to jest operatorem Niemyckiego z ciągłą funkcją generującą.*

Z własności operatora Niemyckiego $K : H_\phi(I) \rightarrow H_\psi(I)$ (gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem zwartym) wynika [3, str. 188], że jeżeli $\phi \not\leq \psi$, to funkcja generująca nie zależy od drugiej zmiennej, tzn. operator jest stały. Stąd wynika

Twierdzenie 12 [V, Theorem 3]. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zwartym. Jeżeli lokalnie określony operator $K : H_\phi(I) \rightarrow H_\psi(I)$ i $\phi \not\leq \psi$, to K jest operatorem stałym, tj. istnieje taka funkcja $h \in H_\psi(I)$, że $K(\varphi) = h$ dla wszystkich $\varphi \in H_\phi(I)$.*

W szczególności zauważmy, że jeżeli $\phi(t) = t^\alpha$ i $\psi(t) = t^\beta$, $t \geq 0$, to lokalnie określony operator $K : H_\alpha(I) \rightarrow H_\beta(I)$ jest stały, jeżeli $\alpha < \beta$.

Wykorzystując Twierdzenie E. J. McShane'a [38, Theorem 1] o rozszerzaniu funkcji hölderowskich można pokazać, że Twierdzenie 9 pozostaje prawdziwe gdy przestrzeń $H_\phi(I, \mathbb{R})$ zastąpimy przez $H_\phi(X, \mathbb{R})$, gdzie (X, ρ_X) jest przestrzenią metryczną. Mamy wówczas: $\varphi \in H_\phi(X, \mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| \leq L\phi(\rho_X(x, \bar{x})), \quad x, \bar{x} \in X, \quad (6)$$

dla pewnej nieujemnej liczby rzeczywistej L .

Zachodzi zatem następujące

Twierdzenie 13. *Niech (X, ρ_X) , (Z, ρ_Z) będą dowolnymi przestrzeniami metrycznymi oraz niech $A \subset X$. Jeżeli operator $K : H_\phi(A, \mathbb{R}) \rightarrow H_\psi(A, Z)$ jest lokalnie określony, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : A \times \mathbb{R} \rightarrow Z$, że*

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad \varphi \in H_\phi(A, \mathbb{R}), \quad x \in A.$$

Uwaga 4. Niech $\phi(t) = t^\alpha$, $t \geq 0$. Wówczas, korzystając z twierdzenia Minty'ego [40, Theorem 1] wnioskujemy, że Twierdzenie 9 pozostaje prawdziwe, jeżeli

- (i) $H_\phi(A, \mathbb{R})$ zastąpimy przez $H_\alpha(A, Y)$, gdzie $(Y, |\cdot|_Y)$ jest przestrzenią Hilberta i $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$;
- (ii) $H_\phi(A, \mathbb{R})$ zastąpimy przez $H_\alpha(A, Y)$ oraz (X, ρ_X) przez $(X', |\cdot|_{X'})$, gdzie $(X', |\cdot|_{X'})$, $(Y, |\cdot|_Y)$ są przestrzeniami Hilberta i $\alpha \in (0, 1]$.

Operatory lokalnie określone w klasach funkcji o ograniczonej φ -wariacji

Niech $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną takich funkcji wypukłych $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, że $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(u) > 0$ dla $u > 0$. Zauważmy, że każda funkcja $\varphi \in \mathcal{F}$ jest ciągła, rosnąca, nadaddytywna, tj.,

$$\varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(u + v); \quad u \geq 0, v \geq 0,$$

oraz $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

Dla ustalonej funkcji $\varphi \in \mathcal{F}$, mówimy, że $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją o *ograniczonej φ -wariacji na przedziale I* (L. C. Young [61]), co piszemy $f \in BV_\varphi(I)$, jeśli

$$V_\varphi(f, I) := \sup\{\sigma(f, P) : P \in \mathcal{P}(I)\} < \infty,$$

gdzie

$$\sigma(f, P) := \sum_{i=1}^m \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|),$$

oraz $\mathcal{P}(I)$ oznacza rodzinę podziałów

$$P = (t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m), \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b,$$

przedziału I .

(Liczba $V_\varphi(f, I)$ nazywa się φ -wariacją funkcji f na I .)

Gdy $\varphi = id_I$, przestrzeń $BV_\varphi(I)$ jest przestrzenią funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana zaś w przypadku, gdy $\varphi(u) = u^p, u \geq 0, p > 1$, przestrzenią funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Wienera.

Zbiór $BV_\varphi(I)$ jest podzbiorem wypukłym przestrzeni liniowej rzeczywistej $\mathbb{R}^I$, lecz, na ogół, nie jest przestrzenią liniową. Określmy $W_\varphi(I)$ następująco:

$$f \in W_\varphi(I) \text{ jeżeli istnieje takie } \lambda > 0, \text{ że } \frac{f}{\lambda} \in BV_\varphi(I).$$

Wówczas $W_\varphi(I)$ jest przestrzenią liniową rzeczywistą. Ponadto, z normą $\|\cdot\|_\varphi : W_\varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $\|f\|_\varphi = |f(a)| + p_\varphi(f)$, gdzie

$$p_\varphi(f) = p_\varphi(f, I) = \inf\{\lambda > 0 : V_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}, \quad f \in W_\varphi(I),$$

$W_\varphi(I)$ jest algebrą Banacha (L. Maligranda i W. Orlicz [27]). Funkcjonał p_φ jest seminormą Luxemburga - Nakano - Orlicza.

W dalszym ciągu symbol $CW_\varphi(I)$ oznacza $W_\varphi(I) \cap C^0(I)$.

Twierdzenie 14 [VII, Theorem 2]. *Niech $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ oraz niech $I = [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) będzie przedziałem. Jeżeli lokalnie określony operator K przekształca przestrzeń $CW_\varphi(I)$ w przestrzeń $CW_\psi(I)$, to istnieje jedyna taka funkcja $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ że, dla wszystkich $f \in CW_\varphi(I)$,*

$$K(f)(s) = h(s, f(s)), \quad s \in I,$$

a więc K jest operatorem Niemyckiego.

3. Jednostajna ograniczoność operatorów Niemyckiego, operatorów lokalnych oraz pewne ich zastosowania

W tej części istotną rolę odgrywa następująca

Definicja 8 [36, Definition 1]. Niech $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ będą przestrzeniami metrycznymi (lub unormowanymi). Odwzorowanie $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ nazywamy *jednostajnie ograniczonym*, jeżeli dla każdego $t > 0$ istnieje taka nieujemna liczba rzeczywista $\gamma(t)$, że dla dowolnego zbioru $B \subset \mathcal{Y}$ zachodzi implikacja

$$\text{diam} B \leq t \Rightarrow \text{diam} H(B) \leq \gamma(t).$$

Zauważmy, że każdy operator lipschitzowski $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ przestrzeni metrycznej $(\mathcal{Y}, d_Y)$ w przestrzeń metryczną $(\mathcal{Z}, d_Z)$, tj. spełniający, dla pewnej liczby $c \geq 0$, nierówność

$$d_Z(H(y_1), H(y_2)) \leq c d_Y(y_1, y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathcal{Y}, \quad (7)$$

lub operator jednostajnie ciągły $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ jest operatorem jednostajnie ograniczonym. Ponadto, każdy taki operator $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$, że $H(\mathcal{Y})$ jest zbiorem ograniczonym w $\mathcal{Z}$ jest jednostajnie ograniczony.

Okazuje się, że w pewnych przestrzeniach funkcyjnych Banacha generatory globalnie lipschitzowskich operatorów Niemyckiego muszą być funkcjami afinicznymi ze względu na zmienną funkcyjną. Rozważmy następujący

Przykład 4. Niech $(Lip[0, 1], \|\cdot\|)$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji lipschitzowskich $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$\|\varphi\| = |\varphi(0)| + \sup_{\substack{x, y \in [0, 1], \\ x \neq y}} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} \right|. \quad (8)$$

Niech operator Niemyckiego H przekształca przestrzeń $(Lip[0, 1], \|\cdot\|)$ w siebie i niech $h : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie generatorem H . J. Matkowski [29] udowodnił, że jeśli H jest globalnie lipschitzowski tzn., że dla pewnej stałej $c \geq 0$,

$$\|H(\varphi_1) - H(\varphi_2)\| \leq c\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in Lip[0, 1],$$

to

$$h(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in I, y \in \mathbb{R},$$

dla pewnych funkcji $\alpha, \beta \in Lip[0, 1]$.

Podobnie J. Matkowski i J. Miś [37] wykazali, że w przypadku, gdy globalnie lipschitzowski operator H przekształca przestrzeń $BV(I)$ w siebie (gdzie $BV(I) = BV_\varphi(I)$ dla $\varphi = id_I$), to istnieją takie funkcje $\alpha, \beta : BV(I) \rightarrow BV(I)$ lewostronnie ciągłe na I , że generator h operatora Niemyckiego H spełnia warunek

$$\lim_{t \rightarrow x-} h(t, y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in (a, b], y \in \mathbb{R}.$$

Podobna reprezentacja generatorów lipschitzowskich operatorów Niemyckiego została uzyskana dla wielu przestrzeni funkcyjnych [11, 28-30, 32, 39] (także dla multifunkcji [12, 13, 54-56]).

Nieco później zauważono, że w wyżej wymienionych pracach warunek lipschitzowskiej ciągłości operatora H może być zastąpiony warunkiem jego jednostajnej ciągłości [17, 33-35].

W roku 2011 J. Matkowski [36] pokazał, że w przypadku operatora przekształcającego klasę funkcji lipschitzowskich w siebie warunek jednostajnej ciągłości operatora H można zastąpić jeszcze słabszym założeniem jednostajnej ograniczoności.

W tej części podamy reprezentację generatora jednostajnie ograniczonego operatora Niemyckiego przekształcającego klasę funkcji o ograniczonej n -tej wariacji $(BV_n(I), \|\cdot\|_n)$ w siebie. Zauważmy, że operatory Niemyckiego określone w tej klasie nie były wcześniej rozpatrywane ani w przypadku operatorów spełniających warunek Lipschitza (7), ani w przypadku operatorów jednostajnie ciągłych. W następnej części przedstawimy pewne konsekwencje dla operatorów lokalnych. Pracę kończą uwagi dotyczące możliwości stosowania metody punktu stałego Banacha w rozwiązywaniu równań funkcyjnych.

Zwróćmy jeszcze uwagę na następujący

Przykład 5. Jeżeli przyjmiemy $I = [a, b]$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oraz $Y = \mathbb{R}$, to operator Niemyckiego generowany przez funkcję $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$h(x, y) = \sin y$$

jest operatorem lipschitzowskim przekształcającym przestrzeń funkcji ciągłych z normą supremum (słabszą niż norma określona wzorem (8)) w siebie, bądź przestrzeń $L^p(I)$, $p \geq 1$, ze standardową normą L^p w siebie.

Jednostajnie ograniczone operatory Niemyckiego w przestrzeniach BV_n

Niech $I = [a, b]$ będzie przedziałem ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) i $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnej funkcji $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i różnych punktów $x_1, \dots, x_{n+1}$ przedziału $[a, b]$ definiujemy iloraz różnicowy stopnia n funkcji φ w punktach $x_1, \dots, x_{n+1}$ następująco:

$$\begin{aligned} [x_1; \varphi] &= \varphi(x_1), \\ [x_1, \dots, x_{n+1}; \varphi] &= \frac{[x_2, \dots, x_{n+1}; \varphi] - [x_1, \dots, x_n; \varphi]}{x_{n+1} - x_1}. \end{aligned}$$

Dla dowolnej funkcji $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ połączmy

$$V_n(\varphi) = V_n(\varphi, [a, b]) := \sup_p \sum_{i=1}^{m-n-1} |[x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; \varphi] - [x_i, \dots, x_{i+n}; \varphi]|,$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich podziałach

$$p = (x_1, \dots, x_m); \quad a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b; \quad m \geq n+2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Mówimy, że funkcja φ jest o *ograniczonej n -tej wariacji na $[a, b]$* , jeżeli $V_n(\varphi, [a, b]) < \infty$ i przez $BV_n[a, b]$ oznaczamy klasę wszystkich takich funkcji. Teoria dotycząca funkcji o ograniczonej n -tej wariacji została zapoczątkowana przez M. P. Popowiciu [43, 44] i była systematycznie rozwijana przez A. M. Russell'a (np. [48, 49]).

Wiadomo, że przestrzeń $BV_n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, z normą

$$\|\varphi\|_n := V_n(\varphi, [a, b]) + |\varphi(a)| + |\varphi'_+(a)| + \dots + |\varphi_+^{(n)}(a)|, \quad \varphi \in BV_n[a, b], \quad (9)$$

jest przestrzenią Banacha (A. M. Russell [49]). Wiadomo także [W. Roberts, D. E. Varberg [47]], że każda funkcja o ograniczonej n -tej wariacji $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą

$$L_a^b(\varphi) := \sup \left\{ \left| \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} \right| : x_1, x_2 \in [a, b], \quad x_1 \neq x_2 \right\}.$$

W otrzymaniu głównego wyniku kluczową rolę pełnią następujące lematy:

Lemat 2 [VI, Lemma 2]. Jeżeli $\varphi \in BV_n[a, b]$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, to $\varphi \in BV_{n-1}[a, b]$ i spełniona jest nierówność:

$$V_{n-1}(\varphi) \leq n(b-a)(V_n(\varphi) + |\varphi_+^{(n)}(a)|).$$

Lemat 3 [VI, Lemma 3]. Jeżeli $\varphi \in BV_n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, to istnieje taka dodatnia liczba $s(n)$, że

$$L_a^b(\varphi) + |\varphi(a)| \leq s(n)\|\varphi\|_n.$$

Główny wynik tej części brzmi następująco:

Twierdzenie 15 [VI, Theorem 1]. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oraz $n \in \mathbb{N}$ będą ustalone. Przypuśćmy, że $h : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że dla dowolnego $x \in [a, b]$, funkcja $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła ze względu na drugą zmienną. Jeżeli operator złożenia H generowany przez funkcję h przekształca przestrzeń $BV_n[a, b]$ w siebie oraz spełnia nierówność

$$\|H(\varphi) - H(\psi)\|_n \leq \gamma(\|\varphi - \psi\|_n), \quad \varphi, \psi \in BV_n[a, b],$$

dla pewnej funkcji $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, to istnieją takie funkcje $\alpha \in BV_n[a, b]$ i $\beta \in BV_n[a, b]$, że

$$h(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 5 [VI, Remark 1]. Jeżeli funkcja $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest prawostronnie ciągła w punkcie 0 i $\gamma(0) = 0$, to założenie ciągłości funkcji h ze względu na drugą zmienną może być pominięte.

Z Twierdzenia 15 i Uwagi 5 dostajemy zatem

Twierdzenie 16 [VI, Theorem 2]. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) i $n \in \mathbb{N}$ będą ustalone oraz niech operator złożenia H generowany przez funkcję h przekształca przestrzeń $BV_n[a, b]$ w siebie. Jeżeli istnieje taka prawostronnie ciągła w zerze funkcja $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, że $\gamma(0) = 0$ oraz

$$\|H(\varphi) - H(\psi)\|_n \leq \gamma(\|\varphi - \psi\|_n), \quad \varphi, \psi \in BV_n[a, b],$$

to

$$h(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R},$$

dla pewnych funkcji $\alpha, \beta \in BV_n[a, b]$.

Wniosek 5 [VI, Corollary 1, Remark 2]. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i $n \in \mathbb{N}$ będą ustalone. Jeżeli operator złożenia H generowany przez funkcję h przekształcający przestrzeń $BV_n[a, b]$ w siebie jest jednostajnie ciągły lub (globalnie) lipschitzowski (ze względu na normę $BV_n[a, b]$), to istnieją takie funkcje $\alpha, \beta \in BV_n[a, b]$, że

$$h(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 17 [VI, Theorem 3]. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $h : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że dla dowolnego $x \in [a, b]$, funkcja $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła ze względu na drugą zmienną. Jeżeli operator złożenia H generowany przez funkcję h przekształca przestrzeń $BV_n[a, b]$ w siebie i jest jednostajnie ograniczony, to istnieją takie funkcje $\alpha \in BV_n[a, b]$ i $\beta \in BV_n[a, b]$, że

$$h(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R},$$

oraz

$$H(\varphi)(x) = \alpha(x)\varphi(x) + \beta(x), \quad \varphi \in BV_n[a, b] \quad (x \in [a, b]).$$

Uwagi o jednostajnej ograniczoności operatorów lokalnych

Wykorzystując rezultat J. Matkowskiego [36] oraz Twierdzenie 13 otrzymujemy następujące

Twierdzenie 18. Niech (X, ρ_X) , (Z, ρ_Z) będą dowolnymi przestrzeniami metrycznymi oraz niech $A \subset X$. Jeżeli lokalnie określony operator K przekształcający przestrzeń $H_\phi(A, \mathbb{R})$ w $H_\psi(A, Z)$ jest jednostajnie ograniczony, to istnieją takie funkcje $\alpha, \beta \in H_\phi(A, \mathbb{R})$, że

$$K(\varphi)(x) = \alpha(x)\varphi(x) + \beta(x), \quad \varphi \in H_\phi(A, \mathbb{R}), \quad x \in A.$$

Niech $\phi(t) = t^\alpha$, $t \geq 0$. Wówczas, korzystając ponownie z rezultatu J. Matkowskiego [36] i Uwagi 4 wnioskujemy, że Twierdzenie 18 zachodzi, gdy

- (i) $H_\phi(A, \mathbb{R})$ zastąpimy przez $H_\alpha(A, Y)$, gdzie $(Y, |\cdot|_Y)$ jest przestrzenią Hilberta i $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$;
- (ii) $H_\phi(A, \mathbb{R})$ zastąpimy przez $H_\alpha(A, Y)$ oraz (X, ρ_X) przez $(X', |\cdot|_{X'})$, gdzie $(X', |\cdot|_{X'})$, $(Y, |\cdot|_Y)$ są przestrzeniami Hilberta i $\alpha \in (0, 1]$.

Stosując [12, Theorem 1], [12, Lemma 6], [17, Theorem 3.1] oraz [17, Remark 3.6] otrzymujemy następujące

Twierdzenie 19. *Niech $(X, |\cdot|_X), (Y, |\cdot|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi oraz niech C będzie domkniętym i wypukłym podzbiorem X . Przypuśćmy, że $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ i $h : I \times C \rightarrow Y$. Jeżeli operator złożenia $H : C^I \rightarrow Y^I$ generowany przez funkcję h przekształca przestrzeń $W_\varphi(I, C)$ w przestrzeń $W_\psi(I, Y)$ i jest jednostajnie ograniczony, to lewostronna regularyzacja funkcji h , tj. funkcja $h^- : I^- \times X \rightarrow Y$ określona wzorem*

$$h^-(t, y) := \lim_{s \rightarrow t^-} h(s, y), \quad t \in I^-; \quad y \in C,$$

istnieje oraz

$$h^-(t, y) = A(t)y + B(t), \quad t \in I^-; \quad y \in C,$$

dla pewnych funkcji $A : I^- \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)^I$ i $B \in BV_\psi(I^-, Y)$. Ponadto, funkcje A i B są lewostronnie ciągłe na I^- . ($\mathcal{L}(X, Y)$ oznacza przestrzeń wszystkich odwzorowań liniowych $A : X \rightarrow Y$ i $I^- := I \setminus \{\inf I\}$.)

(Analogiczny rezultat zachodzi dla regularyzacji prawostronnej.)

Stąd, przy dodatkowym założeniu, że lokalnie określony operator K przekształcający przestrzeń $CW_\varphi(I)$ w przestrzeń $CW_\psi(I)$ jest jednostajnie ograniczony, otrzymujemy pełną charakteryzację jego funkcji generyującej h . Mianowicie otrzymujemy następujące

Twierdzenie 20. *Niech $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ oraz niech $I = [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) będzie przedziałem. Jeżeli lokalnie określony operator $K : CW_\varphi(I) \rightarrow CW_\psi(I)$ jest jednostajnie ograniczony, to istnieją takie funkcje $\alpha, \beta \in CW_\psi(I)$, że*

$$K(f)(s) = \alpha(s)f(s) + \beta(s), \quad f \in CW_\varphi(I), \quad (s \in I). \quad (10)$$

Ponadto, jeżeli $\psi \ll \varphi$ (tj. jeżeli istnieją takie $r > 0$, $c > 0$ i $t_0 > 0$, że $\psi(t) \leq r\varphi(ct)$ dla wszystkich $t \in [0, t_0]$) i operator $K : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$ jest określony wzorem (10) dla pewnych funkcji $\alpha, \beta \in CW_\psi(I)$, to operator K przekształca przestrzeń $CW_\varphi(I)$ w przestrzeń $CW_\psi(I)$ oraz jest lokalnie określony i lipschitzowski (zatem jednostajnie ograniczony).

Uwaga 6. Analogiczny do Twierdzenia 20 wynik dotyczący lokalnych operatorów jednostajnie ciągłych został otrzymany w [VII, Theorem 4].

Zastosowania jednostajnej ograniczoności operatorów Niemyckiego

Operator Niemyckiego jest ściśle związany z teorią równania funkcyjnego typu iteracyjnego:

$$\varphi(x) = h(x, \varphi(f(x))), \quad x \in X, \quad (11)$$

gdzie $f : X \rightarrow X$ i $h : X \times Y \rightarrow Z$ są funkcjami danymi, zaś φ niewiadomą. Istotnie, korzystając z definicji operatora Niemyckiego H , równanie (11) można zapisać w postaci

$$\varphi = (H \circ F)(\varphi),$$

gdzie $F(\varphi) := \varphi \circ f$, przy dość ogólnych założeniach o funkcji f , jest odwzorowaniem liniowym, ograniczonym i odwracalnym przekształcającym $\mathcal{G}(X, Y)$ w siebie. Zastosowanie zasady Banacha o punkcie stałym do równania (11) wymaga, aby $H \circ F$ było odwzorowaniem zwężającym. Implikuje to na ogół, że H jest przekształceniem globalnie lipschitzowskim (z taką stałą, że $c\|F\| < 1$).

Z Twierdzenia 17 dla $\mathcal{G}(X, Y) = BV_n[a, b]$ wynika więc, że operator $H \circ F$ przyjmuje postać

$$H(F(\varphi(x))) = \alpha(x)\varphi(f(x)) + \beta(x), \quad x \in [a, b], \quad \varphi \in BV_n[a, b],$$

gdzie α, β są pewnymi funkcjami z przestrzeni $BV_n[a, b]$. Oznacza to, że badanie lipschitzowskich rozwiązań równania funkcyjnego (21) przy pomocy twierdzenia Banacha jest możliwe jedynie w przypadku, gdy równanie (21) jest równaniem liniowym postaci

$$\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(f(x)) + \beta(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Uwaga 7. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zwartym. Wtedy para $(CM_+(I), d)$, gdzie $d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$ ($\|\cdot\|_\infty$ oznacza normę supremum), jest przestrzenią metryczną zupełną. Niech $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niemalejącą ze względu na każdą z obu zmiennych. Przypuśćmy, że

$$|h(x, u) - h(x, v)| \leq \alpha(x)|u - v|, \quad x \in I, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$. Niech H będzie operatorem Niemyckiego o generatorze h . Oczywiście $H : CM_+(I) \rightarrow CM_+(I)$ (por. Twierdzenie 5). Ponieważ dla wszystkich $\varphi_1, \varphi_2 \in CM_+(I)$ mamy

$$d(H(\varphi_1), H(\varphi_2)) = \|H(\varphi_1) - H(\varphi_2)\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty = \|\alpha\|_\infty d(\varphi_1, \varphi_2),$$

operator H jest globalnie lipschitzowski. W szczególności operator H jest jednostajnie ograniczony. Zauważmy, że np. funkcja

$$h(x, y) := \alpha(x) \arctan y + \beta(x),$$

gdzie $\alpha, \beta \in CM_+(I)$, $\alpha \geq 0$, spełnia wszystkie te warunki i nie jest funkcją afiniczną ze względu na drugą zmienną.

Zatem, gdy $\|\alpha\|_\infty < 1$, w odróżnieniu od poprzedniej sytuacji, dla dowolnie ustalonej funkcji ciągłej i niemalejącej $f : I \rightarrow I$, możemy zastosować twierdzenie Banacha o punkcie stałym do poszukiwania rozwiązań $\varphi \in CM_+(I)$ nieliniowego równania funkcyjnego

$$\varphi(x) = h(x, \varphi[f(x)]), \quad x \in I.$$

CZĘŚĆ DRUGA

Omówienie wyników niewchodzących w skład rozprawy zawartych w następujących pracach:

- [P1] M. Wróbel, *An example to a problem of Z. Daróczy*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Matematyka 23 (1993), 30-38.
- [P2] J. Matkowski, M. Wróbel, *A generalized α -Wright convexity and relaxed functional equation*, Annales Math. Silesianae 10 (1996), 7-12.
- [P3] J. Knop, T. Kostrzewski, M. Lupa, M. Wróbel, *On a special case of the Gołąb - Schinzel functional equation*, Demonstratio Math. 30(3) (1997), 475-478.
- [P4] M. Wróbel, *On functions of bounded n -th variation*, Annales Math. Silesianae 15 (2001), 79-86.
- [P5] M. Wróbel, *Some consequences of locally defined operators*, Proceedings of the XII-th Czech-Polish-Slovak Mathematical School, Faculty of Education of University J. E. Purkyne in Usti nad Ladem (2005), 82-86.
- [P6] J. Knop, M. Wróbel, *Some properties of i -connected sets*, Annales Acad. Paedag. Cracoviensis Studia Math. 6 (2007), 51-56.
- [P7] M. Wróbel, *Lichawski-Matkowski-Miś theorem of locally defined operators for functions of several variables*, Annales Acad. Paedag. Cracoviensis Studia Math. 7 (2008), 15-22.
- [P8] J. Knop, M. Wróbel, *A characteristic of i -connected spaces*, Tatra Mt. Math. Publ. 46 (2010), 1-5.

- [P9] J. Matkowski, M. Wróbel, *The bounded local operators in the Banach space of Hölder functions*, Scientific Issues, Jan Długosz University in Częstochowa, Mathematics XV(2010), 91-98.
- [P10] T. Ereú, N. Merentes, J. L. Sánchez, M. Wróbel, *Uniformly continuous set-valued composition operators in the space of functions of bounded variations in the sense of Schramm*, Scientific Issues, Jan Długosz University in Częstochowa, Mathematics XVI (2011), 23-30.
- [P11] J. Matkowski, M. Wróbel, *Uniformly bounded Nemytskij operators generated by set-valued functions between generalized Hölder function spaces*, Discuss. Math. Differential Inclusions, Control and Optimizations 31 (2011), 183-198.
- [P12] J. Matkowski, M. Wróbel, *Uniformly bounded set-valued Nemytskij operators acting between generalized Hölder function spaces*, Cent. Eur. J. Math. 10(2) (2012), 609-618.
- [P13] T. Ereú, N. Merentes, J. L. Sánchez, M. Wróbel, *Uniformly continuous composition operators in the space of bounded Φ -variation functions in the Schramm sense*, Opuscula Math. 32(2) (2012), 239-247.
- [P14] W. Azis, T. Ereú, N. Merentes, J. L. Sánchez, M. Wróbel, *Uniformly continuous operators in the space of functions of two variables of bounded Φ -variation in the sense of Schramm*, Scientific Issues, Jan Długosz University in Częstochowa, Mathematics XVII (2012), 7-16.

Prace [P5] i [P7] dotyczą operatorów lokalnie określonych przekształcających klasę funkcji $C^m(D)$ w klasę $C^0(D)$ lub $C^1(D)$, gdzie D jest zbiorem regularnie (kanonicznie) domkniętym (tj. $\text{cl}A = \text{cl int}A$) w otwartej podprzestrzeni $G \subset \mathbb{R}^n$ i $C^m(D)$ jest klasą takich funkcji $\varphi|_D$, że $\varphi \in C^m(G)$. Podajemy dwa twierdzenia reprezentacyjne tychże operatorów [P7, Theorem 1] i [P7, Theorem 2], w dowodach których istotną rolę odgrywa główny wynik pracy [P5, Theorem] mówiący, że jeżeli dwie funkcje wraz z pochodnymi cząstkowymi pokrywają się w jakimś punkcie, to ich obrazy, wraz z odpowiednikami pochodnymi cząstkowymi, są także równe w tym punkcie.

Geneza i historia rezultatów dotyczących operatorów lokalnie określonych została omówiona wcześniej w części dotyczącej rozprawy. Wyniki zawarte w pracach [P5] i [P7] są szczególnym przypadkiem Twierdzenia 2 i Twierdzenia 3 i są częścią wyników otrzymanych w pracy doktorskiej. Zauważmy, że stanowią one pierwszy krok w

odpowiedzi na pytanie o postać lokalnie określonych operatorów działających w klasach funkcji klasy C^m określonych na podzbiorach $\mathbb{R}^n$ dla $n > 1$.

Również prace [P9]-[P14] są ściśle związane z zagadnieniami poruszonymi w rozprawie (Rozdział 3). W pracy [P9] dowodzimy, że założenie zwartości przedziału I w Twierdzeniu 11 oraz Wniosku 4 może być pominięte. Główny wynik brzmi następująco:

Twierdzenie 21 [P9, Theorem 2]. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeżeli lokalnie określony operator K przekształcający przestrzeń $H_\phi(I, \mathbb{R})$ w przestrzeń $H_\psi(I, \mathbb{R})$ jest ograniczony, to istnieje dokładnie jedna taka ciągła funkcja $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że*

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad \varphi \in H_\phi(I, \mathbb{R}), \quad x \in I.$$

Ponadto, podajemy przykład nieciągłej funkcji $h : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ generującej (nieograniczony) operator Niemyckiego (zatem także lokalnie określony) przekształcający przestrzeń funkcji lipschitzowskich $Lip([0, 1], \mathbb{R})$ w siebie.

W pracach [P11] i [P12] zajmujemy się jednostajnie ograniczonymi operatorami Niemyckiego działającymi na przestrzeniach funkcji wielowartościowych; rozszerzamy w nich wyniki otrzymane przez J. Matkowskiego [36]. Niech $(Z, |\cdot|_Z)$ będzie przestrzenią unormowaną. Oznaczmy przez $cc(Z)$ rodzinę niepustych, zwartych i wypukłych podzbiorów zbioru Z . Dla $A, B \subset Z$ definiujemy $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ oraz $\alpha A := \{\alpha a : a \in A\}$.

Niech $(X, \rho_1), (X, \rho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi, $(Y, |\cdot|_Y), (Z, |\cdot|_Z)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi, $C \subset Y$ wypukłym stożkiem i funkcja $h : X \times C \rightarrow cc(Z)$ będzie ciągła ze względu na drugą zmienną. Załóżmy, że operator Niemyckiego H z generatorem h przekształca przestrzeń $Lip((X, \rho_1), C)$ w przestrzeń $Lip((X, \rho_2), cc(Z))$. Jeżeli operator H jest jednostajnie ograniczony, to główny wynik [P11, Theorem 3] mówi, że istnieją takie funkcje $a : X \times C \rightarrow cc(Z)$ i $b : X \rightarrow cc(Z)$, że a jest liniowa ze względu na drugą zmienną (tj. $a(x, \cdot)$ jest liniowym odwzorowaniem C na $cc(Z)$ dla dowolnie ustalonego $x \in X$), funkcje $a(\cdot, y), b$ należą do przestrzeni $Lip((X, \rho_2), cc(Z))$ dla każdego $y \in C$, oraz

$$H(\varphi)(x) = a(x, \varphi(x)) + b(x), \quad \varphi \in Lip((X, \rho_1), C), \quad x \in X.$$

W pracy [P12] rodzina zbiorów $cc(Z)$ zostaje zastąpiona przez $clb(Z)$, gdzie $clb(Z)$ jest rodziną wszystkich niepustych, ograniczonych, domkniętych i wypukłych podzbiorów Z z operacją $+$ zdefiniowaną następująco:

$$A +^* B = cl(A + B).$$

Biorąc $X := [0, 1]$, $\rho_1(x, y) = |x - y|^\alpha, \rho_2(x, y) = |x - y|^\beta$ dla pewnych $\alpha, \beta \in (0, 1]$, otrzymujemy główny wynik E. Mainki [26].

Dowodzimy także, że założenie o funkcji γ (ograniczona w prawostronnym otoczeniu zera) w głównym wyniku J. Matkowskiego [36, Theorem 1] może być pominięte, jeżeli założymy, że C jest wypukłym stożkiem, zamiast zbiorem wypukłym o niepustym wnętrzu.

W pracy [P13], wspólnie z T. Ereú, N. Merentesem i J. L. Sánchezem, dowodzimy, że odpowiednia regularyzacja generatora jednostajnie ciągłego operatora Niemyckiego przekształcającego przestrzeń funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Schramma w siebie jest funkcją afiniczną ze względu na zmienną funkcyjną. Odpowiednie wyniki otrzymujemy również dla generatorów jednostajnie ciągłych operatorów Niemyckiego przekształcających przestrzeń funkcji wielowartościowych o ograniczonej wariacji w sensie Schramma [P10, Theorem 1] i dla generatorów jednostajnie ciągłych operatorów Niemyckiego przekształcających przestrzeń funkcji dwóch zmiennych o ograniczonej wariacji w sensie Schramma [P14, Theorem 4.1].

Klasa funkcji określonych na przedziale domkniętym $[a, b]$ o ograniczonej n -tej wariacji, oznaczana jako $BV_n[a, b]$, została wprowadzona w Rozdziale 3. A. M. Russell [48] udowodnił, że każda funkcja o ograniczonej n -tej wariacji określona na $[a, b]$ jest różnicą dwóch funkcji n -wypukłych i wykorzystując ten wynik wykazał, że przestrzeń $BV_n[a, b]$, z normą określoną wzorem (9), jest przestrzenią Banacha. Zauważmy, że dla $n = 0$ otrzymujemy klasyczny wynik o rozkładzie funkcji o ograniczonej wariacji określonej na przedziale domkniętym na różnicę dwóch funkcji niemalejących, zaś dla $n = 1$ twierdzenie o reprezentacji funkcji o ograniczonej drugiej wariacji na różnicę dwóch funkcji wypukłych posiadających skończone pochodne jednostronne na końcach przedziału. Przestrzeń funkcji o ograniczonej drugiej wariacji (często oznaczane jako $BC[a, b]$) zostały wprowadzone przez W. Robertsa i D. E. Varberga w 1968 roku [46]. Dowody przedstawione przez A. M. Russella opierają się na dość skomplikowanych własnościach ilorazów różnicowych funkcji. W pracy [P4] wykorzystując wynik M. T. Popoviciu [44], oraz fakt [P4, Remark 1], że każda funkcja f jest n -wypukła dla $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest $(n - 1)$ -wypukła, przedstawiamy inne (prostsze) dowody twierdzenia o reprezentacji funkcji o ograniczonej n -tej wariacji oraz twierdzenia o zupełności przestrzeni unormowanej $BV_n[a, b]$.

W pracy [P6] wprowadzamy definicje zbiorów i -spójnych oraz i -spójnych przestrzeni. Mówiąc ogólnie, zbiór nazywamy i -spójnym, jeżeli ma niepuste i spójne wnętrze oraz przestrzeń topologiczną nazywamy i -spójną, jeżeli nie istnieją w niej zbiory spójne o niespójnych wnętrzach. Motywacją do prowadzonych badań była obserwacja, że prosta z topologią naturalną jest przestrzenią i -spójną, zaś płaszczyzna euklidesowa już nie. Innym przykładem przestrzeni i -spójnej jest przestrzeń z topologią wyznaczoną przez ciągłe uporządkowanie zbioru czy też przestrzeń z topologią co najwyżej przeliczalnych dopełnień. W świetle powyższych przykładów nasuwa

się pytanie, w jakich przestrzeniach spójność jest równoważna i -spójności. W pracy [P8, Theorem 2] dowodzimy, że i -spójne przestrzenie, które są całkowicie Hausdorffa oraz lokalnie i łukowo spójne nie zawierają triod. Wnioskujemy stąd [P8, Corollary 2], że każda i -spójna, całkowicie Hausdorffa, ośrodkowa, lokalnie i łukowo spójna przestrzeń jest zanurzalna w prostą lub jest krzywą zamkniętą, a zatem [P8, Corollary 4] istnieją tylko jednowymiarowe (w sensie Urysona) przestrzenie i -spójne, które są całkowicie Hausdorffa, ośrodkowe oraz lokalnie i łukowo spójne. Podajemy również przykłady pokazujące, że każde z powyższych założeń jest istotne. Ponadto, w wymienionych pracach przedstawiamy pewne własności zbiorów i przestrzeni i -spójnych. Dowodzimy, między innymi, że i -spójność jest własnością dziedziczną ze względu na zbiory o własności $\text{cl}A = \text{cl int}A$ (w szczególności na zbiory otwarte) [P6, Theorem 2] oraz podajemy związek między zbiorami i -spójnymi w przestrzeni euklidesowej i zbiorami i -spójnymi w silniejszej topologii - topologii Hashimoto [18] na płaszczyźnie [P6. Theorem 3].

Prace [P1]-[P3] dotyczą równań funkcyjnych i zostały opublikowane przed doktoratem.

Praca [P1] pokazuje, że istnieją ciągłe funkcje $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające tzw. nierówność Hosszu

$$f(x + y - xy) + f(xy) \leq f(x) + f(y), \quad x, y \in [0, 1], \quad (12)$$

które nie są funkcjami wklęsłymi. Praca ta stanowi odpowiedź na pytanie postawione przez Z. Daróczy. Zwróćmy uwagę, że M. Hosszu [por. 23, p. 333] wykazał, że każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca równanie

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y), \quad (13)$$

jest funkcją afiniczną. Z drugiej strony funkcje afiniczne są jedynymi ciągłymi rozwiązaniami równania Jensena

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad (14)$$

a zatem równania (13) i (14) są równoważne. Wiadomo, że jeżeli funkcja jest ciągła i spełnia odpowiednią nierówność Jensena

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad (15)$$

to jest wklęsła. Przykład z pracy [P1] pokazuje, że w przypadku nierówności (12) i (15) nie mamy analogii jak w przypadku równań (13) i (14).

Praca [P2] uogólnia wynik Zs. Páles [41], który wykazał ścisły związek między nierównością funkcyjną

$$f(M(x, y)) + f(N(x, y)) \leq f(x) + f(y), \quad x, y \in I, \quad (16)$$

a równaniem funkcyjnym

$$f(M(x, y)) + f(N(x, y)) = f(x) + f(y), \quad x, y \in I, \quad (17)$$

gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, zaś $M, N :: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłymi funkcjami spełniającymi następujący warunek

$$(x, y \in I, \quad x \neq y) \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in (\min\{x, y\}, \max\{x, y\}),$$

w szczególności M i N są średnimi na I . Mianowicie udowodnił on następujące twierdzenie: Jeżeli istnieje silnie monotoniczna, ciągła funkcja $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ będąca rozwiązaniem równania (17), to ciągła funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia (16) wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ \varphi^{-1}$ jest funkcją wypukłą na $\varphi(I)$. W pracy [P2] dowodzimy, że rezultat Zs. Páles pozostaje prawdziwy, jeżeli φ jest funkcją ciągłą, nie jest funkcją stałą oraz f jest funkcją półciągłą z dołu. Jako wniosek otrzymujemy, że każda funkcja półciągła z dołu i α -wypukła w sensie Wrighta jest wypukła (por. J. Matkowski [31]).

Praca [P3] dotyczy równania funkcyjnego Gołąba-Schinzela

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

rozpatrywanego na przekątnej

$$f(x + xf(x)) = [f(x)]^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Dowodzimy tutaj, że jeżeli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją spełniającą równanie (18) oraz jeżeli istnieją $\lim_{x \rightarrow -1^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(-1^-)$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(0^+)$, to f jest postaci

$$f(x) = 1 - \frac{x}{f^{-1}(0^+)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Literatura

- [1] Ju. A. Abramovich, *Multiplicative representations of disjointness preserving operators*, Indag. Math. 86 (1993), 265-279.
- [2] Ju. A. Abramovich, A. I. Veksler, A. V. Koldunov, *On operators preserving disjointness* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 248(5) (1979), 1033-1036.
- [3] J. Appell, P.P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press, Cambridge-Port Chester-Melbourne-Sydney, 1990.
- [4] J. Banaś, *Superposition operator and integrable solutions of some functional equations*, Nonlinear Anal. 12 (1988), 777-784.
- [5] J. Banaś, K. Sadarangani, *Monotonicity properties of the superposition operator and their applications*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 1385-1394.
- [6] V. A. Bondarenko, P. P. Zabrejko, *The superposition operator in Hölder functions spaces* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 222(6) (1975), 1265-1268.
- [7] V. A. Bondarenko, P. P. Zabrejko, *The superposition operator in Hölder spaces* (Russian), Jaroslav. Gos. Univ. Kach. Priblizh. Metody Issled. Oper. Uravn. 3 (1985), 87-202.
- [8] G. Buttazo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation problems in the calculus of variations*, Textas e Notas 34, Centro Mat. Aplic. Fund. Univ. Lisbona, 1986.
- [9] G. Buttazo, G. Dal. Maso, *On Nemytskii operators and integral representation of local functionals*, Rend. Mat. 3 (1983), 491-509.
- [10] K. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, De Gruyter, Leipzig-Berlin, 1918.
- [11] V.V. Chistyakov, *Lipschitzian superposition operators between spaces of functions of bounded generalized variation with weight*, J. Appl. Anal. 6 (2000), 173-186.
- [12] V.V. Chistyakov, *Mappings of bounded Wiener φ -variation*, Folia Math. 11(1) (2004), 15-39.
- [13] V.V. Chistyakov, *Modular metric spaces, II: Application to superposition operators*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 15-30.

- [14] Z. Grande, *On the measurability of functions of two variables*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 77 (1975), 335-336.
- [15] Z. Grande, *La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$* , Dissertationes Math. Warszawa 159 (1979), 45 p.
- [16] Z. Grande, J. S. Lipiński, *Un exemple d'une fonction sup-mesurable qui n'est pas-mesurable*, Colloquium Math. 39(1) (1978), 77-79.
- [17] J.A. Guerrero, H. Leiva, J. Matkowski, N. Merentes, *Uniformly continuous composition operators in the space of bounded φ -variation functions*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 3119-3123.
- [18] H. Hashimoto, *On the $\ast$ topology and its application*, Fund. Math. 91(1) (1976), 5-10.
- [19] K. Karták, *A generalization of the Carathéodory theory differential equations*, Czechoslov. Math. J. 17 (1967), 482-514.
- [20] K. Karták, *On Carathéodory operators*, Czechoslov. Math. J. 17 (1967), 515-519.
- [21] W. Kozłowski, *Nonlinear operators in function Banach spaces*, Comm. Math. Prace Mat. 22 (1980), 85-103.
- [22] M. A. Krasnoselskij, *Continuity conditions for some nonlinear operators* (Russian), Ukrain. Mat. Zhurn. 2(3) (1950), 70-86.
- [23] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1985.
- [24] M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger, *Iterative Functional Equations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1990.
- [25] K. Lichawski, J. Matkowski, J. Miś, *Locally defined operators in the space of differentiable functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 37 (1989), 315-325.
- [26] E. Mainka, *On uniformly continuous Nemytskij operators generated by set-valued functions*, Aequationes Math. 79 (2010), 293-306.
- [27] L. Maligranda, W. Orlicz, *On some properties of functions of generalized variation*, Monatsh. Math. 104 (1987), 53-65.

- [28] A. Matkowska, *On characterization of Lipschitzian operators of substitution in the class of Hölder function*, Sci. Bull. Łódź Techn. Univ. 17 (1984), 81-85.
- [29] J. Matkowski, *Functional equation and Nemytskij operators*, Funkcial Ekv. 25 (1982), 127-132.
- [30] J. Matkowski, *Form of Lipschitz operators of substitution in Banach spaces of differentiable functions*, Sci. Bull. Łódź Tech. Univ. 17 (1984), 5-10.
- [31] J. Matkowski, *On α -Wright convexity and the converse of Minkowski's inequality*, Aequationes. Math. 43 (1992), 219-224.
- [32] J. Matkowski, *Lipschitzian composition operators in some function spaces*, Nonlinear Anal. 30(2) (1997), 719-726.
- [33] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the spaces of differentiable functions and absolutely continuous functions*, Internat. Ser. Numer. Math. 157 (2008), 155-155.
- [34] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the space of Hölder functions*, J. Math. Anal. App. 359 (2009), 56-61.
- [35] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the spaces of bounded variation functions*, Math. Nach. 283 (7) (2010), 1060-1064.
- [36] J. Matkowski, *Uniformly bounded composition operators between general Lipschitz functions normed spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 38(2) (2011), 395-406.
- [37] J. Matkowski and J. Miś, *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space $BV[a, b]$* , Math. Nachr. 117 (1984), 155-159.
- [38] E. J. McShane, *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), 837-842.
- [39] N. Merentes, *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space of bounded Riesz φ -variation*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 34 (1991), 139-144.
- [40] G. J. Minty, *On the extension of Lipschitz, Lipschitz-Hölder continuous, and monotone functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 76(2) (1970), 334-339.
- [41] Zs. Páles, *On two variable functional inequality*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 10 (1988), 219-224.

- [42] R. Phuciennik, *Representation of additive functionals on Musielak-Orlicz spaces of vector-valued functions*, Kodai Math. J. 10(1) (1987), 49-54.
- [43] M. T. Popoviciu, *Sur les fonctions convexes d'une variable réelle*, C.R. Acad. Sci. Paris 190 (1930), 1481-83.
- [44] M. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, D. Sc. Thesis, Paris, 1933.
- [45] R. Randriananja, *Sur les h -opérateurs*, C. R. Acad. Sci. Paris 306 (1988), 667-669.
- [46] W. Roberts, D. E. Varberg, *Functions of bounded convexity*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1968), 568-572.
- [47] W. Roberts, D. E. Varberg, *Connex functions*, Academic Press, New York and London, 1973.
- [48] A. M. Russell, *Functions of bounded k th variation*, Proc. London Math. Soc. 26(3) (1973), 547-563.
- [49] A. M. Russell, *A Banach space of functions of generalized variation*, Bull. Austral. Math. Soc. 15 (1976), 431-438.
- [50] I. V. Shragin, *Conditions for the measurability of superpositions* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 197(2) (1971), 295-298.
- [51] I. V. Shragin, *Abstract Nemytskij operators are locally defined operators* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 227(1) (1976), 47-49.
- [52] I. V. Shragin, *On the continuity of locally defined operators* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 232(2) (1977), 292-295.
- [53] I. V. Shragin, *On representation of a locally defined operator in the form of Nemytskii operator*, Func. Differ. Equ. 3 (1996), 447-452.
- [54] A. Smajdor, W. Smajdor, *Jensen equation and Nemytskii operator for set-valued functions*, Rad. Math. 5 (1989), 311-320.
- [55] W. Smajdor, *Note on Jensen and Pexider functional equations*, Demonstratio Math. 32 (1999), 363-376.
- [56] W. Smajdor, *On continuous composition operators*, Ann. Polon. Math. 98(3) (2010), 273-282.

- [57] M. M. Vajnberg, *On the structure of a certain operator* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 92(2) (1953), 213-216.
- [58] I. Vrkoč, *The representation of Carathéodory operators*, Czechoslov. Math. J. 19 (1969), 99-109.
- [59] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 63-89.
- [60] S. Yamamuro, *On the theory of some nonlinear operators*, Yokohama Math. J. 10 (1962), 11-17.
- [61] L. C. Young, *Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p -ième bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier*, C.R. Acad. Sci. Paris 204(7) (1937), 470-472.

Matgorzehe Wibel